

# Commande des Machines

MASTER INGÉNIERIE ET TECHNOLOGIES  
INSTITUT PROFESSIONNEL DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR DE STRASBOURG

Edouard Laroche  
laroche@lsiit.u-strasbg.fr  
<http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/Student>

2008–2009



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Notion de système . . . . .	7
1.2	Propriétés des systèmes . . . . .	7
1.3	Systèmes élémentaires . . . . .	8
1.3.1	Système du premier ordre . . . . .	8
1.3.2	Système du deuxième ordre . . . . .	9
1.4	Objectif de l'asservissement . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Modélisation</b>	<b>15</b>
2.1	Transformée de Laplace, fonctions de transfert . . . . .	15
2.1.1	Transformée de Laplace . . . . .	15
2.1.2	Fonction de transfert . . . . .	17
2.2	Propriétés des systèmes dynamiques . . . . .	20
2.2.1	Stabilité . . . . .	20
2.2.2	Gain . . . . .	23
2.2.3	Dépassement . . . . .	23
2.2.4	Rapidité . . . . .	24
2.3	Analyse fréquentielle . . . . .	27
2.3.1	Régime harmonique . . . . .	27
2.3.2	Diagramme de Nyquist . . . . .	28
2.3.3	Diagramme de Bode . . . . .	28
2.3.4	Diagramme de Black . . . . .	31
2.3.5	Étude du second ordre . . . . .	31
2.4	Représentation d'état . . . . .	32
2.4.1	Introduction . . . . .	32
2.4.2	Équivalence avec la fonction de transfert . . . . .	34
2.4.3	Propriétés . . . . .	34
2.5	Identification . . . . .	36

2.5.1	Approche temporelle . . . . .	36
2.5.2	Système du premier ordre . . . . .	36
2.5.3	Système du second ordre résonant . . . . .	37
2.5.4	Méthode de Strejc . . . . .	37
2.5.5	Approche fréquentielle . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Asservissements analogiques</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction aux asservissements . . . . .	43
3.1.1	Principe . . . . .	43
3.1.2	Boucle ouverte ou boucle fermée? . . . . .	44
3.1.3	Principes généraux sur la synthèse de correcteurs en boucle fermée (feedback) . . . . .	45
3.1.4	Exemple introductif . . . . .	47
3.2	Analyse des systèmes asservis . . . . .	55
3.2.1	Stabilité . . . . .	55
3.2.2	Rapidité . . . . .	56
3.2.3	Précision . . . . .	57
3.2.4	Dépassement . . . . .	57
3.2.5	Rejet de perturbation . . . . .	58
3.3	Méthodes de synthèse . . . . .	58
3.3.1	Les différentes démarches . . . . .	58
3.3.2	Correcteur proportionnel (P) . . . . .	59
3.3.3	Correcteur proportionnel intégral (PI) . . . . .	60
3.3.4	Correcteur proportionnel dérivé (PD) . . . . .	64
3.3.5	Correcteur PID . . . . .	65
3.3.6	Correcteur à avance de phase . . . . .	65
3.3.7	Correcteur à retard de phase . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Asservissements numériques</b>	<b>67</b>
4.1	Modélisation des systèmes échantillonnés . . . . .	67
4.1.1	Transformée en $Z$ . . . . .	67
4.1.2	Fonction de transfert . . . . .	68
4.1.3	Propriétés des systèmes à temps discret . . . . .	70
4.1.4	Systèmes continus échantillonnés . . . . .	71
4.1.5	Lieu des pôles . . . . .	72
4.2	Correcteur discret équivalent . . . . .	73
4.3	Synthèses directes . . . . .	77

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
<b>A Décomposition en éléments simples</b>	<b>81</b>
<b>Bibliographie</b>	
<b>Examens corrigés</b>	



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Notion de système

Considérons un système sur lequel on mesure le signal  $y(t)$  appelé *signal de mesure* et sur lequel on peut fixer arbitrairement le signal  $u(t)$  appelé *signal de commande*. Dans le cas présent, les signaux sont à *temps continu*. Il existe également des systèmes à temps discret faisant intervenir les signaux échantillonnés  $u_k = u(kT_e)$  et  $y_k = y(kT_e)$  où  $T_e$  est la période d'échantillonnage.

Les systèmes à temps continu sont modélisés par une équation différentielle liant  $u(t)$  et  $y(t)$  alors que les systèmes à temps discret sont modélisés par une équation aux récurrences de la forme  $y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, u_k, u_{k-1}, \dots)$ .

### 1.2 Propriétés des systèmes

Considérons dans un premier temps que l'entrée  $u(t)$  est constante.

#### **Définition 1 (Point d'équilibre)**

*Le système est dans un état d'équilibre si, placé dans cet état, il ne quitte pas.*

La valeur du signal de mesure est alors constante.

#### **Définition 2 (Stabilité)**

*Un état d'équilibre est stable si, lorsqu'on éloigne le système de cet état, il finit par y revenir. Dans le cas contraire, le point d'équilibre est instable.*

Dans certain cas, cette propriété de stabilité n'est valable que si l'éloignement est faible; on parle alors de *stabilité locale*. Si au contraire le système retourne dans son état d'équilibre quelque soit l'amplitude de la perturbation, on parle alors de *stabilité globale*.

### Propriété 1 (Stabilité d'un système)

*Un équilibre globalement stable est unique. On dit alors que le système est stable.*

Si le système avait deux équilibres globaux, vers lequel irait il si on le déplaçait de l'un des points d'équilibre ?

### Propriété 2 (Linéarité)

*Un système est linéaire s'il vérifie les conditions de linéarité suivantes. Soit  $y_1(t)$  la trajectoire de la sortie pour une commande  $u_1(t)$ ; soit  $y_2(t)$  la trajectoire de la sortie pour une commande  $u_2(t)$ ; soit  $y_3(t)$  la trajectoire de la sortie pour une commande  $u_3(t) = \lambda u_1(t)$  et soit  $y_4(t)$  la trajectoire de la sortie pour une commande  $u_4(t) = u_1(t) + u_2(t)$ . Les conditions de linéarité sont :*

$$y_3(t) = \lambda y_1(t) \quad (1.1)$$

$$y_4(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (1.2)$$

## 1.3 Systèmes élémentaires

### 1.3.1 Système du premier ordre

Soit un système du premier ordre régi par une équation différentielle de la forme

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = K u(t) \quad (1.3)$$

La réponse à un échelon  $u(t)$  à partir d'une condition initiale nulle est :

$$y(t) = K(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (1.4)$$

Il s'agit d'une exponentielle partant de 0 à  $t = 0$  et se stabilisant à  $y(t) = K$ . Son dépassement est nul; le temps de montée à 5 % est égal à  $3\tau$  ( $\ln(0.05) \cong -3, 0$ ).

### 1.3.2 Système du deuxième ordre

Soit un système du deuxième ordre régi par une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 K u(t) \quad (1.5)$$

où  $\omega_0$  (rad/s) est appelée pulsation propre,  $\xi$  (sans unité) est appelé amortissement et  $K$  (unités  $[y]/[u]$  dépendant des unités de  $u$  et de  $y$ ) est le gain statique. L'équation associée s'écrit :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad (1.6)$$

Le discriminant réduit s'écrit :

$$\tilde{\Delta} = (\xi\omega_0)^2 - \omega_0^2 = (\xi^2 - 1)\omega_0^2 \quad (1.7)$$

Les racines de (1.6) sont alors réelles si  $\tilde{\Delta} \geq 0$ , c'est-à-dire si  $\xi \geq 1$ ; elles sont imaginaires dans le cas contraire.

#### Deuxième ordre amorti

Dans le cas où les racines sont réelles et s'écrivent :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0, \quad (1.8)$$

$$r_2 = -\xi\omega_0 - \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0, \quad (1.9)$$

la solution générale de l'équation sans second membre s'écrit alors :

$$y_1(t) = \lambda \exp(r_1 t) + \mu \exp(r_2 t) \quad (1.10)$$

Notons que  $r_1$  et  $r_2$  sont toutes deux négatives; l'exponentielle tend donc vers zéro.

Une solution particulière constante de l'équation sans second membre peut être facilement trouvée :

$$y_0(t) = K \quad (1.11)$$

En additionnant la solution particulière et l'équation générale de l'équation sans second membre, on obtient la solution générale de l'équation complète :

$$y(t) = \lambda \exp(r_1 t) + \mu \exp(r_2 t) + K \quad (1.12)$$

Cherchons maintenant la solution vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = 0 \quad (1.13)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad (1.14)$$

La dérivée de la solution s'écrit :

$$\dot{y}(t) = \lambda r_1 \exp(r_1 t) + \mu r_2 \exp(r_2 t) \quad (1.15)$$

Les C.I. s'écrivent alors :

$$\lambda + \mu + K = 0 \quad (1.16)$$

$$\lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \quad (1.17)$$

Dont les solutions sont :

$$\lambda = \frac{K r_2}{r_1 - r_2} \quad (1.18)$$

$$\mu = -\frac{K r_1}{r_1 - r_2} \quad (1.19)$$

La solution s'écrit alors :

$$y(t) = K \left( 1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} \exp(r_1 t) - \frac{r_1}{r_1 - r_2} \exp(r_2 t) \right) \quad (1.20)$$

Sa dérivée est :

$$\dot{y}(t) = \frac{K r_1 r_2}{r_1 - r_2} (\exp(r_1 t) - \exp(r_2 t)) \quad (1.21)$$

Puisque l'on a  $r_2 \leq r_1 \leq 0$ , on a aussi  $\exp(r_1 t) - \exp(r_2 t) \geq 0$  pour  $t \geq 0$  et  $\dot{y}(t)$  est alors positive pour  $t \geq 0$ , ce qui signifie que  $y(t)$  est croissante. La réponse à un échelon est donc une courbe croissante qui se stabilise à la valeur  $K$ . Cette courbe a un point d'inflexion pour  $\ddot{y}(t_i) = 0$ . Avec :

$$\ddot{y}(t) = \frac{K r_1 r_2}{r_1 - r_2} (r_1 \exp(r_1 t) - r_2 \exp(r_2 t)), \quad (1.22)$$

on observe que la dérivée seconde n'annule en  $t_i$  vérifiant :

$$r_1 \exp(r_1 t) - r_2 \exp(r_2 t), \quad (1.23)$$

soit

$$t_i = \frac{1}{r_1 - r_2} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.24)$$

**Deuxième ordre oscillant**

Dans le cas où les racines sont complexes conjuguées et s'écrivent :

$$r_1 = -a + j\omega_1, \quad (1.25)$$

$$r_2 = -a - j\omega_1, \quad (1.26)$$

avec

$$a = \xi\omega_0 \quad (1.27)$$

$$\omega_1 = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0, \quad (1.28)$$

où  $\omega_1$  est la pseudo-pulsation de la réponse, liée à la période des oscillations  $T_c = \frac{2\pi}{\omega_1}$ . La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit alors :

$$y_1(t) = \exp(-at) (\lambda \cos(\omega_1 t) + \mu \sin(\omega_1 t)) \quad (1.29)$$

Notons que  $a$  est positif; l'exponentielle tend donc vers zéro.

Une solution particulière constante s'écrit  $y_0(t) = K$ . La solution générale de l'équation est donc :

$$y(t) = K + \exp(-at) (\lambda \cos(\omega_1 t) + \mu \sin(\omega_1 t)) \quad (1.30)$$

Reste à déterminer les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  d'après les conditions initiales (1.13-1.14). On a :

$$\dot{y}(t) = -a \exp(-at) (\lambda \cos(\omega_1 t) + \mu \sin(\omega_1 t)) \quad (1.31)$$

$$+ \omega_1 \exp(-at) (-\lambda \sin(\omega_1 t) + \mu \cos(\omega_1 t)) \quad (1.32)$$

$$= \exp(-at) ((-a\lambda + \omega_1\mu) \cos(\omega_1 t) - (\omega_1\lambda + a\mu) \sin(\omega_1 t)) \quad (1.33)$$

Les conditions initiales s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} y(0) &= K + \lambda = 0 \\ \dot{y}(0) &= -a\lambda + \omega_1\mu = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

ce qui donne :

$$\lambda = -K \quad (1.35)$$

$$\mu = -K \frac{a}{\omega_1} \quad (1.36)$$

ce qui donne comme solution finale :

$$y(t) = K \left( 1 - \exp(-at) \left( \cos(\omega_1 t) + \frac{a}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) \right) \quad (1.37)$$

La vitesse s'écrit alors :

$$\dot{y}(t) = K \frac{a^2 + \omega_1^2}{\omega_1} \exp(-at) \sin(\omega_1 t) \quad (1.38)$$

Elle est du signe du terme  $\sin(\omega_1 t)$ . Elle est d'abord positive de  $t = 0$  à  $t_1 = \frac{\pi}{\omega_1}$  puis négative de  $t_1$  à  $\frac{2\pi}{\omega_1}$ . Le signal atteint donc un maximum à  $t_1$  en :

$$y(t_1) = K \left( 1 + \exp \left( \frac{-\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \right) \quad (1.39)$$

soit un dépassement relatif  $(y(t_1) - y(\infty))/(y(\infty) - y(0))$  de :

$$D = \exp \left( \frac{-\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \quad (1.40)$$

## 1.4 Objectif de l'asservissement

Un système dynamique peut être caractérisé par différentes qualités : sa rapidité, le fait d'être plus ou moins amorti. Le but de l'asservissement est de contraindre le système à se comporter d'une manière particulière. Il n'est pas possible physiquement d'obtenir d'un système qu'il réponde de manière instantanée. On peut cependant le contraindre à répondre plus rapidement. On peut aussi limiter son dépassement.

