MASTER MNE 1

Année 2017-2018

Florent Nageotte

Rappels d'automatique analogique

1. On donne les équations différentielles d'un système éléctro-mécanique :

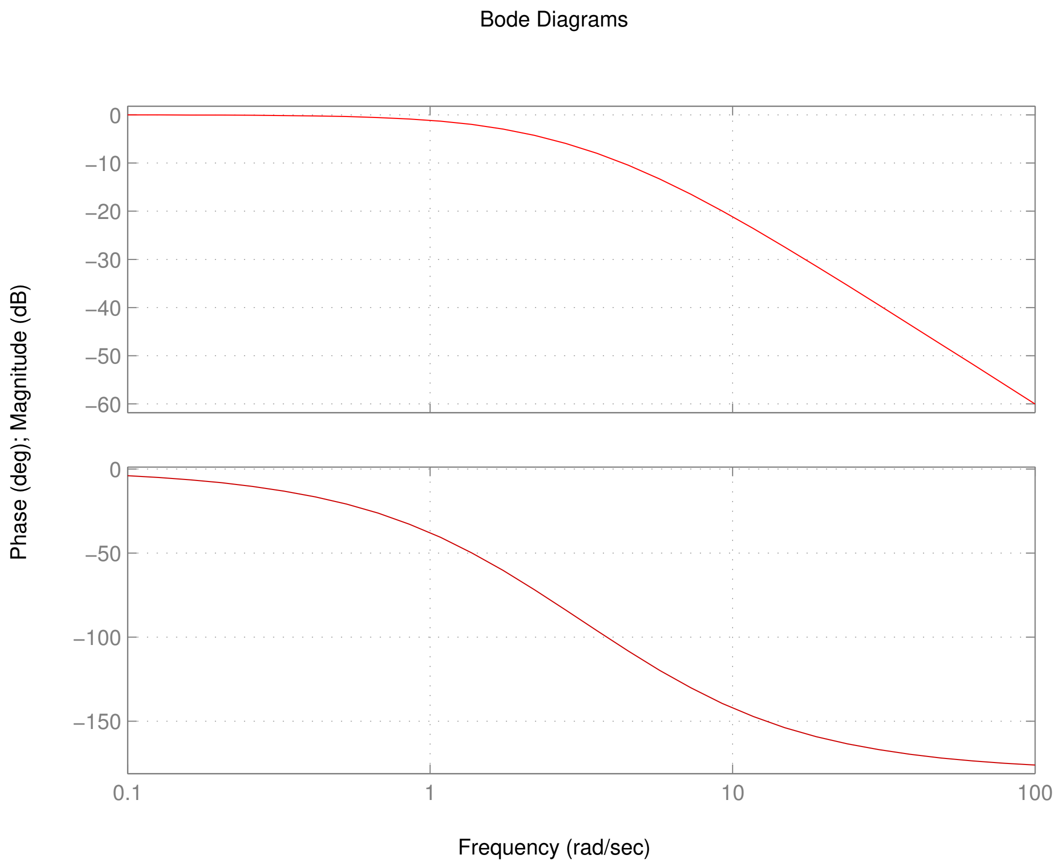
$$
\begin{aligned}
U(t) &= L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) \\
\Gamma(t) &= K_i I(t) \\
J\frac{d\Omega}{dt} &= \Gamma(t) - f\Omega(t) \\
\Omega(t) &= \frac{d\theta(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

   Calculez la fonction de transfert entre la tension U et la position angulaire θ.

2. Soit la fonction de transfert suivante : $G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+50)}$
   a. Quels sont les pôles dominants de ce système ?
   b. Combien vaut le gain statique de ce système ?
   c. Ce système est-il stable ?
   d. Tracez approximativement (sans calcul) la réponse indicielle de ce système.

3. Soit le procédé de fonction de transfert suivante : $G(s) = \frac{20}{s(s+10)(s+100)}$
   a. Tracez le lieu des racines de ce système. Que représentent les courbes tracées ?
   b. On définit le cahier des charges suivant :
   — Erreur statique par rapport à la consigne nulle
   — réponse indicielle sans dépassement
   — Temps d'établissement à 5% inférieur à 300 ms
   Où doivent se trouver les pôles de la boucle fermée pour respecter ce cahier des charges ? Quel type de correcteur faut-il utiliser ? Réglez un correcteur permettant de respecter ce cahier des charges.