Dans le choix de la *loi de commande*, il faudra également s'assurer que le système asservi possède un niveau de *robustesse* suffisant. Par robustesse, on entend la capacité à garder certaines propriétés malgré des variations de l'environnement. Typiquement, en automatique, le comportement du système est connu avec une précision limitée ; de plus, son comportement peut évoluer en fonction de condition extérieure ou de son vieillissement. Il importe que les performances du système asservi ne se dégradent pas trop en présence de ces variations de comportement.

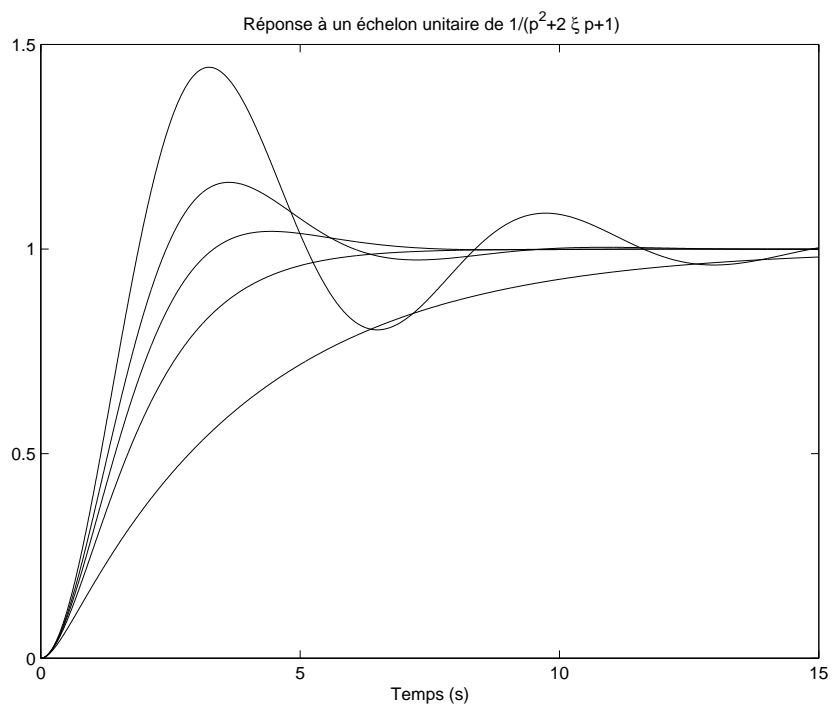


FIG. 1.1 – Réponse temporelle de systèmes du second ordre ( $\xi = 0.25, 0.5, 0.707, 1$  et  $2$ )



# Chapitre 2

## Modélisation

Dans cette partie, on s'intéresse à la détermination de modèles mathématique pour des systèmes linéaires stationnaires (on parle aussi de systèmes linéaire à temps invariant, notés LTI en anglais). Les modèles peuvent être abordés sous trois formes à peu près équivalentes : l'équation différentielle, la fonction de transfert et le modèle d'état.

### 2.1 Transformée de Laplace, fonctions de transfert

#### 2.1.1 Transformée de Laplace

##### Définition

Pour un signal à temps continu  $x(t)$ , on définit sa transformée de Laplace par le signal  $X(s)$  où  $s$  est appelée variable de Laplace<sup>1</sup>, avec :

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-st) dt \quad (2.1)$$

A partir de  $X(s)$ , on revient au signal de départ par une transformée de Laplace inverse :

$$x(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{s=-j\infty}^{j\infty} X(s) \exp(st) ds \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>La variable de Laplace est notés  $s$  ou  $p$  suivant les conventions.

$h(t)$	$H(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t - T)$	$\frac{\exp(-Ts)}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$(1 - \exp(-at))u(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sinh(at)u(t)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh(at)u(t)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\exp(-at) \sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\exp(-at) \cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

TAB. 2.1 – Exemples de transformées de Laplace élémentaires ( $u(t)$  est l'échelon unitaire et  $\delta(t)$  l'impulsion de Dirac)

En considérant que  $s = j\omega$  où  $\omega$  est la pulsation, on peut considérer que la transformée de Laplace est une généralisation de la transformée de Fourier. Il s'agit en tous cas d'une transformée temps/fréquence qui à un signal temporel fait correspondre une représentation fréquentielle. Nous verrons par la suite la puissance de cet outil qui permet de simplifier grandement les calculs.

On peut facilement trouver des abaques des transformées de Laplace usuelles. Contentons nous pour l'instant de mentionner l'échelon unitaire  $u(t)$  qui a comme transformée  $\frac{1}{s}$  et le dirac  $\delta(t)$  qui a comme transformée 1.

**Propriétés****Propriété 3 (Linéarité)**

La transformée de Laplace est une transformation linéaire.

**Propriété 4 (Transformée de Laplace d'un signal dérivé)**

Soit  $y(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ . La transformée de Laplace de  $y(t)$  est  $Y(s) = sX(s) - x(0)$

**2.1.2 Fonction de transfert**

Soit un système dynamique à temps continu de signal d'entrée  $u(t)$  et de signal de sortie  $y(t)$ , tous deux liés par une équation différentielle ordinaire linéaire :

$$\begin{aligned} a_n y^{[n]}(t) + a_{n-1} y^{[n-1]}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \\ = b_m u^{[m]}(t) + b_{m-1} y^{[m-1]}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

En passant dans le domaine fréquentiel et en supposant que les conditions initiales sont nulles, on obtient, grâce à la propriété 4 :

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) \\ = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ce qui s'écrit sous la forme :

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (2.5)$$

où  $H(s)$  est la fonction de transfert du système et s'écrit :

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.6)$$

La fonction de transfert est une fonction rationnelle ; elle est composée d'un numérateur de degré  $m$  et d'un dénominateur de degré  $n$ . On dit aussi que le système est d'ordre  $n$ .

**Définition 3 (Système propre)**

On dit qu'un système est propre si le degré de son numérateur est inférieur à celui de son dénominateur ( $m \leq n$ ).

On dit qu'un système est strictement propre si le degré de son numérateur est strictement inférieur à celui de son dénominateur ( $m < n$ ).

**Propriété 5 (Fonction de transfert)**

La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.

Cette propriété découle du fait que la transformée de Laplace du signal impulsionnel est 1.

**Propriété 6 (Transformée de Laplace d'un signal retardé)**

La transformée de Laplace de  $y(t - T)$  est  $\exp(-Ts)Y(s)$

**Exercice 1 (Transformée de Laplace)**

Calculez la réponse à un échelon des systèmes suivants :

$$1. \quad \frac{1}{s} \quad (2.7)$$

$$2. \quad \frac{1}{s + a} \quad (2.8)$$

$$3. \quad \frac{K}{(s + a)(s + b)} \quad (2.9)$$

$$4. \quad \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.10)$$

**Correction 1**

4. Compte-tenu d'une entrée en échelon, soit  $U(s) = 1/s$ , la sortie s'écrit :

$$Y(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \quad (2.11)$$

On peut décomposer en éléments simples sous la forme :

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + D}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.12)$$

En développant cette dernière expression, on obtient :

$$Y(s) = \frac{(A + B)s^2 + (2\xi\omega_0 A + D)s + \omega_0^2 A}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \quad (2.13)$$

## 2.1. TRANSFORMÉE DE LAPLACE, FONCTIONS DE TRANSFERT 19

En identifiant les deux expressions de  $Y(s)$ , on obtient le système d'équations suivant :

$$A + B = 0 \quad (2.14)$$

$$2\xi\omega_0 A + D = 0 \quad (2.15)$$

$$\omega_0^2 A = K\omega_0^2 \quad (2.16)$$

qui se résout en :

$$A = K \quad (2.17)$$

$$D = -2K\xi\omega_0 \quad (2.18)$$

$$B = -K \quad (2.19)$$

Il nous faut maintenant déterminer la transformée de Laplace inverse de  $Y(s)$  à partir des tables dont nous disposons. Le dénominateur peut se récrire :

$$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = (s + \xi\omega_0)^2 - (\xi\omega_0)^2 - \omega_0^2 \quad (2.20)$$

$$= (s + a)^2 \omega^2 \quad (2.21)$$

avec  $a = \xi\omega_0$  et  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ . On a alors :

$$\frac{Bs + D}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{Bs + D}{(s + a)^2 \omega^2} \quad (2.22)$$

$$= \frac{B(s + a) + D - Ba}{(s + a)^2 \omega^2} \quad (2.23)$$

$$= B \frac{s + a}{(s + a)^2 \omega^2} + \frac{D - Ba}{\omega} \frac{\omega}{(s + a)^2 \omega^2} \quad (2.24)$$

Cette dernière forme permet d'utiliser les formules de transformées de Laplace, ce qui donne :

$$y(t) = Au(t) + B \exp(-at) \cos(\omega t) u(t) + \frac{D - Ba}{\omega} \exp(-at) \sin(\omega t) u(t)$$

$$= K(1 - \exp(-at)) \left( \cos(\omega t) + \frac{\xi\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) \right) u(t) \quad (2.25)$$

$$= K \left( 1 - \exp(-at) \left( \cos(\omega t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega t) \right) \right) u(t) \quad (2.26)$$

Remarque : on retrouve bien la même expression que ce que l'on a obtenu en intégrant l'équation différentielle (1.37).

**Exercice 2 (Fonctions de transfert d'un moteur à courant continu)**

On donne les équations d'un moteur à courant continu à aimants permanents :

- équation de la tension  $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t) = u(t)$ ,
- équation de la vitesse  $J\frac{d\Omega(t)}{dt} = c(t) - f\Omega(t)$

où le couple s'écrit  $c(t) = Ki(t)$  et la force électromotrice est  $e(t) = K\Omega(t)$ ;  $R$  est la résistance de l'induit,  $L$  sont inductance;  $K$  est la constante de couple et de force électromotrice;  $J$  est l'inertie;  $f$  est le coefficient de frottements.

1. On considère que l'entrée est la tension et la sortie est la vitesse; donnez la fonction de transfert du système.
2. On considère que l'entrée est la tension et la sortie est le courant; donnez la fonction de transfert du système.

**2.2 Propriétés des systèmes dynamiques****2.2.1 Stabilité****Définition 4 (Pôle et racines)**

On appelle pôles d'un système les racines de son dénominateur.

On appelle zéros d'un système les racines de son numérateur.

Les racines d'un système du second ordre de fonction de transfert  $H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$  sont, pour  $\xi < 1$ ,  $p_k = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ . Elles sont représentées dans le plan complexe sur la figure 2.1. Elles ont un module de  $\omega_0$ , une partie réelle de  $-\xi\omega_0$  et font un angle  $\phi$  avec l'axe réel tel que  $\cos(\phi) = \xi$ .

**Propriété 7 (Stabilité)**

Un système est stable si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.

Pour s'en convaincre, on peut considérer la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert d'un système. Prenons un exemple :

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (2.27)$$

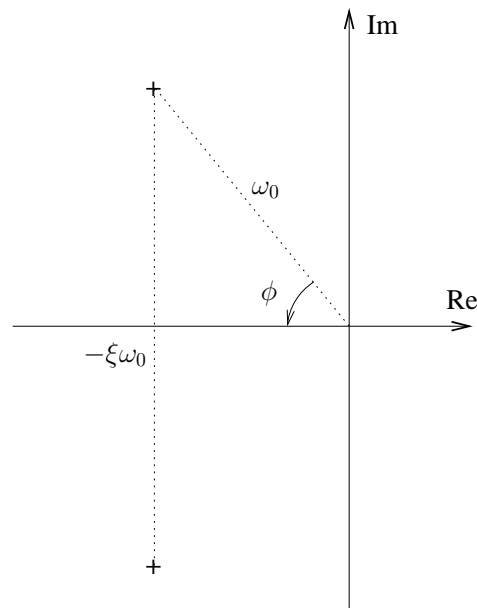


FIG. 2.1 – Poles d'un second ordre de dénominateur  $s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2$

Décomposée en éléments simples, cette fonction se réécrit sous la forme :

$$H(s) = \frac{\lambda_1}{(s - p_1)} + \frac{\lambda_2}{(s - p_2)} + K \quad (2.28)$$

Et la réponse à un échelon unitaire à partir d'une condition initiale nulle est :

$$y(t) = \lambda_1 \exp(p_1 t) + \lambda_2 \exp(p_2 t) + K \quad (2.29)$$

Pour que le système soit stable et que  $y(t)$  ne diverge pas, il faut que l'on ait  $p_1 < 0$  et  $p_2 < 0$ . Pour des pôles complexes, la condition porte sur les parties réelles.

Le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer si les pôles d'une fonction de transfert sont tous à partie réelle sans les calculer. Considérons un système dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.30)$$

avec  $D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$ . On construit alors un tableau de coefficients comportant  $n+1$  lignes (voir tableau 2.2). Les deux premières lignes sont con-

$n$	$c_1^n = a_n$	$c_2^n = a_{n-2}$	$c_3^n = a_{n-4}$	$\cdots$	$0$
$n-1$	$c_1^{n-1} = a_{n-1}$	$c_2^{n-1} = a_{n-3}$	$c_3^{n-1} = a_{n-5}$	$\cdots$	$0$
$n-2$	$c_1^{n-2}$	$c_2^{n-2}$	$c_3^{n-2}$	$\cdots$	$0$
$n-3$	$c_1^{n-3}$	$c_2^{n-3}$	$c_3^{n-3}$	$\cdots$	$0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$0$
$1$	$c_1^1$	$c_2^1$	$0$		
$0$	$c_1^0$	$0$			

TAB. 2.2 – Tableau de Routh-Hurwitz

stituées des coefficients du dénominateur ; les autres lignes sont déterminées à partir des lignes précédentes de la manière suivante :

$$c_l^k = \frac{-1}{c_1^{k-1}} \begin{vmatrix} c_1^{k-2} & c_{l+1}^{k-2} \\ c_1^{k-1} & c_{l+1}^{k-1} \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

par exemple, pour un système d'ordre  $n = 5$ , on obtient le tableau 2.3 avec  $c_1^3 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_4}$ ,  $c_2^3 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_4}$ ,  $c_3^3 = 0$ ,  $c_1^2 = \frac{a_2 c_1^3 - a_4 c_3^3}{c_1^3}$ ,  $c_2^2 = a_0$ ,  $c_3^2 = 0$ ,  $c_1^1 = \frac{c_1^2 c_2^3 - a_0 c_1^3}{c_2^3}$ ,  $c_2^1 = 0$ ,  $c_1^0 = a_0$ .

### Théorème 1 (Critère de Routh-Hurwitz)

Le système est stable si et seulement si tous les coefficients de la première colonne du tableau de Routh-Hurwitz sont de même signe

### Exercice 3 (Critère de Routh-Hurwitz)

1. Déterminez la stabilité de :

$$H(s) = \frac{s + 0.5}{s^3 + 2s^2 + s + 5} \quad (2.32)$$

2. Déterminez la stabilité de :

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 2s + 1} \quad (2.33)$$

3. Déterminez pour quelles valeurs de  $K$  le système :

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 4s + K} \quad (2.34)$$

est stable.

5	$a_5$	$a_3$	$a_1$	0
4	$a_4$	$a_2$	$a_0$	0
3	$c_1^3$	$c_2^3$	$c_3^3$	0
2	$c_1^2$	$c_2^2$	$c_3^2$	0
1	$c_1^1$	$c_2^1$	0	
0	$c_1^0$	0		

TAB. 2.3 – Exemple de tableau de Routh-Hurwitz pour un systèmes d'ordre 5

### 2.2.2 Gain

#### Définition 5 (Gain statique)

On appelle gain statique d'un système son amplification en régime continu.

Pour des signaux constants, les dérivées sont nulles et l'équation (2.3) se simplifie en :

$$a_0 y = b_0 u \quad (2.35)$$

Ainsi, une variation  $\Delta_u$  de l'entrée se répercute sur la sortie par une variation  $\Delta_y = \frac{b_0}{a_0} \Delta_u$ . Le gain statique est donc  $\frac{b_0}{a_0}$ .

#### Propriété 8 (Gain statique)

Le gain statique d'un système de fonction de transfert  $H(s)$  est  $H(0)$ .

### 2.2.3 Dépassement

En réponse à un échelon d'amplitude  $\Delta_u = u(\infty) - u(0)$ , la sortie d'un système varie de  $\Delta_y = y(\infty) - y(0)$  de différentes manières.

- Le type de réponse le plus simple est celui d'une réponse toujours croissante (ou décroissante si le gain est négatif).
- De nombreux systèmes présentent un dépassement ; c'est-à-dire que la réponse présente un maximum  $y_{\max}$  supérieur à la valeur finale.
- Certains systèmes, plus rares, voient leur sortie décroître avant de croître vers la valeur finale. On parle de système à *non minimal de phase* ; ce sont des systèmes qui comportent des zéros à partie réelle positive.

On exprime le dépassement, en pourcentage, d'un système linéaire de la manière suivante :

$$D_{\%} = 100 \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty) - y(0)} \quad (2.36)$$

Pour un système du second ordre de fonction de transfert  $H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$ , le dépassement est égal à<sup>2</sup> :

$$D_{\%} = 100 \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad (2.37)$$

#### Exercice 4 (Dépassement d'un système du second ordre)

A partir de l'expression 1.37 de la réponse d'un système du second ordre résonant, déterminez le dépassement (en pourcentage) de la réponse d'un système du second ordre en fonction de son amortissement. Représentez graphiquement cette fonction.

### 2.2.4 Rapidité

#### Définition 6 (Temps d'établissement)

On appelle temps d'établissement<sup>3</sup> le temps que met la sortie d'un système stable à atteindre son équilibre, à partir d'une variation de l'entrée en échelon.

On utilise généralement la notion de temps d'établissement à 5 % pour éviter deux types de problèmes :

- un système dynamique rejoint généralement son équilibre de manière exponentielle et met donc en théorie un temps infini à se stabiliser ;
- les mesures sont généralement entachées de bruit ; la sortie  $y(t)$  ne se stabilise donc jamais complètement.

Considérons le système en réponse à un échelon  $u(t)$  à  $t = 0$ . La sortie étant en stabilisée à  $y(0)$  pour  $t < 0$ , elle se met à varier à partir de  $t = 0$  et évolue jusqu'à se stabiliser à  $y(\infty)$ . Le temps d'établissement à 5 % est le temps  $t_1$  tel que pour  $t > t_1$ , on a :

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \frac{5}{100} |y(\infty) - y(0)|. \quad (2.38)$$

<sup>2</sup>Voir l'étude du système du second ordre dans au premier chapitre.

<sup>3</sup>On utilise également le terme de *temps de réponse* bien que ce terme soit plus approprié dans le cas d'un système asservi.

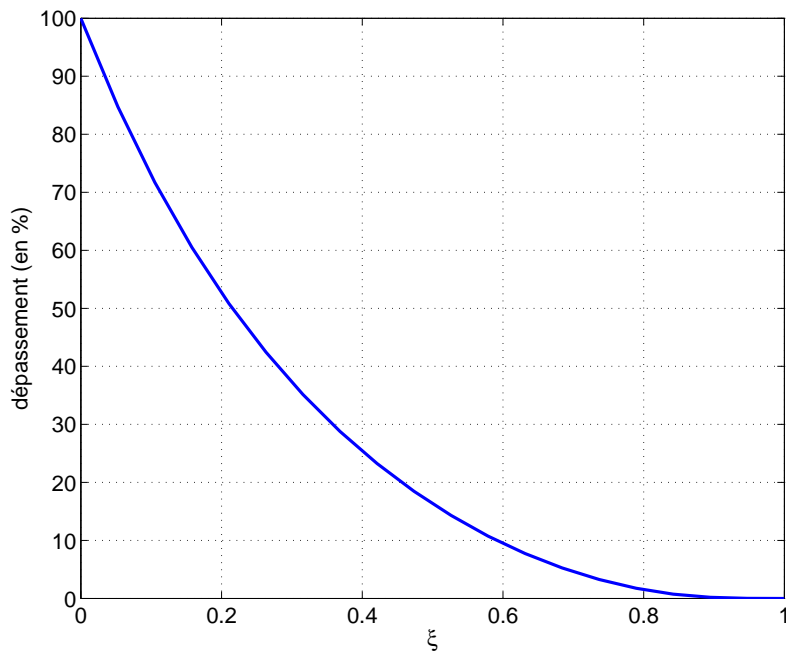


FIG. 2.2 – Dépassement d'un système du second ordre en fonction de l'amortissement

**Exercice 5 (Temps d'établissement de systèmes du premier ordre)**

Calculez de manière exacte le temps d'établissement à 5 % des systèmes suivants :

1.  $H(s) = \frac{b}{s+a}$ ,
2.  $H(s) = K \frac{s+b}{s+a}$ ,

**Propriété 9 (Temps d'établissement d'un système d'ordre un)**

Le temps d'établissement d'un système du premier ordre est égal à trois fois sa constante de temps.

**Propriété 10 (Temps d'établissement d'un système dynamique)**

Le temps d'établissement d'un système dynamique est approximativement égal à trois fois sa constante de temps la plus lente.

Le temps de réponse à 5% d'un système du second ordre est inversement proportionnel à la pulsation propre. Il dépend également de manière non-linéaire de l'amortissement. Cette fonction de dépendance est donnée sur la figure<sup>4</sup> 2.3. On observe que cette fonction présente des discontinuités. A  $\omega_0$  constant, le temps de réponse est minimal pour  $\xi = 0.68$  et on a alors  $T_r = 2.85/\omega_0$ . Pour  $\xi > 1$ , on peut approcher le temps de réponse par<sup>5</sup>  $t_r \cong 3\xi/\omega_0$ . Pour  $\xi < 1$ , on peut approcher le temps de réponse par  $t_r \cong 6/(\xi\omega_0)$ .

---

<sup>4</sup>Le temps de réponse d'un système du second ordre ne peut être donné par une simple formule. En effet, la réponse peut passer par les valeurs correspondant à 105% et 95% de la valeur finale à de nombreuses reprises. Pour tracer cette courbe nous avons d'abord calculé pour chaque instant son appartenance à l'intervalle [95%; 105%]. Puis, en partant de l'instant final qui doit faire partie de l'intervalle, nous avons cherché le premier instant (mais le dernier dans l'ordre chronologique) qui n'entre pas dans l'intervalle. Cet instant est le temps de réponse. De manière plus rigoureuse, cela donne l'algorithme suivant : la réponse s'écrivant  $y(k)$  pour les instants  $t_k$ ,  $k = 1 \dots N$ . On calcule d'abord la fonction d'appartenance  $\phi(k) := 1$  si  $|y(k) - K|/K < 0.05$  et  $\phi(k) = 0$  dans le cas contraire. En partant de  $k := N$ , tant que la condition  $\phi(k) = 1$  est vérifiée, appliquer  $k := k - 1$ . Une fois sorti de la boucle, on a  $t_r := t(k)$  ; il s'agit d'une approximation par défaut puisqu'à cet instant, la réponse n'est pas encore entrée dans la zone [.95 ; 1.05].

<sup>5</sup>Cela revient à considérer le pôle basse fréquence  $r_1$  à la pulsation  $\omega_2 = \xi\omega_0 - \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0$ . Pour  $\xi \gg 1$ , on a  $\omega_2 \cong \omega_0/(2\xi)$ . En utilisant la relation  $t_r \cong 3/\omega_2$  (le temps de réponse est égal à trois fois la constante de temps la plus faible), on obtient  $t_r \cong 6\xi/\omega_0$ .

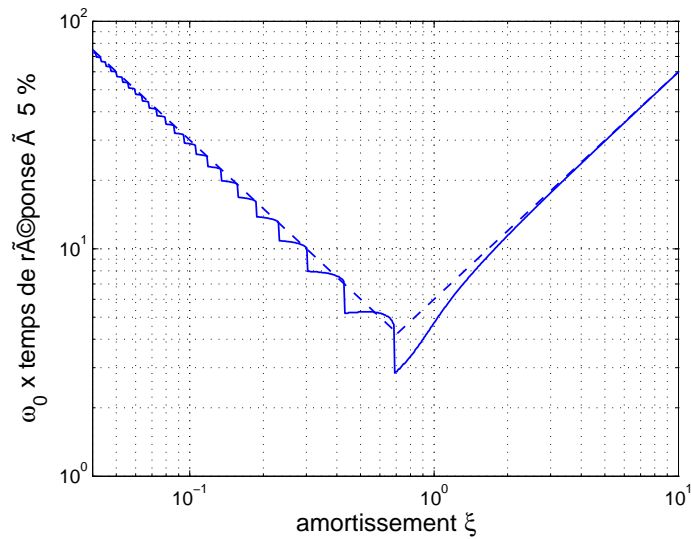


FIG. 2.3 – Temps de réponse d'un système du second ordre (trait plein) et valeur approchée (trait pointillé)

## 2.3 Analyse fréquentielle

### 2.3.1 Régime harmonique

Considérons que le système est alimenté par un signal sinusoïdal  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha)$  de pulsation  $\omega$  (en rad/s). Puisque le système est linéaire, la sortie sera également sinusoïdale à la même pulsation, du moins au bout d'un certain temps, et s'écrit  $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \beta)$ . On peut définir un gain  $G = \frac{Y_m}{U_m}$  et un déphasage  $\phi = \alpha - \beta$ . Le gain et la phase dépendent de la pulsation et on note  $G(\omega)$  et  $\phi(\omega)$ . La donnée des fonctions  $G(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  permet de caractériser le système dynamique. On parle d'*analyse fréquentielle* ou d'*analyse harmonique*. Pour obtenir expérimentalement ces fonctions, il suffit d'exciter le système avec un signal sinusoïdal, de relever les amplitudes et le déphasage et de recommencer pour différentes valeurs de la fréquence. Le gain est souvent exprimé en décibel (dB) avec  $G_{dB} = 20 \log(G)$ ; le tableau 2.4 donne les équivalences entre gain naturel et gain en dB pour différentes valeurs.