4. On donne les diagrammes de Bode d'un procédé :



a. Combien vaut la bande passante de ce système ?
b. Quel est le gain statique du procédé ?
c. On souhaite corriger ce procédé à l'aide d'un correcteur proportionnel. Pourra-t-on annuler l'erreur statique par rapport à la consigne ?
d. On utilise le correcteur $C(s) = \frac{1}{s}$. Combien vaut la bande passante de la boucle fermée corrigée ? Combien vaut la marge de phase du système corrigé ? Quels sont les avantages de cette boucle fermée par rapport au procédé initial ?
e. On souhaite respecter le cahier des charges suivant :
— Erreur statique nulle par rapport à la consigne
— bande passante supérieure ou égale à 3 rad/s
— marge de phase supérieure ou égale à 45°
— Rejet des perturbations de sortie

Tracez approximativement et sans calcul les diagrammes de Bode de la boucle ouverte corrigée (procédé et correcteur). Quel type de correcteur faut-il utiliser ? Justifiez. Calculez les paramètres d'un tel correcteur.

Transformées en z

1. Calculer la transformée en z des séquences suivantes ($k \geq 0$).

$$\text{a.} \qquad f[k] = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ 1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$\text{b.} \qquad f[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ pair} \\ -1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

2. On considère un système numérique $F(z)$ initialement au repos à l'entrée duquel on impose le signal $r[k] = \Gamma(k)$. Déterminez la séquence de sortie en utilisant la décomposition en éléments simples pour

$$\text{a.} \qquad F(z) = \frac{1}{z - 0.5}$$

$$\text{b.} \qquad F(z) = \frac{1}{z^2 - 0.5z}$$

$$\text{c.} \qquad F(z) = \frac{z + 1}{z^2 + z + 1}$$

$$\text{d.} \qquad F(z) = \frac{2(z + 0.8)}{4z^2 - 7.2z + 3.2}$$

Vérifiez vos résultats en utilisant la division polynômiale.

3. On considère un système numérique Σ d'entrée u et de sortie y représenté par les équations aux différences suivantes. En utilisant le théorème du retard, calculer le signal de sortie y lorsque le signal d'entrée est $u[k] = \Gamma[k]$:

a. $y[k] - 1.7y[k-1] + 0.7y[-2] = u[k] + 0.7u[k-1]$
avec $y[-2] = 0$ et $y[-1] = 0$

b. $y[k+2] - 0.1y[k+1] - 0.2y[k] = u[k+1] + u[k]$
avec $y[-1] = 1$ et $y[-2] = 0$

c. $y[k] + 2y[k-1] + y[k-2] = 2u[k-2]$
avec $y[0] = 0$ et $y[1] = 1$

Fonctions de transfert numériques

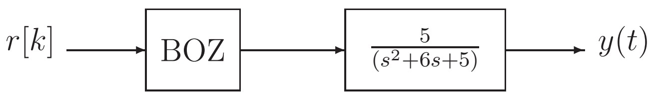
1. Un système discret a la fonction de transfert suivante :

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2 - z + 1}$$

   a. Donner l'équation aux différences régissant le système si l'entrée est $r[k]$ et la sortie $y[k]$.

   b. Calculer $y[k]$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et $k = \infty$ si le système est initialement au repos et $r[k] = \Upsilon[k]$.

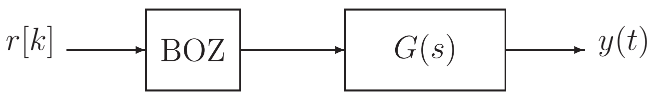
2. Soit le système avec période d'échantillonnage $T = 0.1$ s



   a. Calculer la fonction de transfert $F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$.

   b. Donner la valeur finale de la sortie y si $r[k] = R\Upsilon[k]$.

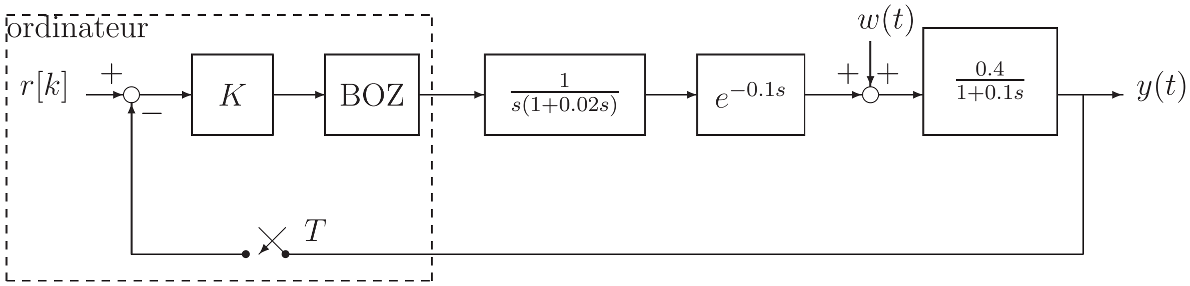
3. On considère le système suivant avec la période d'échantillonnage $T = 0.1$ s et $G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+20)}$



   a. Calculer la fonction de transfert $G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$.

   b. Tracer le signal de sortie y si $r[k] = R\Upsilon[k]$. Comparer avec la réponse indicielle du système analogique. Qu'en pensez-vous ?