Pour simplifier les calculs, considérons que le système est alimenté avec

un signal complexe  $\underline{u}(t) = U_m \exp(j\omega t + \alpha)$ ; la sortie s'écrit alors :  $y(t) = Y_m \exp(j\omega t + \beta)$ . Dériver  $k$  fois les signaux  $\underline{u}$  et  $\underline{y}$  revient à multiplier par  $(j\omega)^k$ . En reprenant le modèle dynamique (2.3), on peut écrire :

$$\underline{y}(t) = H(j\omega)\underline{u}(t) \quad (2.39)$$

On a donc  $G(\omega) = |H(j\omega)|$  et  $\phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ ; c'est-à-dire que le gain du système est le module de  $H(j\omega)$  et que le déphasage est son argument.

### 2.3.2 Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est le lieu du *gain complexe*  $H(j\omega)$  lorsque  $\omega$  varie. En fait, le lieu de Nyquist est principalement utilisé pour analyser la stabilité des systèmes asservis.

### 2.3.3 Diagramme de Bode

Le lieu de Bode comporte deux courbes :

- Le tracé du gain (en dB ou en échelle logarithmique) en fonction de la pulsation (en échelle log.) ;
- Le tracé de la phase (en degrés) en fonction de la pulsation (en échelle log.)

Il est relativement aisé de tracer le diagramme de Bode d'un système à partir de son tracé asymptotique. Ce dernier s'obtient en considérant qu'entre deux fréquences propres, le système peut être approché<sup>6</sup> sous la forme  $Ks^n$

<sup>6</sup>Par exemple, pour un système  $H(s) = \frac{K(s+10)}{(s+1)(s+100)}$ ,  $H(j\omega)$  peut-être approché par différentes approximations suivant les plages de fréquence :

- pour  $\omega < 1$ , on a  $s + 1 \cong 1$ ,  $s + 10 \cong 10$  et  $s + 100 \cong 100$ , d'où  $H(s) \cong \frac{K}{10}$  ;
- pour  $1 < \omega < 10$ , on a  $s + 1 \cong s$ ,  $s + 10 \cong 10$  et  $s + 100 \cong 100$ , d'où  $H(s) \cong \frac{K}{10s}$  ;
- pour  $10 < \omega < 100$ , on a  $s + 1 \cong s$ ,  $s + 10 \cong s$  et  $s + 100 \cong 100$ , d'où  $H(s) \cong 100K$  ;
- pour  $\omega > 100$ , on a  $s + 1 \cong s$ ,  $s + 10 \cong s$  et  $s + 100 \cong s$ , d'où  $H(s) \cong \frac{K}{s}$ .

Notons que les différents modèles asymptotiques donnent les mêmes gains pour les pulsations limites  $\omega = 1, 10$  et  $100$  rad/s.

$G$	0.01	0.1	0.5	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
$G_{dB}$	-40	-20	-6	-3	0	3	6	20	40

TAB. 2.4 – Équivalence entre décibels et gain naturel

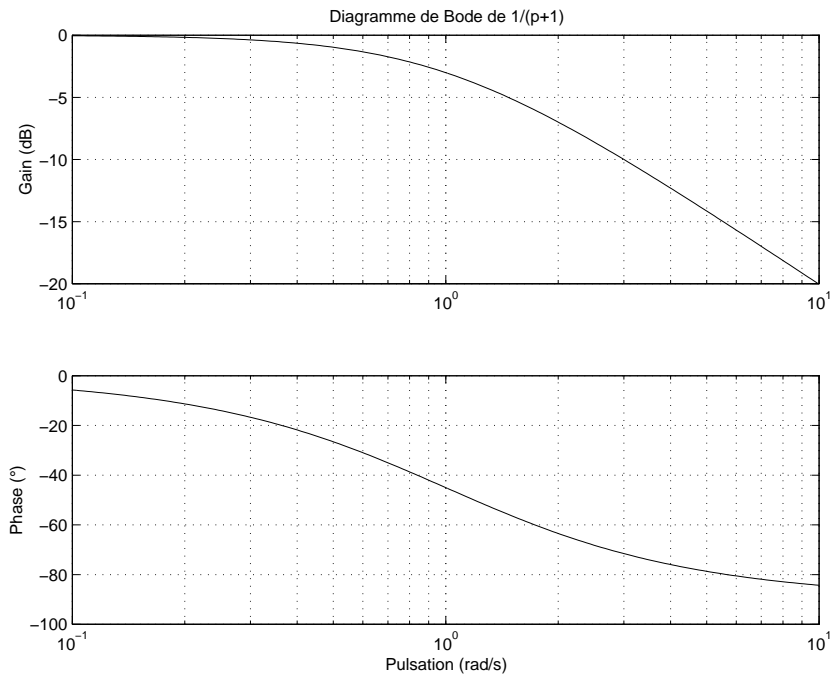


FIG. 2.4 – Réponse fréquentielle d'un système du premier ordre

( $n \in \mathbb{Z}$ ), ce qui donne un gain  $G(\omega) = K\omega^n$  et une phase  $\phi(\omega) = n\frac{\pi}{2}$ . En échelle log., le gain s'écrit  $G_{dB}(\omega) = 20 \log(K) + 20n \log(\omega)$ , ce qui fait une droite de pente  $20n$  dB par décade (dB/dec).

### Exercice 6 (Diagramme de Bode d'un système du premier ordre)

Soit le système du premier ordre de fonction de transfert  $H(s) = \frac{K}{s+a}$ .

1. Déterminez le diagramme de Bode asymptotique du système.
2. Calculez de manière exacte le gain et le déphasage du système à la pulsation  $\omega = a$ .
3. Déduisez en l'allure du tracé exacte du diagramme de Bode du système.

Les tracés des diagrammes de Bode des systèmes du premier ordre  $\frac{1}{s+1}$  et du second ordre  $\frac{1}{s^2+2\xi s+1}$  sont donnés sur les figures 2.4 et 2.5.

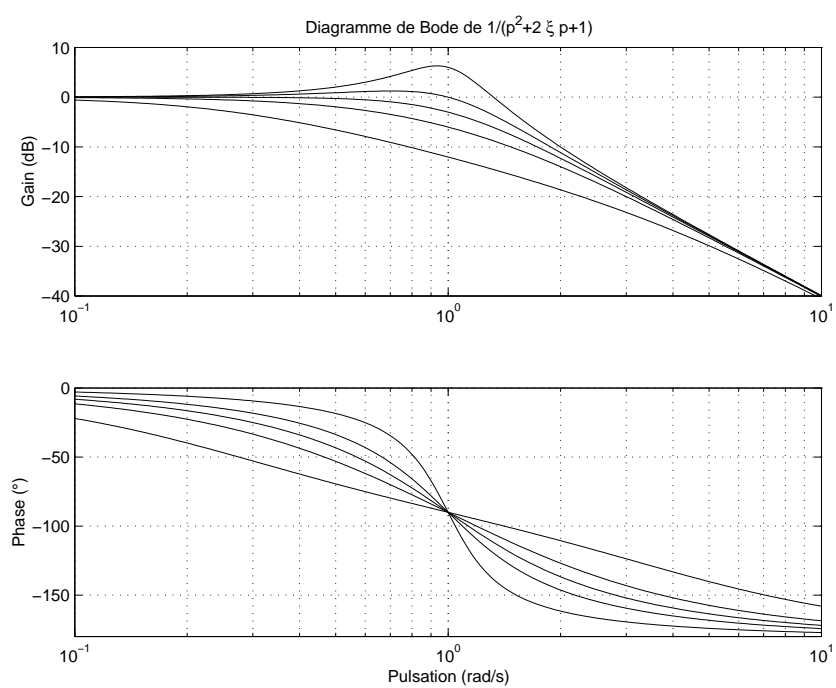


FIG. 2.5 – Réponse fréquentielle de systèmes du second ordre ( $\xi = 0.25, 0.5, 0.707, 1$  et  $2$ )

**Remarque 1**

*Vous devez être capable de représenter le diagramme de Bode d'un système dynamique en vous appuyant sur le tracé asymptotique.*

**Exercice 7 (Tracé du diagramme de Bode)**

*Tracé le diagramme de Bode des systèmes suivants en vous appuyant sur le tracé du diagramme asymptotique ; précisez leur gain statique.*

1.  $\frac{1}{s+a}$
2.  $\frac{1}{(s+1)(s+4)}$
3.  $\frac{(s+4)}{(s+1)(s+20)}$
4.  $\frac{1}{s(s+20)}$
5.  $\frac{\exp(-0.01 s)}{s+10}$

**2.3.4 Diagramme de Black**

Le diagramme de Black est le lieu du gain (en dB) en fonction de la phase, paramétré en fonction de la pulsation.

**2.3.5 Étude du second ordre**

Soit un système du second ordre de fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{K\omega_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.40)$$

Le gain complexe (harmonique) de ce système s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega} \quad (2.41)$$

Son gain est :

$$|H(j\omega)| = \frac{K\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}} \quad (2.42)$$

et sa phase s'écrit :

$$\arg(H(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (2.43)$$

Revenons au gain et notons le  $G(\omega) = |H(j\omega)|$ . On peut réécrire :

$$G^2(\omega) = \frac{(K\omega_0)^2}{(\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X} \quad (2.44)$$

où  $X = \omega^2$ . Le numérateur étant constant, le gain présentera un maximum si son dénominateur présente un minimum. Pour que cela arrive, il faut que sa dérivée par rapport à  $X$  s'annule. Notons  $D(X) = (\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X$ . On a  $dD(X)/dX = -2(\omega_0^2 - X) + (2\xi\omega_0)^2$ . L'annulation apparaît pour  $X = \omega_0^2(1 - 2\xi^2)$ . Comme on a  $X \geq 0$ , cette condition ne peut être satisfaite que si  $1 - 2\xi^2$  est positif, ce qui est équivalent à  $\xi < \sqrt{2}/2$ . En observant le signe de la dérivée seconde, on vérifie que le dénominateur présente un minimum. La résonance se fait à la pulsation  $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

**Propriété 11 (Condition de résonance)**

*Le tracé du gain d'un système du second ordre présente un maximum si  $\xi < \sqrt{2}/2$ .*

**Propriété 12 (Pulsation de résonance)**

*La pulsation de résonance d'un système du second ordre de pulsation propre  $\omega_0$  et d'amortissement  $\xi < \sqrt{2}/2$  est  $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$ .*

Le gain à la résonance, c'est-à-dire le maximum du gain est :

$$G(\omega_r) = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.45)$$

Il est d'autant plus important que l'amortissement  $\xi$  est faible. Le tracé du gain max en fonction de l'amortissement est donné sur la figure 2.6 en échelle logarithmique.

**Exercice 8 (Gain du second ordre à la résonance)**

*Vérifiez l'expression du gain à la résonance.*

## 2.4 Représentation d'état

### 2.4.1 Introduction

La représentation d'état est un formalisme alternatif à celui de la fonction de transfert. Le système dynamique à temps continu étant représenté

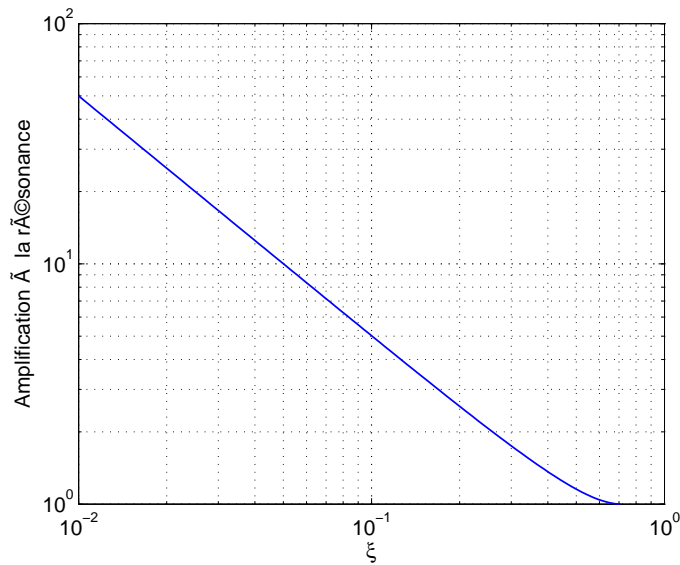


FIG. 2.6 – Amplification maximale en fonction de l'amortissement

par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, on peut toujours se ramener un système d'équations différentielles de premier ordre, quitte à introduire des signaux supplémentaires. Soient  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ...  $x_n(t)$  les signaux intervenant dans ces équations. Celles-ci peuvent alors se mettre sous la forme :

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)), k = 1 \dots n \quad (2.46)$$

où  $u(t)$  est l'entrée du système. On définit le vecteur d'état  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  et les équations se mettent sous forme vectorielle que l'on nomme *équation d'état* :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.47)$$

avec  $f() = [f_1(), \dots, f_n()]^T$ .