4. Soit le système commandé par ordinateur avec période d'échantillonnage $T = 0.05$ sec :

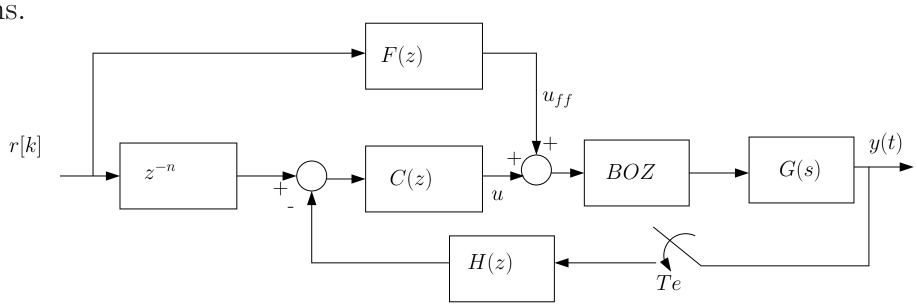


a. Calculer la fonction de transfert $F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$.

b. Calculer $Y(z)$ si $r[k] = 0$ et $w(t) = W\Upsilon(t)$.

c. Calculer la valeur finale de la sortie y si $K = 1$, $r[k] = R\Upsilon[k]$ et $w(t) = W\Upsilon(t)$.

5. Soit le système suivant fonctionnant à la période d'échantillonnage $Te = 10$ ms.



a. Exprimez la fonction de transfert numérique entre r et y. Vous pourrez par exemple utiliser le théorème de superposition.

b. Montrez que si $F(z)G(z)H(z) = z^{-n}$ alors l'erreur est toujours nulle.

c. Calculez la réponse indicielle du système pour les 4 premiers instants d'échantillonnage si :

— $G(s) = \frac{1}{s(1+0.03s)}$

— $F(z) = \frac{666.7(z-1)(z-0.7165)}{z(z+0.8949)}$

— $H(z) = z^{-2}$

— $n = 3$

Stabilité des systèmes

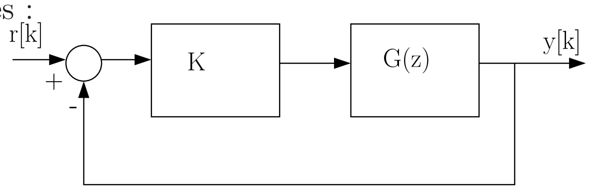
1. Déterminer si les systèmes de fonctions de transfert numériques suivantes sont stables :

$$\text{a.}\qquad G(z) = \frac{1.3z^2 - 3z + 2.2}{z^3 - 1.5z^2 + 1.2z - 0.5}$$

$$\text{b.}\qquad G(z) = \frac{3.2(z-0.5)}{(z-0.1)(z+0.5)(z-1)}$$

$$\text{c.}\qquad G(z) = \frac{1.5z^{-3} + 1.2z^{-4}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2} - 2z^{-3} + 0.5z^{-4}}$$

2. Déterminer les valeurs de K pour lesquelles les systèmes numériques bouclés suivants sont stables :

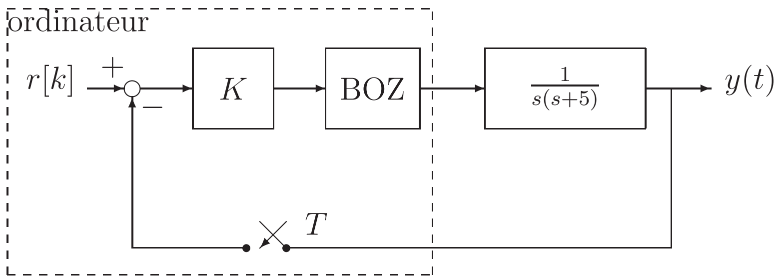


avec

$$\text{a.}\qquad G(z) = \frac{-z}{z^3 + 0.5}$$

$$\text{b.}\qquad G(z) = \frac{z^{-2}(1 - z^{-1})}{1 + 0.5z^{-1}}$$

3. Soit le système commandé par ordinateur avec période d'échantillonnage $T = 0.5$ s



a. Calculer la fonction de transfert $F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$.