La mesure  $y$  du système dépend de l'état et de l'entrée; elle est donnée par l'*équation de mesure* :

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (2.48)$$

Pour un système linéaire, les fonctions  $f$  et  $g$  sont linéaires et les équations se mettent sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.49)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.50)$$

Cette représentation a différents avantages par rapport à la fonction de transfert :

1. elle permet de préciser une condition initiale  $x(0)$  ;
2. elle permet de modéliser facilement des systèmes multi-entrées multi-sorties ;  $u$  et  $y$  sont alors des vecteurs.

### 2.4.2 Équivalence avec la fonction de transfert

En appliquant la transformée de Laplace aux équations 2.49 et 2.50, on obtient :

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (2.51)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2.52)$$

De la première équation, on tire :

$$X(s) = (s\mathcal{I}_n - A)^{-1}BU(s) \quad (2.53)$$

où  $\mathcal{I}_n$  est la matrice unitaire d'ordre  $n$  ; en remplaçant dans l'équation 2.52, on obtient  $Y(s) = H(s)U(s)$  avec :

$$H(s) = C(s\mathcal{I}_n - A)^{-1}B + D \quad (2.54)$$

### 2.4.3 Propriétés

#### Propriété 13 (Pôles et valeurs propres)

*Les pôles de  $H(s)$  sont les valeurs propres de  $A$ .*

#### Propriété 14 (Système strictement propre)

*Pour un système strictement propre, on a  $D = 0$ .*

**Exercice 9 (Fonction de transfert d'un système d'état)**

Soit un système linéaire dont on donne les matrices d'état :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad (2.55)$$

$$C = [ 1 \quad -1 ] ; \quad D = 0. \quad (2.56)$$

- Déterminez la fonction de transfert du système
- Le système est-il strictement propre ?
- Le système est-il stable ?

**Exercice 10 (Modèle d'un moteur à courant continu)**

Un moteur à courant continu est commandé par sa tension d'alimentation  $u(t)$  ; on mesure le courant et la vitesse.

$$u(t) = K\Omega(t) + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \quad (2.57)$$

$$J\frac{d\Omega(t)}{dt} = Ki(t) - f\Omega(t) \quad (2.58)$$

1. Donnez une représentation d'état du moteur.
2. Calculez les pôles du système.
3. Le système est-il stable ?
4. Déterminez la fonction de transfert entre la tension et le courant.
5. Déterminez la fonction de transfert entre la tension et la vitesse.

**Exercice 11 (Système masses-ressort)**

On considère un système composé de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  en translation, reliées entre elles par un ressort de raideur  $k$  et de coefficient de pertes  $f$ . On commande la force  $u(t)$  appliquée à  $m_1$ . Les mesures sont : les positions  $z_1$  et  $z_2$  de chacune des masses et la force  $f = k(z_2 - z_1) + f(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$  exercée par la masse  $m_2$  sur la masse  $m_1$  par l'intermédiaire du ressort. On prendra  $m_1 = 0.2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $k = 100 \text{ N/m}$  et  $f = 10 \text{ N.s/m}$

1. Faites un schéma du système.
2. Donnez la fonction de transfert entre  $u(t)$  et  $z_1(t)$ . Tracez son diagramme de Bode.
3. Donnez la fonction de transfert entre  $u(t)$  et  $z_2(t)$ . Tracez son diagramme de Bode.

4. *Donnez la fonction de transfert entre  $u(t)$  et  $f(t)$ . Tracez son diagramme de Bode.*
5. *Donnez une représentation d'état du système.*
6. *Déterminez la fréquence propre et l'amortissement du système.*

## 2.5 Identification

L'identification du modèle d'un système à partir de données expérimentales est souvent une étape nécessaire. De nombreuses méthodes sont disponibles qui pourraient faire l'objet d'un cours à part entière. Dans cette partie, nous nous contentons de donner quelques exemples de méthodes élémentaires.

De manière générale, on peut séparer le problème de l'identification d'un modèle en deux étapes :

1. la détermination de la structure du modèle (par exemple l'ordre du numérateur et celui du dénominateur),
2. l'estimation des paramètres du modèle.

### 2.5.1 Approche temporelle

Une manière assez simple de caractériser un système est de l'exciter avec un signal particulier et le plus utilisé, dans ce cas, est le signal en échelon. En comparant la réponse du système avec des réponses types, on peut alors choisir la structure du modèle. Trois exemples sont traités ci-dessous à partir de la réponse à un échelon d'amplitude  $U$ . La réponse  $y(t)$  a une amplitude  $Y = y(\infty) - y(0)$ .

### 2.5.2 Système du premier ordre

Si le système n'a pas de dépassement et que sa pente présente une discontinuité à l'origine, on peut choisir de le modéliser par un premier ordre de la forme  $\frac{K}{1+\tau s}$  ; on peut alors estimer le gain statique  $K$  grâce à l'amplification en continu :

$$K = \frac{Y}{U} \quad (2.59)$$

et la constante de temps  $\tau$  qui est le temps de montée à 63 % (en effet,  $1 - \exp(-1) = 0.631$ ).

### 2.5.3 Système du second ordre résonant

Si le système a un dépassement et que sa pente ne présente pas de discontinuité, on peut choisir de le modéliser par un second ordre à pôles complexes conjugués de la forme  $\frac{K}{(1+2\xi s/\omega_0+(s/\omega_0)^2)}$ . On détermine le gain à partir des amplitudes des variations de l'entrée et de la sortie :

$$K = \frac{Y}{U} \quad (2.60)$$

On détermine l'amortissement  $\xi$  à partir du dépassement grâce à la courbe de la figure 2.2. On peut aussi inverser l'expression du dépassement en fonction de l'amortissement 2.37, ce qui donne :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-\pi}{\ln(D)}\right)^2}} \quad (2.61)$$

où  $D = D\%/100$ . Il reste ensuite à déterminer la pulsation propre  $\omega_0$ . Cela se fait à partir de la période  $T_c$  des oscillations relevé expérimentalement<sup>7</sup>. On a alors la pseudo-pulsation  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_c}$ . La relation suivante entre la pulsation et la pseudo-pulsation :

$$\omega_1 = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 \quad (2.62)$$

permet de déterminer  $\omega_0$ .

### 2.5.4 Méthode de Strejc

Si le système n'a pas de dépassement (on parle de système *apériodique*) et que sa pente ne présente pas de discontinuité, on peut choisir de le modéliser par une fonction de transfert de la forme :

$$H(s) = \frac{K}{(1 + \tau s)^n} \quad (2.63)$$

La méthode de Strejc permet d'identifier ce modèles à partir de la réponse à un échelon.

---

<sup>7</sup>Le temps qui s'écoule entre deux instants  $t$  consécutifs vérifiant  $y(t) = y(\infty)$  est  $\frac{T_c}{2}$ .

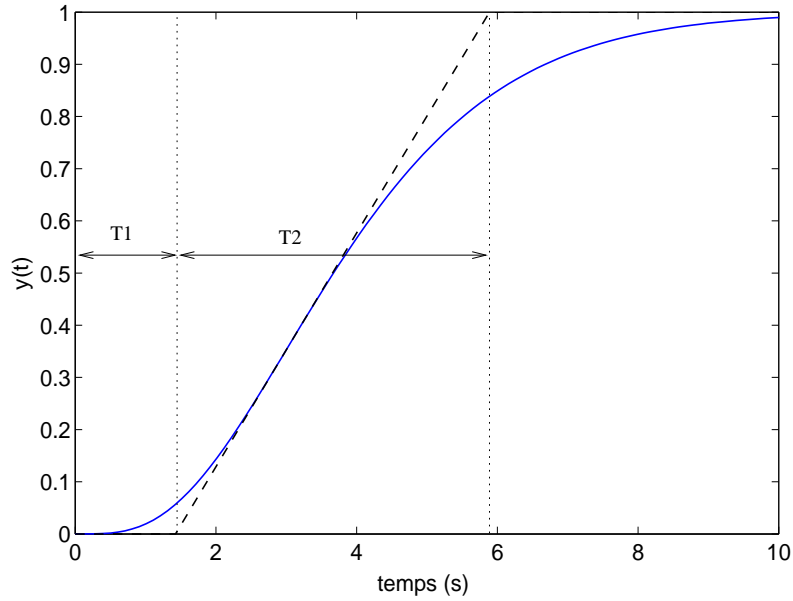


FIG. 2.7 – Réponse à un échelon pour l'identification par la méthode de Strejc

Commençons donc par étudier la réponse à un échelon d'un tel systèmes pour  $n \geq 2$ . La réponse à un échelon d'amplitude  $U$  s'écrit :

$$y(t) = KU \left( 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k! \tau^k} \right) \quad (2.64)$$

Sa dérivée est :

$$\dot{y}(t) = \frac{KU}{\tau^n} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (2.65)$$

et sa dérivée seconde :

$$\ddot{y}(t) = \frac{KU}{\tau^n} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \frac{t^{n-2}}{(n-1)!} \left( n - 1 - \frac{t}{\tau} \right) \quad (2.66)$$

On observe que la dérivée seconde s'annule une seule fois pour  $t > 0$  en  $t_1 = \tau(n-1)$ , ce qui signifie que la courbe  $y(t)$  présente un point d'inflexion en  $(t_1, y(t_1))$ . La tangente à la courbe  $y(t)$  en ce point coupe l'axe des abscisses en  $t = T_1$  et atteint la valeur  $y(\infty)$  en  $t = T_1 + T_2$ . Les valeurs de

$n$	$T_1/\tau$	$T_2/\tau$	$T_1/T_2$
2	0,2817	2,718	0,1036
3	0,8055	3,695	0,2180
4	1,425	4,464	0,3194
5	2,102	5,112	0,4103
6	2,811	5,699	0,4933
7	3,549	6,226	0,5700
8	4,307	6,711	0,6417
9	5,081	7,164	0,7092
10	5,869	7,590	0,7732

TAB. 2.5 – Rapports entre les constantes de temps pour l'identification par la méthode de Strejc

$T_1/\tau$ ,  $T_2/\tau$  et  $T_1/T_2$  sont données dans le tableau 2.5 pour les ordres 2 à 10.

La méthode d'identification peut donc être synthétiser comme suit. A partir de la réponse à un échelon, on identifie dans un premier temps le gain statique  $K = \frac{Y}{U}$  où  $U$  est l'amplitude de l'échelon d'entrée et  $Y$  est l'amplitude de la variation de la mesure. Dans un second temps, on doit identifier l'ordre  $n$  du système et la constante de temps  $\tau$ . Pour cela, on trace la tangente à la courbe au point d'inflexion<sup>8</sup>. On relève le temps  $T_1$  entre l'instant de déclenchement de l'échelon et l'instant où l'asymptote coupe la valeur initiale de  $y(t)$ . On relève  $T_2$  entre ce dernier instant et l'instant où l'asymptote atteint la valeur finale de  $y(t)$ . A partir du rapport  $T_1/T_2$ , on détermine l'ordre du système. Pour la valeur de  $n$  choisie, on détermine  $\tau$  à partir de la valeur de  $T_1/\tau$  ou de  $T_2/\tau$ .

### Exercice 12 (Identification d'un système du second ordre amorti)

La réponse d'un système à un échelon d'amplitude  $U = 2$  déclenché à  $t = 0$ , est donnée sur la figure ???. Identifiez le système par la méthode de Strejc.

---

<sup>8</sup>La tangente à la courbe au point d'inflexion a la particularité de croiser la courbe en ce point. Cette caractérisation est pratique pour déterminer graphiquement cette tangente.

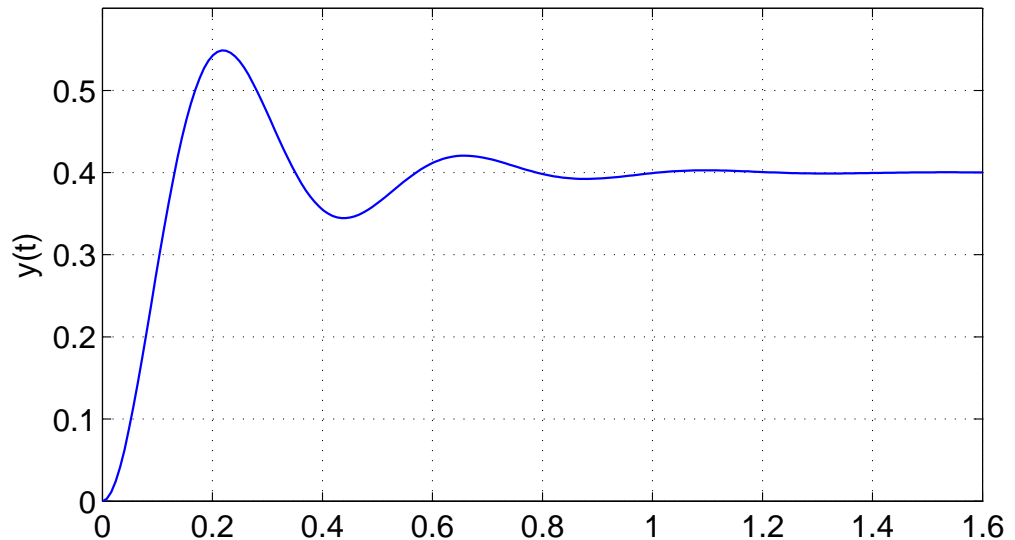


FIG. 2.8 – Réponse à un échelon d'amplitude  $U = 1$  d'un système

### Exercice 13 (Identification d'un système du second ordre oscillant)

On a relevé la réponse à un échelon unitaire, déclenchée à  $t = 0$ , d'un système dynamique. Cette réponse est donnée sur la figure 2.8. Identifiez un modèle du système.

#### 2.5.5 Approche fréquentielle

Le diagramme de Bode d'un système peut être obtenu expérimentalement à partir d'une série de mesures en régime sinusoïdal à différentes fréquences. Pour chaque essai, on relève l'amplitude du signal d'entrée, celle du signal de sortie et le déphasage entre l'entrée et la sortie. À partir de ces données, on peut tracer le diagramme de Bode du système. En analysant ce diagramme, on peut identifier le modèle de systèmes relativement simple.

Par exemple, si le gain est constant en basse fréquence puis décroît à partir d'une certaine fréquence avec un déphasage qui varie entre  $0$  et  $-90^\circ$ , on peut identifier le système à un premier ordre sous la forme  $H(s) = \frac{K\omega_1}{s+\omega_1}$ . Le gain statique  $K_1$  est identifié au gain en basse fréquence. La pulsation propre  $\omega_1$  est obtenue à partir de la fréquence  $f_1$  où le gain du système est

$$\frac{K}{\sqrt{2}} : \omega_1 = 2\pi f_1.$$



# Chapitre 3

## Asservissements analogiques

### 3.1 Introduction aux asservissements

#### 3.1.1 Principe

Considérons un système d'entrée  $u(t)$  (la *commande*) et de sortie  $y(t)$  (la *mesure*). Le but de l'asservissement consiste à déterminer une loi de commande permettant de calculer automatiquement la commande  $u(t)$  de sorte qu'à partir d'un état quelconque, la sortie  $y(t)$  soit capable de suivre un signal de référence  $r(t)$  arbitraire. Le système réalisant cet asservissement automatique est appelé correcteur (*controller* en anglais).

Pour évaluer la qualité d'un asservissement, on considère sa précision (l'écart entre  $r(t)$  et  $y(t)$ ), son temps de réponse (la durée qu'il met pour se stabiliser) et son dépassement (certains systèmes ont tendance à dépasser leur cible avant de se stabiliser). Une autre qualité fondamentale d'un système asservi est la *robustesse*. Un système est dit robuste s'il garde ses propriétés ou performances malgré des modifications de son environnement. Dans la pratique, les valeurs des paramètres d'un système sont amenées à varier (les résistances évoluent en fonction de la température et les inductances sont sujettes à saturation). De plus, des approximations sont souvent faites pour obtenir un modèle simple (on néglige les retards dus aux temps de calcul). Il est important de s'assurer que le système reste stable et conserve certaines performances malgré ces phénomènes.

La qualité d'un asservissement est bien mise en valeur par un essai en

échelon. On y mesure l'erreur statique (donnée en %), le temps de réponse (généralement calculé à 5 % de la valeur finale pour ne pas être perturbé par le bruit de mesure) et le dépassement (donné en pourcentage de l'amplitude de la réponse).

L'automatique<sup>1</sup> a deux missions :

- l'asservissement (ou *tracking*) concerne le suivi d'un signal de consigne ;
- la *régulation* concerne le rejet des perturbations (on parle de *réjection*).

Dans de nombreuses cas, les deux objectifs sont atteints avec une loi de commande unique qui permet de suivre le signal de consigne tout en rejetant les perturbations.

### 3.1.2 Boucle ouverte ou boucle fermée ?

Pour réaliser un asservissement, deux types de stratégies sont envisageables. La première est de calculer la commande uniquement à partir de la référence, le correcteur réalisant une inversion partielle du système. Par exemple, pour un système du premier ordre de la forme  $\tau\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$ , la loi de commande s'écrit  $u(t) = \frac{1}{K}(\tau\dot{r}(t) + r(t))$ , ce qui donne  $y(t) = r(t)$ . Cette technique présente un certain nombre d'inconvénients :

- Elle ne peut stabiliser un système instable.
- Elle peut aboutir à un correcteur instable inutilisable.
- Elle n'est pas robuste car elle nécessite une connaissance précise du modèle du système.

Ces inconvénients font qu'elle est rarement utilisée seule. Néanmoins, elle permet de calculer une valeur nominale du signal de commande. En anglais, on parle de *feed-forward*.

La seconde méthode consiste à inclure dans le signal de commande une *rétroaction* de la mesure, par exemple :  $u(t) = -Ky(t)$ . Le signe '-' indique qu'il s'agit d'une *contre-réaction*. Ainsi, si la sortie augmente trop, la commande sera faible et devrait permettre de ramener la sortie à une valeur plus faible.

---

<sup>1</sup>On distingue l'automatique, qui concerne les asservissements, de l'automatisme qui concerne la commande par automates séquentiels. Ces deux sciences sont complémentaires et concourent au développement de dispositifs de pilotage automatiques des processus. Cependant, elles ne relèvent pas des mêmes théories et sont donc enseignées séparément.

Afin de suivre la consigne, le signal de consigne est intégré dans le correcteur. La technique la plus courante consiste à s'appuyer sur l'erreur de régulation  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Le correcteur calcule en temps réel la commande  $u(t)$  par une loi liant  $u(t)$  et  $e(t)$ . Cette loi de commande peut être une équation différentielle si on considère un système à temps continu ou une équation aux récurrences pour les systèmes à temps discret. Soit  $K_0$  le gain statique du correcteur (le gain en régime continu tel que  $u(t) = K_0 e(t)$  pour des signaux continus). Si le système bouclé est stable, alors, pour une référence constante, tous les signaux convergent vers une limite finie. On a alors  $u(t) = K_0 e(t)$  et l'erreur est d'autant plus faible que  $K_0$  est élevé.

Les correcteurs en boucle fermée ont les avantages inverses des correcteurs en boucle ouverte :

- Ils peuvent stabiliser un système instable.
- Moyennant certaines précautions, ils peuvent s'avérer robuste. Notamment, ils peuvent garder un certain niveau de performance malgré des incertitudes sur le modèle du système.

### 3.1.3 Principes généraux sur la synthèse de correcteurs en boucle fermée (feedback)

L'erreur de régulation est le signal  $e(t) = r(t) - y(t)$ . On cherche généralement une loi de commande de la forme  $U(s) = K(s)E(s)$ . Le correcteur  $K(s)$  peut prendre diverses formes : proportionnel ( $K(s) = K_p$ ), proportionnel-intégral ( $K(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ ) ou PID ( $K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$ ), avance de phase ( $K(s) = K \frac{s+a}{s+b}$  avec  $a < b$ ) ou retard de phase ( $K(s) = K \frac{s+a}{s+b}$  avec  $a > b$ ). Le but consiste à régler le correcteur de manière à donner de bonnes propriétés au système asservi (précision, rapidité, dépassement, robustesse).

Le transfert de l'ensemble système + correcteur est aussi appelé *fonction de transfert en boucle ouverte* s'écrit  $G_{bo}(s) = G(s)K(s)$ . Le *transfert en boucle fermée* est le transfert entre  $r(t)$  et  $y(t)$ . Pour l'obtenir, on peut écrire  $Y(s) = G_{bo}(s)E(s) = G_{bo}(s)(R(s) - Y(s))$ , ce qui donne  $Y(s) = G_{bf}(s)R(s)$  avec :

$$G_{bf}(s) = \frac{G_{bo}(s)}{1 + G_{bo}(s)} \quad (3.1)$$

Le but de l'asservissement est d'obtenir  $G_{bf}(s) \cong 1$  pour avoir  $y(t) \cong r(t)$ ,

ce qui sera le cas si le gain de  $G_{bo}(s)$  est suffisamment élevé. Pour obtenir un gain élevé de la boucle ouverte, on est amené à chercher un correcteur avec un gain élevé. Cependant, un gain trop élevé entraînera une instabilité du système. Il faudra donc faire un compromis entre la stabilité et les performances.

Voici les caractéristiques d'une bonne fonction de transfert en boucle ouverte (système + correcteur) :

- Dans la plage de fréquences correspondant à la bande passante (autour de la pulsation de coupure de l'axe 0 dB dans le diagramme de Bode), la phase doit être supérieure à  $180^\circ$  additionnée de la marge de phase (au minimum supérieure à  $145^\circ$  pour une marge de phase de  $45^\circ$ ). Si ce n'est pas le cas, il faut soit ajouter de la phase au système par l'ajout d'effet intégrale (ou d'une avance de phase), soit réduire la bande passante (diminuer la rapidité) en diminuant le gain du correcteur.
- En basse fréquence, le gain doit être élevé afin de garantir une erreur statique faible et un bon rejet des perturbations. Si ce n'est pas le cas, il faut ajouter un effet intégrale (ou retard de phase).
- En haute fréquence, il n'est pas nécessaire que le correcteur ait un quelconque effet. Il est même recommandé d'avoir un gain qui chute en haute fréquence pour une meilleure robustesse. En effet, un gain élevé risquerait d'exciter des dynamiques mal identifiées et d'aboutir à une instabilité. Si ce n'est pas le cas, il est recommandé d'ajouter au correcteur un effet de filtrage passe-bas.

#### Exercice 14 (Correcteur TOR à hystérésis)

Un système du premier ordre de modèle  $u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}$  est asservi en courant à la valeur  $i^*(t)$  par le loi de commande Tout-Ou-Rien suivante :

- $u(t) = E$  si  $i(t) < i^*(t) - \frac{1}{2}\Delta_i$  et  $u(t)$  reste égal à  $E$  tant que  $i(t)$  ne dépasse pas  $i^*(t) + \frac{1}{2}\Delta_i$ .
- $u(t) = 0$  si  $i(t) > i^*(t) + \frac{1}{2}\Delta_i$  et  $u(t)$  reste nul tant que  $i(t)$  ne devient pas inférieur à  $i^*(t) - \frac{1}{2}\Delta_i$ .

La valeur initiale du courant est nulle ; on donne :  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $\Delta_i = 1 \text{ A}$  et  $E = 50 \text{ V}$ . On considérera une référence du courant constante  $i^*(t) = 10 \text{ A}$ .

1. Déterminez l'allure du courant.
2. Déterminez à quel instant a lieu la première commutation de la commande.

3. Déterminez à quel instant a lieu la deuxième commutation de la commande.
4. Déterminez à quel instant a lieu la troisième commutation de la commande.
5. Quelle est la fréquence du régime permanent ?

### 3.1.4 Exemple introductif

#### Exemples 1

Soit un système corrigé de fonction de transfert en boucle ouverte  $G_{bo}(s) = \frac{K}{s}$ . Sa fonction de transfert en boucle fermée s'écrit alors :

$$G_{bf}(s) = \frac{G_{bo}(s)}{1 + G_{bo}(s)} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (3.2)$$

avec  $\tau = \frac{1}{K}$ . Le système en boucle fermée possède les caractéristiques suivantes :

- il est stable si  $\tau > 0$  ;
- son gain est unitaire ;
- sa bande passante à  $-3$  dB est égale à  $\omega_{bp} = K = \frac{1}{\tau}$  qui est aussi la pulsation de coupure de l'axe 0 dB ; son temps de réponse à 5 % est égal à  $3\tau$ .

On observe que ce système est bien asservi ; il peut servir de modèle pour penser l'asservissement de nombreux systèmes.

#### Exemples 2

Ce second exemple concerne la régulation de vitesse d'un véhicule. Il est donné sous forme d'exercice corrigé.

#### Exercice 15 (Variateur de vitesse)

Soit un véhicule de masse  $M = 1000$  kg, soumis à un coefficient de frottement  $f = 100$  Ns/m. On suppose que la commande  $u(t)$  est la force appliquée au véhicule. Le véhicule roule sur une route faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale ( $\alpha > 0$  pour une côte). On note  $y(t)$  sa vitesse qui est aussi la grandeur à asservir à une référence  $r(t)$ . L'accélération de pesanteur est  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

1. Donnez l'équation différentielle liant  $u(t)$ ,  $y(t)$  et  $\alpha(t)$ .

2. Dans l'hypothèse d'une faible pente, écrivez le modèle sous forme de fonctions de transfert. Explicitiez ces fonctions de transfert.
3. Donnez le modèle sous forme d'état.

On envisage dans un premier temps une correction en boucle ouverte  $u(t) = fv(t) + M\dot{v}(t)$ .

4. Dans le cas où  $\alpha(t) = 0$ , montrez que  $y(t) = r(t)$ .
5. Montrez que cet asservissement ne permet pas de rejeter les perturbations créées par les changements de pente.

On envisage alors une correction en boucle fermée  $U(s) = K(s)(R(s) - Y(s))$  avec :

$$K(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s} \quad (3.3)$$

où  $\tau_i = M/f$ .

6. Donnez la fonction de transfert entre  $r(t)$  et  $y(t)$ .
7. Donnez la fonction de transfert entre  $\alpha(t)$  et  $y(t)$ .
8. Expliquez en quoi cette loi de commande permet à la fois d'asservir  $y(t)$  à la consigne  $r(t)$  tout en rejetant la perturbation  $\alpha(t)$ .