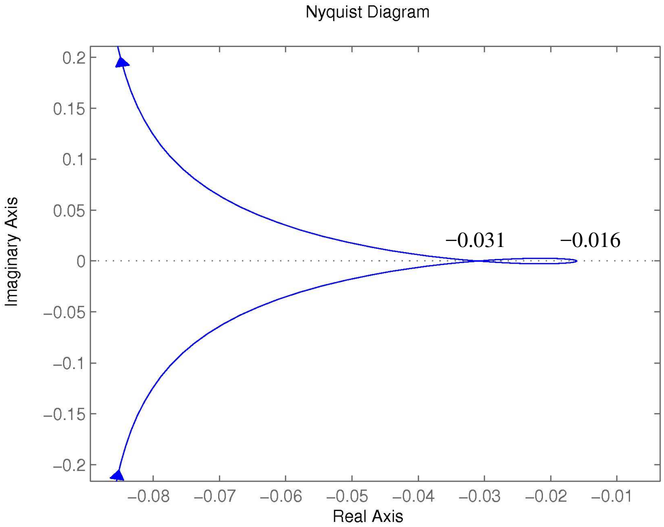
b. Donner les valeurs de K pour lesquelles le système est stable.

c. Donner les valeurs de K pour lesquelles le système est stable si $T = 1$ s.

d. Donner les valeurs de K pour lesquelles le système est stable si l'ordinateur est remplacé par un circuit analogique.

e. La figure suivante donne le lieu de Nyquist de la boucle ouverte pour $T = 0.5s$ et pour $K = 1$ (attention, les demi-cercles infinis ne sont pas tracés).

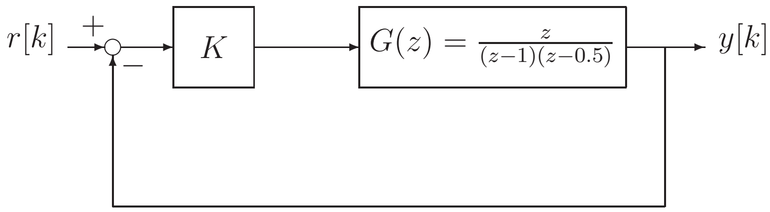
Tracez le contour de Nyquist et donnez les conditions de stabilité de la boucle fermée. Vérifiez la réponse donnée au point b.



f. Combien vaut la marge de gain lorsque $K = 5$?

Lieu des racines et précision

1. Soit le système échantillonné avec boucle d'asservissement suivant :



   a. Tracer le lieu des racines pour $0 \leq K \leq \infty$ et indiquer les valeurs importantes (limites de stabilité, points de séparation, asymptotes, angles de départ ou d'arrivée).

   b. Tracer le lieu de Nyquist du système. Calculer la marge de gain et la marge de phase pour $K = 2$.

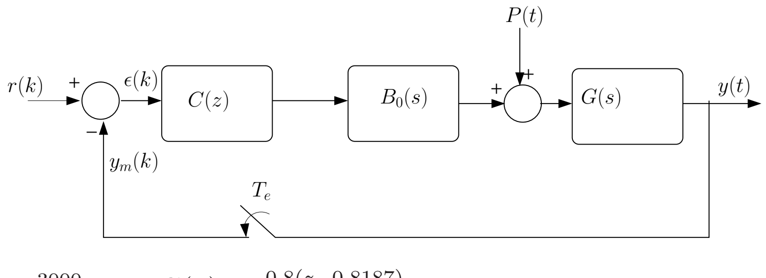
   c. Calculer pour $K = 2$ l'erreur de position, l'erreur de vitesse et l'erreur d'accélération.

2. Tracer le lieu des racines (en indiquant toutes les valeurs importantes) pour les systèmes asservis avec une structure semblable au système de l'ex.1 mais avec les fonctions de transfert suivantes pour le procédé :

$$\text{a.} \qquad G(z) = \frac{10}{z(z-1)(z-0.5)}$$

$$\text{b.} \qquad G(z) = \frac{5z}{(z-1)(z^2-z+0.5)}$$

3. On considère le schéma de la figure suivante :



   avec $G(s) = \frac{3000}{(s+100)(s+20)}$, $C(z) = \frac{0.8(z-0.8187)}{z-1}$ et $T_e = 10ms$.

   a. Déterminez et calculez si besoin l'erreur de position par rapport à la consigne $r(k)$.

   b. On impose une rampe en consigne. Déterminez et calculez si besoin l'erreur en régime permanent.

c. On considère que la perturbation $P(t)$ est un offset introduit par le convertisseur numérique analogique. Déterminez l'erreur par rapport à cette perturbation.

Correction numérique

1. Un système à réguler a une réponse indicielle semblable à celle d'un système du second ordre sous-amorti. Une mesure expérimentale de la réponse à un échelon unité montre que la sortie se stabilise autour de la valeur 3.2 et que, pendant le transitoire, le dépassement maximum est de 30 %, à l'instant $t_1 = 1.2$ s.

   a. Donner une fonction de transfert continue approchée de ce système.

   b. Calculer un correcteur analogique d'ordre 2 maximum permettant de respecter le cahier des charges suivant :
   — les pôles du système en boucle fermée ont un facteur d'amortissement $\zeta = 0.7$
   — erreur statique nulle par rapport à la consigne
   — l'erreur de traînage (vitesse) ≤ 0.1.
   De quel type est ce correcteur ?

   On souhaite asservir ce système par un correcteur numérique :

   c. Choisir une période d'échantillonnage, T, et justifier ce choix.

   Par la suite, pour des raisons techniques la période d'échantillonnage, T, est fixée à $T = 0.02$ s.

   d. Donner l'expression du correcteur numérique s'il est obtenu au moyen de la transformation bilinéaire appliquée au correcteur continu. De quel type est ce correcteur ?

   e. Un filtre anti-repliement (anti-aliasing) est introduit dans la boucle. Où faut-il le placer ? Choisir une fréquence de coupure pour ce filtre et justifier ce choix.

2. Un moteur à courant continu a comme fonction de transfert entre la tension et la vitesse

$$G(s) = \frac{244681}{(s + 297)(s + 880)}$$

On désire le commander avec un correcteur numérique d'ordre inférieur ou égal à 1 et une période d'échantillonnage $T = 0.001$ s.

a. Trouver un correcteur numérique aussi simple que possible et les valeurs des paramètres de ce correcteur telles que
— L'erreur statique par rapport à la consigne est nulle
— La réponse indicielle du système asservi est apériodique.
— Le temps de réponse du système asservi est le plus court possible.

b. Donner les pôles et les zéros du système asservi. Représentez le schéma bloc du système corrigé.

c. Si le correcteur est réalisé sur un PC avec une carte de conversion A/D et D/A, écrire l'algorithme de commande sous forme d'une procédure qui serait appelée à chacun des instants d'échantillonnage en supposant que des fonctions *readAD()* et *writeDA()* sont disponibles pour communiquer avec la carte de conversion A/D et D/A.

Correction numérique (2)

1. On considère un moteur à courant continu. Les diagrammes de Bode du transfert entre tension d'induit et vitesse de rotation sont donnés sur la figure 1.