### Correction

1. La relation fondamentale de la dynamique projetée sur un axe lié à la route s'écrit :

$$M\dot{y}(t) = u(t) - fy(t) - Mg \sin(\alpha(t)) \quad (3.4)$$

2. Le terme  $\sin(\alpha)$  est non-linéaire. Pour  $\alpha$  petit, on a  $\sin(\alpha) \simeq \alpha$  et le modèle s'écrit alors dans le domaine de Laplace :

$$Y(s) = \frac{1}{Ms + f}(U(s) + Mg\alpha(s)) \quad (3.5)$$

3. L'équation 3.4 se réécrit avec  $\alpha$  petit :

$$\dot{y}(t) = -\frac{f}{M}y(t) + \frac{1}{M}u(t) - g\alpha(t) \quad (3.6)$$

En notant  $x$  l'état, le modèle s'écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = -\frac{f}{M}x(t) + \left[ \frac{1}{M} - g \right] \begin{bmatrix} u(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$y(t) = x(t) \quad (3.8)$$

Il s'agit d'un système à deux entrées et une sortie qui s'écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\tilde{u}(t) \quad (3.9)$$

$$y(t) = Cx(t) + D\tilde{u}(t) \quad (3.10)$$

avec  $\tilde{u}(t) = [u(t) \ \alpha(t)]^T$  et :

$$A = -\frac{f}{M} \quad B = \left[ \frac{1}{M} \quad -g \right] \quad (3.11)$$

$$C = 1 \quad D = [0 \ 0] \quad (3.12)$$

4. La commande s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$U(s) = (Ms + f)R(s) \quad (3.13)$$

Avec  $\alpha(s) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{Ms + f}U(s) \quad (3.14) \\ &= \frac{1}{Ms + f}(Ms + f)R(s) \\ &= R(s) \end{aligned}$$

d'où  $y(t) = r(t)$ .

5. Pour  $\alpha(t)$  non nul, on a :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{Ms + f}(U(s) + Mg\alpha(s)) \\ &= \frac{1}{Ms + f}((Ms + f)R(s) + Mg\alpha(s)) \\ &= R(s) + \frac{Mg}{Ms + f}\alpha(s) \quad (3.15) \end{aligned}$$

La vitesse n'est plus égale à la référence ; elle est perturbée par un terme  $\frac{Mg}{Ms+f}\alpha(s)$ . En régime permanent, ce terme est égal à  $\frac{Mg}{f}\alpha$ . Par exemple, pour une pente de 10 %, c'est-à-dire  $\alpha = 0,1$ , ce terme est égal à 10 m/s, soit 36 km/h. Ce type de commande en boucle ouverte n'est donc pas acceptable.

6. On a :

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{1}{Ms + f}(U(s) + Mg\alpha(s)) \\
 &= \frac{1}{Ms + f}\left(K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}(R(s) - Y(s)) + Mg\alpha(s)\right) \\
 &= \frac{K_p}{\tau_i s}(R(s) - Y(s)) + \frac{Mg/f}{1 + \tau_i s}\alpha(s) \\
 \left(1 + \frac{K_p}{\tau_i s}\right)Y(s) &= \frac{K_p}{\tau_i s}R(s) + \frac{Mg/f}{1 + \tau_i s}\alpha(s) \\
 Y(s) &= \frac{1}{1 + \frac{\tau_i}{K_p} s}R(s) + \frac{\frac{Mg}{K_p f} \tau_i s}{(1 + \tau_i s)(1 + \frac{\tau_i}{K_p} s)}\alpha(s) \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

La fonction de transfert entre  $R(s)$  et  $Y(s)$  est donc :

$$H_{\text{bf}}(s) = \frac{1}{1 + \frac{\tau_i}{K_p} s} \quad (3.17)$$

7. La fonction de transfert entre  $\alpha(s)$  et  $Y(s)$  est :

$$H_{y\alpha}(s) = \frac{\frac{Mg}{K_p f} \tau_i s}{(1 + \tau_i s)(1 + \frac{\tau_i}{K_p} s)} \quad (3.18)$$

8. La fonction de transfert  $H_{\text{bf}}(s)$  entre  $r$  et  $y$  a un gain unitaire et une pulsation de bande passante égale à  $\omega_c = \frac{K_p}{\tau_i}$  (en rad/s). Cette bande passante peut être choisie arbitrairement en ajustant  $K_p$ .

Par ailleurs la fonction de transfert  $H_{y\alpha}(s)$  entre  $\alpha$  et  $y$  a un gain statique  $H_{y\alpha}(0)$  nul, ce qui fait qu'il n'y a aucune erreur de vitesse en régime permanent pour une pente constante. On peut aussi s'intéresser au gain fréquentiel  $H_{y\alpha}(j\omega)$ . Il s'agit d'un filtre de type passe-bande de bande passante  $[\frac{1}{\tau_i}; \frac{K_p}{\tau_i}]$ . Sur cette plage de fréquence, l'expression approchée peut être obtenue avec  $1 + \tau_i s \simeq \tau_i s$  et  $1 + \frac{\tau_i}{K_p} s \simeq 1$ . Le gain est alors  $|H_{y\alpha}(j\omega)| \simeq \frac{Mg}{K_p f}$ . Ce gain est inversement proportionnel à  $K_p$  et peut être rendu aussi faible que souhaité en augmentant  $K_p$ .

Le diagramme de Bode des fonctions de transfert  $H_{\text{bf}}(s)$  et de  $H_{y\alpha}(s)$  sont données sur les figures 3.6 et 3.2. Les réponses à un échelon d'amplitude 0, 1 rad sont données sur les figures 3.3 et 3.4. On observe que

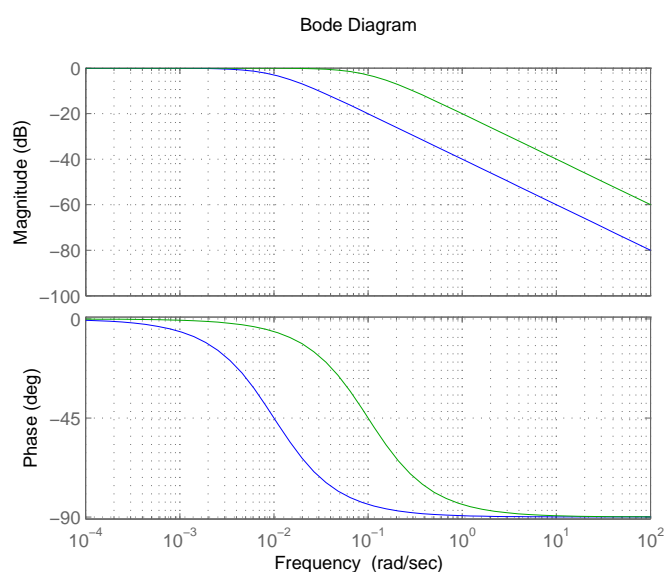


FIG. 3.1 – Diagramme de Bode de  $H_{bf}(s)$  pour  $K_p = 10$  et  $K_p = 100$

les réponses sont plus rapides avec  $K_p = 100$  que  $K_p = 10$  et que l'erreur transitoire de vitesse passe de 0,8 m/s à 0,1 m/s pour une variation de pente de 0,1 rad. Le programme Matlab permettant d'obtenir ces courbes est le suivant :

```
M = 1000; f = 100; g = 10;
G = tf(1,[M f]);
toi = M/f; Kp1 = 10; Kp2 = 100;
K1 = tf(Kp1*[toi 1],[toi 0]);
K2 = tf(Kp2*[toi 1],[toi 0]);
Gbo1 = G*K1; Gbo2 = G*K2;
Gbf1 = feedback(Gbo1,1); Gbf2 = feedback(Gbo2,1);
Gya1 = tf([M*g*toi/(Kp1*f) 0],conv([toi 1],[toi/Kp1 1]));
Gya2 = tf([M*g*toi/(Kp2*f) 0],conv([toi 1],[toi/Kp2 1]));
wmin = 1e-4; wmax = 1e2;
figure(1); bode(Gbf1,Gbf2,{wmin,wmax}); grid on
figure(2); bode(Gya1,Gya2,{wmin,wmax}); grid on
figure(3); step(Gbf1,Gbf2,400); grid on; axis([0 400 0 1.05])
figure(4); step(0.1*Gya1,0.1*Gya2,20); grid on
```

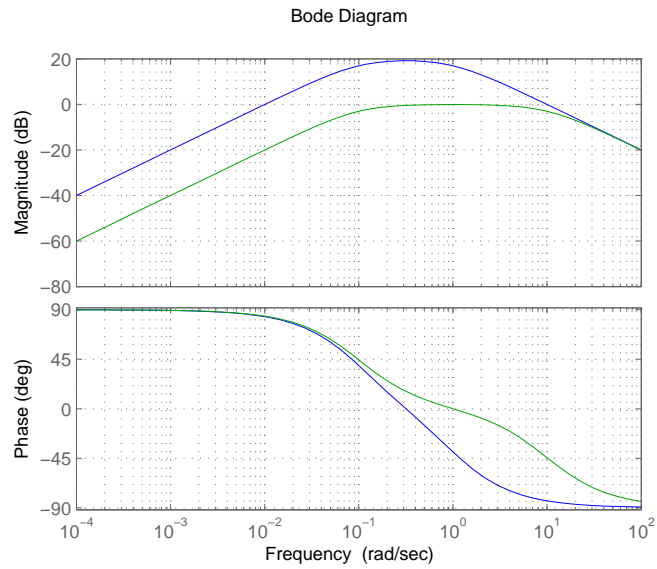


FIG. 3.2 – Diagramme de Bode de  $H_{y\alpha}(s)$  pour  $K_p = 10$  et  $K_p = 100$

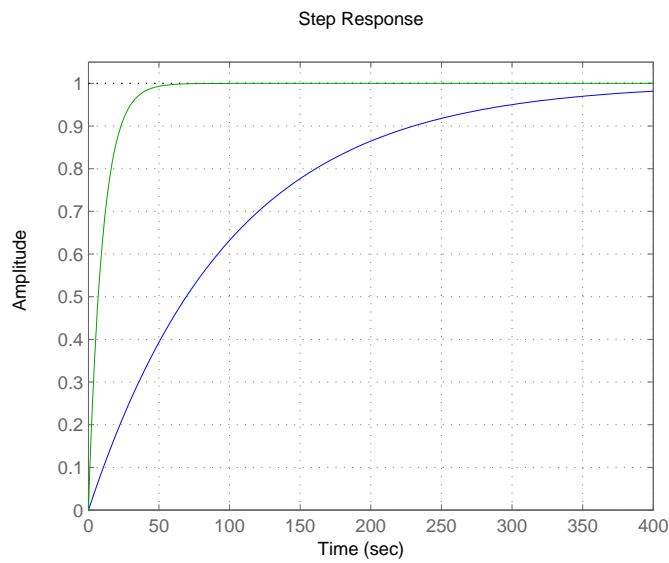


FIG. 3.3 – Réponse à un échelon d'amplitude 0, 1 rad de  $H_{bf}(s)$  pour  $K_p = 10$  et  $K_p = 100$

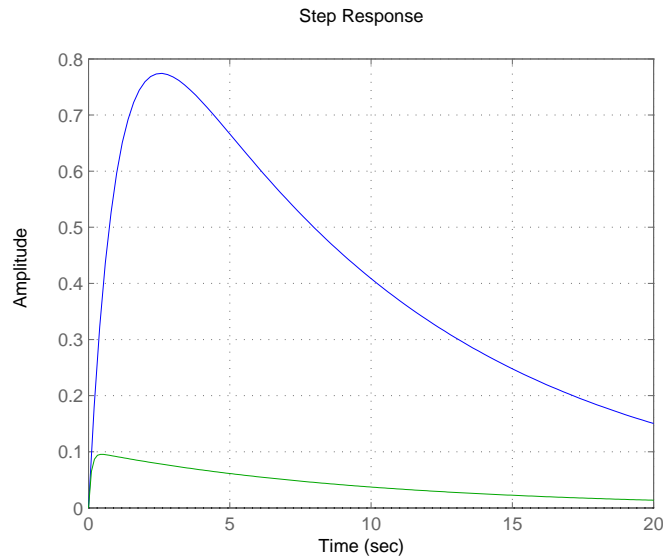


FIG. 3.4 – Réponse à un échelon d'amplitude 0, 1 rad de  $H_{ya}(s)$  pour  $K_p = 10$  et  $K_p = 100$

### Cas général

A la lumière des exemples précédents, on observe qu'un système bien asservi présente un gain en boucle ouverte qui est élevé en basse fréquence ( $|H_{bo}(j\omega)| \gg 1$ ). Ce gain est décroissant et atteint 0 dB à la pulsation  $\omega_c$ . On peut alors déterminer de manière approximative la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{bf}(s) = \frac{H_{bo}(s)}{1+H_{bo}(s)}$  :

- Pour  $\omega \ll \omega_c$ , on a  $1 + H_{bo}(s) \simeq H_{bo}(s)$  d'où  $H_{bf}(s) \simeq 1$ .
- Pour  $\omega \gg \omega_c$ , on a  $1 + H_{bo}(s) \simeq 1$  d'où  $H_{bf}(s) \simeq H_{bo}(s)$ .