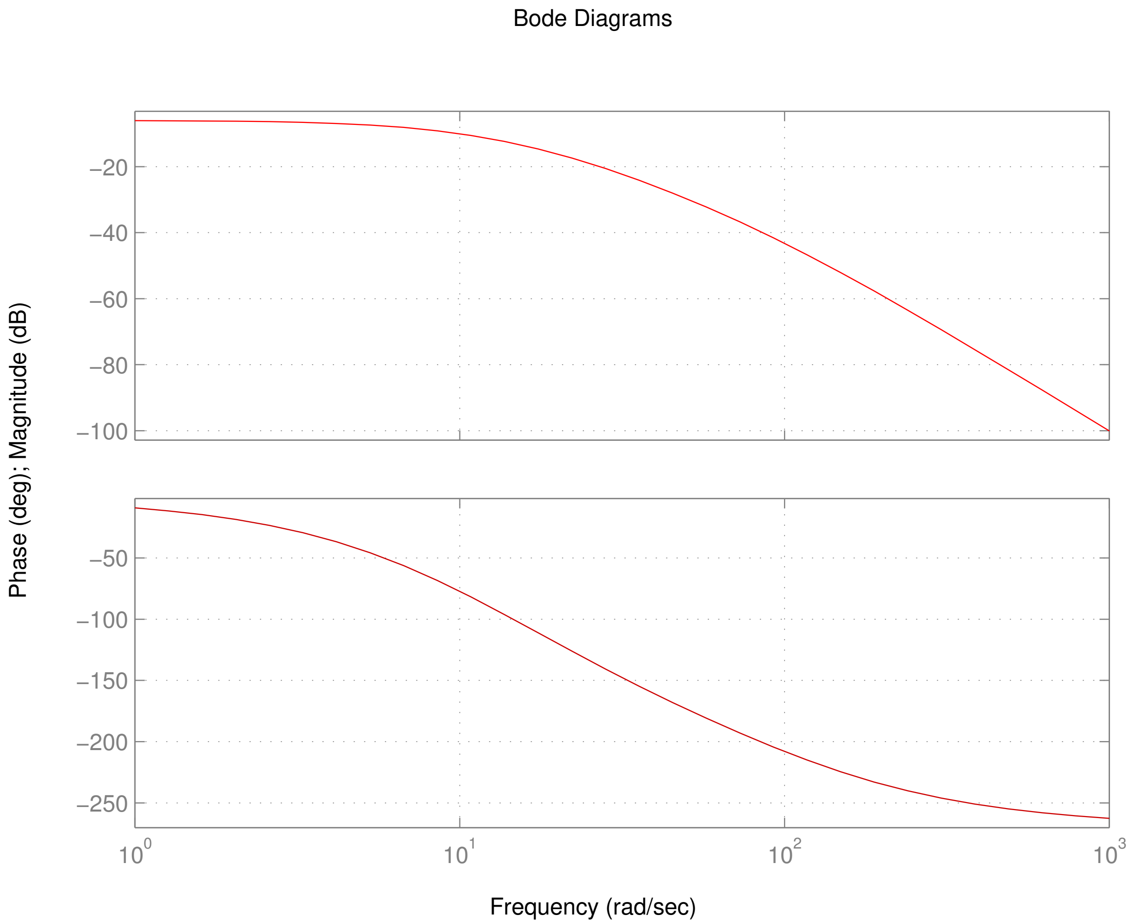


FIGURE 1 – Diagrammes de Bode de la BO

a. On souhaite asservir le moteur en vitesse de sorte à respecter le cahier de charges suivant :
— Erreur statique par rapport à la consigne nulle
— marge de phase de 45^o au moins
— Bande passante supérieure à 10 rad/s
— Rejet de perturbations d'entrée constantes
Déterminez un correcteur analogique aussi simple que possible répondant à ce cahier des charges. Quel est le type de ce correcteur ?

b. On propose d'utiliser le correcteur suivant : $C(s) = \frac{3(s+10)}{s}$. La réponse indicielle théorique de la boucle fermée avec ce correcteur est donnée en figure 2. Déterminez la période d'échantillonnage maximale qui permet de transposer ce correcteur en numérique et d'obtenir une réponse très proche de celle souhaitée. Transposez le correcteur en utilisant la transformation bilinéaire.

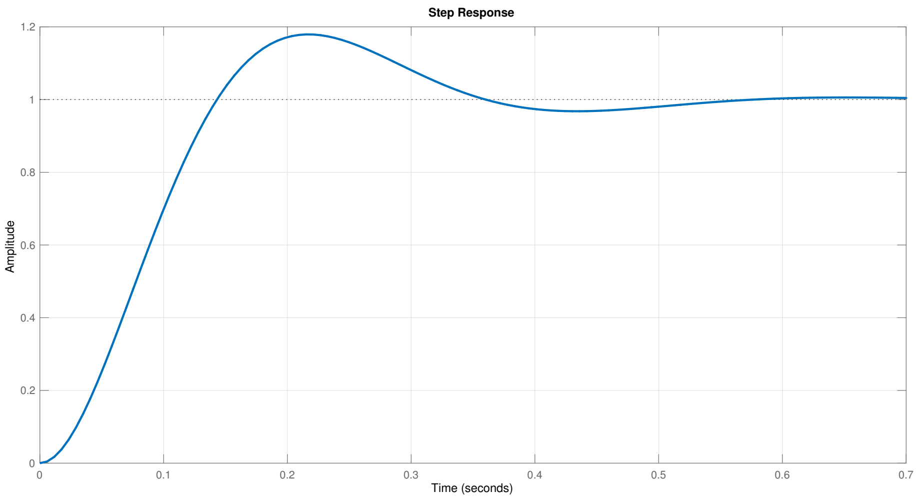


FIGURE 2 – Réponse indicielle de la BF analogique

c.Donnez la loi de commande du correcteur numérique

2. On donne la fonction de transfert d'un système analogique : $G(s) = \frac{10e^{-0.1s}}{(s+5)^2}$.
On souhaite asservir ce système de sorte que :
— les perturbations d'entrée constantes soient rejetées
— la boucle fermée se comporte comme un système du second ordre avec $\zeta = 0.7$.

a. Calculez la fonction de transfert numérique du système précédé d'un CNA pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.1s$.

b. Donnez la forme du dénominateur de la fonction de transfert continue demandée par le cahier des charges. Déduisez-en la forme du dénominateur de la boucle fermée numérique.

c. Proposez un correcteur d'ordre 2 permettant de respecter le cahier des charges. Pour simplifier on commencera par compenser tous les pôles et zéros du procédé pouvant être compensés. Pour régler le gain du correcteur vous

vous servirez de la forme donnée à la question b.

d. Donnez la fonction de transfert de la boucle fermée corrigée

e. Calculez les 5 premiers termes de la commande en réponse à un échelon si le système est initialement au repos. Vous pourrez par exemple résoudre l'équation aux différences pas à pas. Qu'en pensez-vous ?

Correction numérique (3)

1. On considère un moteur brushless commandé par un variateur réalisant une commande vectorielle et entraînant l'axe d'un robot. Globalement, le transfert entre la tension de commande du variateur et la position angulaire de l'axe est donné par :

$$G(s) = \frac{20}{s(s+10)}$$

On souhaite que le système ait le comportement suivant :
— erreur statique nulle,
— dépassement inférieur à 5%,
— temps d'établissement à 5% inférieur à 100 ms,
— erreur de traînage inférieure à 10% de la pente (erreur inférieure à 0.1 pour une rampe de pente unitaire ($r(t) = t\Gamma(t)$).
La période d'échantillonnage est imposée à $T_e = 0.01s$.

a. Proposez et réglez un correcteur aussi simple que possible permettant de respecter ce cahier des charges. La synthèse sera faite directement en numérique. Vous pourrez utiliser le lieu d'Evans donné en figure **??**. Pour simplifier la synthèse, vous effectuerez un pré-réglage du correcteur sans vous préoccuper de la validation quantitative de la dernière contrainte. Vous exprimerez ensuite la condition imposée par la dernière contrainte et vous montrerez qu'on peut effectivement la respecter.

b. Calculez les 3 premières valeurs de la commande pour une consigne d'échelon unitaire (1 rad). Qu'en pensez-vous ? Que faudrait-il faire pour résoudre ce problème ?

c. On ignore le problème de la commande. Expliquez, de façon qualitative et en utilisant le lieu d'Evans, que ce n'est pas une bonne idée de vouloir imposer artificiellement une erreur de traînage nulle.

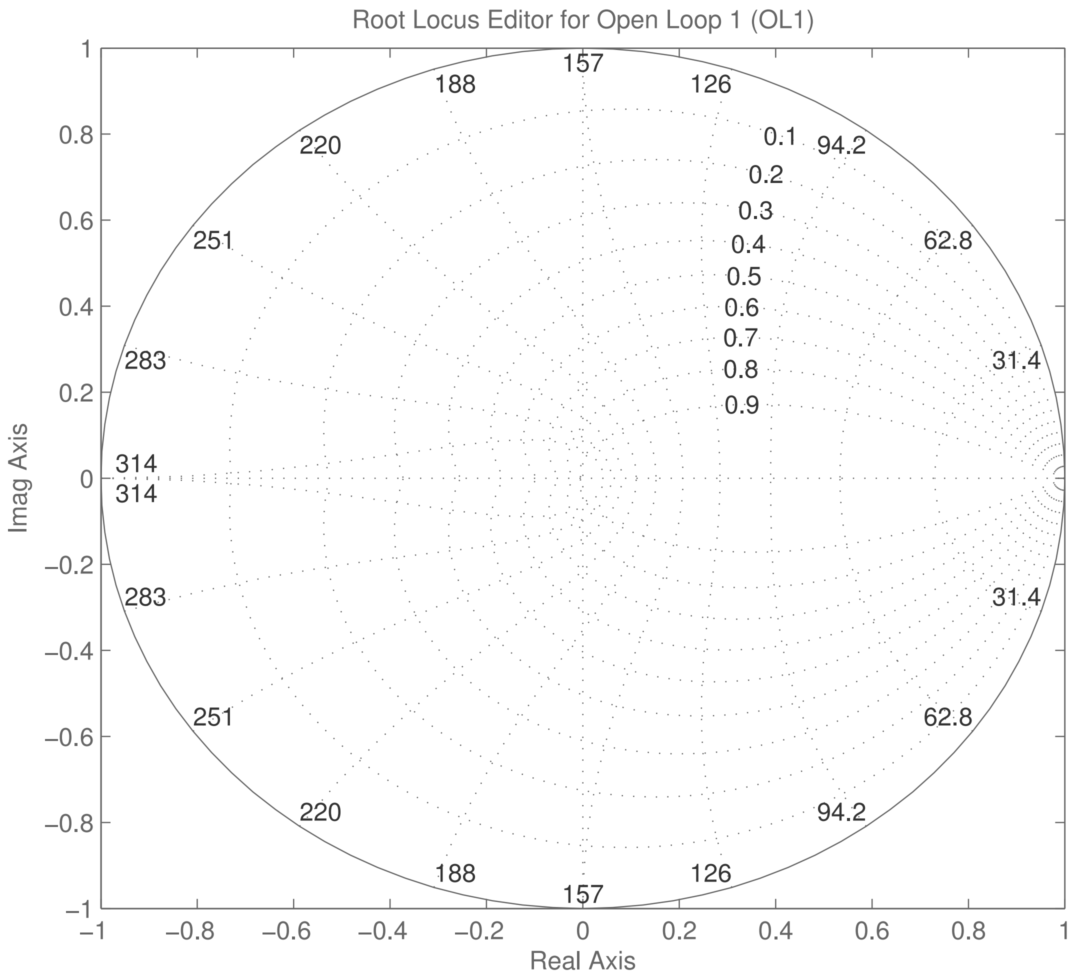
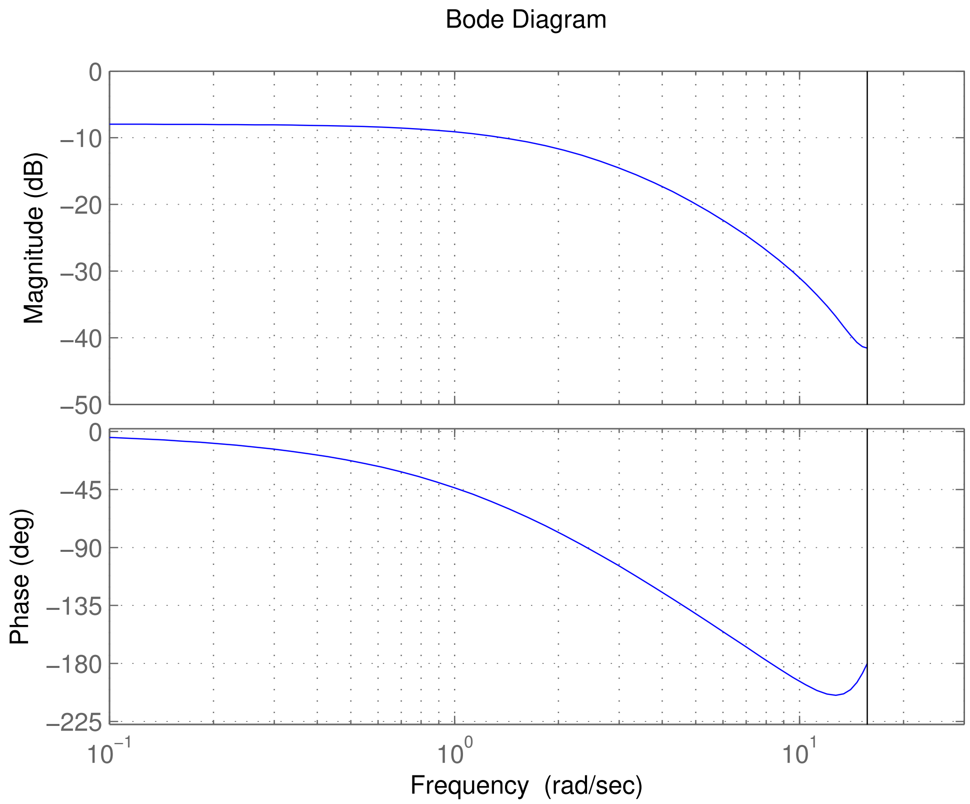


FIGURE 3 – Abaques numériques d'iso-amortissement et d'iso-pulsation pour $T_e =$ 10ms

2. On donne les diagrammes de Bode numériques d'un procédé échantillonné sur la figure suivante :



a. A quel fréquence le système est-il échantillonné ?

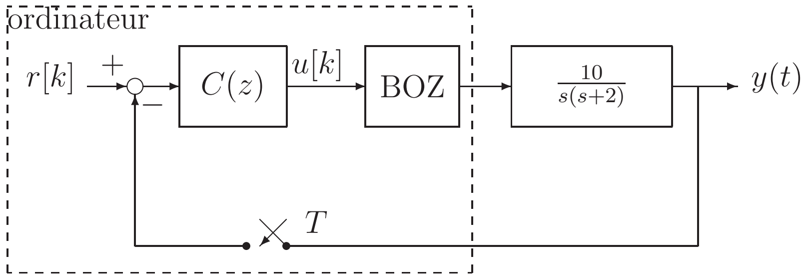
On souhaite asservir ce système de sorte à valider le cahier des charges suivant :
— Erreur statique nulle
— Bande passante supérieure à 2 rad/s
— Marge de phase supérieure ou égale à 60°

b. Choisissez et réglez un correcteur numérique aussi simple que possible permettant de respecter ce cahier des charges.

c. Donnez la loi de commande du correcteur.

Correcteurs à réponse pile

1. Soit le système commandé par ordinateur suivant :



a. Faire la synthèse d'un correcteur à réponse pile pour $r[k] = \Upsilon[k]$ si la période d'échantillonnage $T = 0.1$ s.

b. Calculer $y(kT)$ et $u[k]$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et 4 et déterminer le temps nécessaire à $y(t)$ pour atteindre sa valeur de régime.

c. Montrer qu'il n'y a pas d'oscillations en sortie entre les périodes d'échantillonnage une fois que la valeur de régime est atteinte.

d. Déterminer si ce correcteur donne aussi une réponse pile pour $r[k] = k\Upsilon[k]$.

e. Déterminer s'il est possible d'obtenir un correcteur à temps de réponse fini plus rapide si la réponse pour $r[k] = \Upsilon[k]$ n'est pile qu'aux instants d'échantillonnage. Si c'est le cas, calculer ce correcteur à temps de réponse minimal. Calculer également $y(kT)$, et $u[k]$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et 4.

f. Refaire la synthèse d'un correcteur à réponse pile pour $r[k] = \Upsilon[k]$ si la période d'échantillonnage $T = 0.01$ s. Calculer $y(kT)$ et $u[k]$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et 4. Tirer des conclusions des résultats obtenus.