Pour  $\omega \simeq \omega_c$ , le gain peut être plus ou moins amorti suivant que  $H_{bo}(j\omega_c)$  soit plus ou moins proche de  $-1$ .

A titre d'exemple, considérons les fonctions de transfert en boucle ouverte :

$$H_{bo}(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+b)} \quad (3.19)$$

avec  $K = b\sqrt{ab}$  et  $\frac{b}{a} = \lambda$ . Le diagramme de Bode des fonctions de transfert obtenues pour différentes valeurs de  $\lambda$  sont données sur la figure 3.5. Les

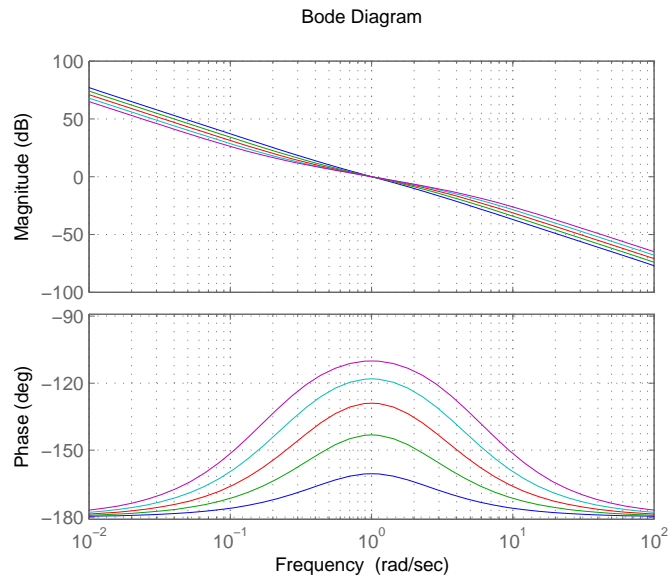


FIG. 3.5 – Diagramme de Bode du système en boucle ouverte pour  $\lambda = 2, 4, 8, 16$  et  $32$

fonctions de transfert en boucle fermée sont données sur la figure 3.6. Dans l'exemple considéré, la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO est  $\omega_c = 1$  rad/s. Pour  $\omega \ll \omega_c$ , on a bien  $H_{bf}(s) = 1$ ; pour  $\omega \gg \omega_c$ , on a bien  $H_{bf}(s) = H_{bo}(s)$ . Pour  $\omega = \omega_c$ , le comportement (amorti ou résonant) diffère suivant la phase de la boucle ouverte à cette pulsation. Plus la phase est proche de  $-180^\circ$ , plus on est résonant.

Le programme Matlab permettant d'obtenir ces courbes est le suivant :

```
w1 =10; Tabl = [2 4 8 16 32];
wmin = 1e-2; wmax = 1e2;
for Ind = 1 :length(Tabl),
    lam = Tabl(Ind);
    a = w1/sqrt(lam); b = w1*sqrt(lam); K = b*sqrt(a*b);
    Hbo = tf(K*[1 a],[1 b 0 0]);
    Hbf = feedback(Hbo,1);
    figure(1); bode(Hbo,{wmin,wmax}); hold on
    figure(2); bode(Hbf,{wmin,wmax}); hold on
end
```

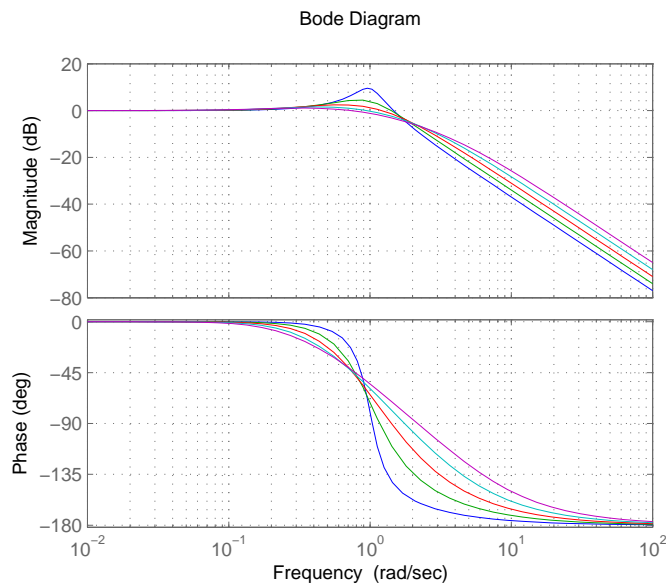


FIG. 3.6 – Diagramme de Bode du système en boucle fermée

```
figure(1); grid on
figure(2); grid on
```

## 3.2 Analyse des systèmes asservis

### 3.2.1 Stabilité

Une première condition pour que la commande ait un sens est que le système en boucle fermée soit stable. Les méthodes d'étude de la stabilité des systèmes, présentées au paragraphe 2.2.1 restent valables. D'autres méthodes existent qui s'appuient sur l'étude de la stabilité de la FTBF à partir de la FTBO. Ces méthodes ont l'intérêt d'être directement utilisables lors de la synthèse du correcteur.

#### Propriété 15 (Critère du revers)

*Un système bouclé ne comportant pas de pôle à partie réelle positive est stable si le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte (système + correcteur) passe à droite du point  $-1$ .*

Ce résultat est un cas particulier du théorème de Nyquist qui, lui, s'applique en présence de zéros à partie réelle positive.

**Définition 7 (Marge de phase)**

*La marge de phase est le supplément de phase du système en boucle ouverte par rapport à  $-180^\circ$  lorsque le gain atteint 1 (ou 0 dB).*

Méthode de mesure de la marge de phase sur le lieu de Bode : repérer sur la courbe du gain la fréquence pour laquelle le gain coupe 0 dB. Relever la phase  $\phi$  pour cette pulsation. La marge de phase est  $180^\circ - \phi$ .

**Définition 8 (Marge de gain)**

*La marge de gain est l'inverse du gain du système en boucle ouverte lorsque la phase atteint  $-180^\circ$ .*

Méthode de mesure de la marge de gain sur le lieu de Bode : repérer sur la courbe du phase la fréquence pour laquelle la pulsation coupe  $-180^\circ$ . Relever le gain  $G$  ( $G_{dB}$ ) pour cette pulsation. La marge de gain est  $1/G$  (ou  $-G_{dB}$ ).

**Propriété 16**

*Un système stable a une marge de phase positive et une marge de gain supérieure à 1 (positive si on compte en dB).*

### 3.2.2 Rapidité

Comme pour un système en boucle ouverte, on définit le temps d'établissement comme étant le temps que met le système à se stabiliser. Pour obtenir une évaluation de temps de réponse, on peut donc dire qu'il est égal à trois fois la constante de temps la plus lente.

Une seconde possibilité existe pour estimer de manière approchée la rapidité d'un système asservi, en s'appuyant cette fois sur la FTBO. Pour expliquer, prenons par exemple une FTBO de la forme  $H_{bo}(s) = \frac{\omega_1}{s}$ . Son gain décroît avec une pente de  $-20$  dB/dec et coupe l'axe 0 dB à la pulsation  $\omega_1$ . Le gain en boucle fermée s'écrit alors  $H_{bf}(s) = \frac{1}{1+s/\omega_1}$ . Il s'agit d'un système du premier ordre de constante de temps  $\frac{1}{\omega_1}$ . Son temps de réponse est donc  $t_r = \frac{3}{\omega_1}$ . A partir de ce résultat, on peut en déduire un moyen de déterminer approximativement le temps de réponse de tout système.

**Propriété 17 (Temps de réponse d'un système asservi)**

Le temps de réponse d'un système asservi est approximativement égal à  $\frac{3}{\omega_1}$  où  $\omega_1$  est la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO.

**3.2.3 Précision**

Idéalement, un système asservi a un gain statique unitaire. Pour définir sa précision, on peut donner son gain statique :

$$G_{\text{bf}}(0) = \frac{G_{\text{bo}}(0)}{1 + G_{\text{bo}}(0)} \quad (3.20)$$

On peut aussi donner le gain statique du transfert entre la référence et l'erreur :

$$\frac{1}{1 + G_{\text{bo}}(0)} \quad (3.21)$$

qui doit être le plus faible possible en amplitude.

**3.2.4 Dépassement**

Le dépassement d'un système asservi se définit comme pour un système en boucle ouverte (voir paragraphe 2.2.3). Le dépassement est un critère temporel et les méthodes de synthèse des correcteurs sont généralement établies en fréquentiel (sur le diagramme de Bode ou de Black). Or, il n'y a pas de relation générale pour tous les systèmes entre le dépassement et les propriétés fréquentielles de la FTBF. On peut cependant s'appuyer sur la propriété suivante pour modifier le dépassement d'un système asservi :

**Propriété 18 (Dépassement et marge de phase)**

Plus la marge de phase d'un système asservi est élevée, plus son dépassement est réduit.

On utilise généralement des marges de phase de l'ordre de 45 à 90°.

**Exercice 16 (Marge de phase et dépassement)**

Soit un système de fonction de transfert  $H(s) = \frac{1}{s(s+a)}$ . On souhaite l'asservir avec un correcteur proportionnel de gain  $K$ .

1. Écrivez la FTBO du système.
2. Tracez le diagramme de Bode de la FTBO.

3. Déterminez l'expression de la marge de phase du système asservi. Donnez l'allure de ses variations en fonction de  $K$ .
4. Déterminez la FTBF du système.
5. Déterminez l'amplification maximale (la résonance) du système asservi. Donnez l'allure de ses variations en fonction de  $K$ .
6. Déterminez le dépassement du système. Donnez son allure en fonction de  $K$ .
7. Déduisez-en la relation entre le dépassement et la marge de phase pour le système considéré.

### 3.2.5 Rejet de perturbation

Certains systèmes sont perturbés par des signaux extérieurs. On appelle *perturbation* ces signaux et on parle de *régulation* le problème s'asservissement consistant à garder une consigne en présence de perturbation. Dans la suite, on pourra considérer un système avec une perturbation  $p(t)$  en entrée, c'est-à-dire que :

$$Y(s) = G(s)(U(s) + P(s)) \quad (3.22)$$

Pour une loi de commande  $U(s) = K(s)E(s)$ , le transfert entre  $r(t)$  et  $y(t)$  s'écrit  $Y(s) = H_{yp}(s)P(s)$  avec :

$$H_{yp}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.23)$$

Dans la bande passante, on a  $|K(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$  et  $H_{yp}(s) \simeq \frac{G(s)}{K(s)G(s)} = \frac{1}{K(s)}$ . Pour qu'un asservissement permette un bon *rejet de perturbation*, il faut que le gain de  $H_{yp}(s)$  soit faible et donc que le gain du correcteur soit élevé. L'utilisation d'un correcteur présentant un gain élevé en basse fréquence (effet intégrale) s'avère nécessaire dans les problèmes où le rejet de perturbation est nécessaire.

## 3.3 Méthodes de synthèse

### 3.3.1 Les différentes démarches

Différentes démarches sont possibles pour synthétiser un correcteur.

- Dans les cas simples, il est possible d'écrire la fonction de transfert en boucle fermée et de régler le ou les paramètres du correcteur de manière à obtenir une fonction de transfert en boucle fermée satisfaisante.
- Certaines méthodes s'appuient sur une caractérisation de la réponse du système à un échelon. C'est le cas de la fameuse méthode de Ziegler et Nichols qui s'appuie sur un modèle approché du système comportant un premier ordre en série avec un retard.
- Il est possible de synthétiser un correcteur en modélisant sa FTBO et en réglant le correcteur de manière à obtenir une marge de phase et une marge de gain satisfaisante. Une part importante des méthodes et des exercices présentés dans la suite de cette sous-partie relèvent de cette approche.

### 3.3.2 Correcteur proportionnel (P)

Le correcteur proportionnel est le plus simple des correcteurs. Il ne permet pas toujours d'obtenir des performances très élevées mais il peut suffire dans certains cas si le cahier des charges n'est pas trop contraignant ou si le système a un comportement assez simple. Expérimentalement, son réglage peut se faire directement en partant d'un gain faible et en augmentant petit à petit jusqu'à atteindre un comportement satisfaisant. Pour un gain trop élevé, le système deviendra instable ce qui se manifestera d'abord par des oscillations de plus en plus importantes.

#### Exercice 17 (Correction prop. d'un système du premier ordre)

Un système du premier ordre d'entrée  $u(t)$ , de sortie  $y(t)$  et de modèle  $\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$  est asservi par un correcteur proportionnel de gain  $K_c$ . On donne  $K = 0,2$  et  $\tau = 80$  ms

1. Déterminez l'équation différentielle liant le signal de référence  $r(t)$  et la mesure  $y(t)$ .
2. Déterminez la fonction de transfert du système en boucle fermée liant  $R(s)$  et  $Y(s)$ .
3. Déterminez les expressions du gain statique et de la constante de temps du système bouclé.
4. Déterminez le gain du correcteur permettant d'obtenir un temps d'établissement à 5 %,  $T_m$ , égal à 30 ms.

5. Calculez le gain statique obtenu.

**Exercice 18 (Correcteur prop. d'un système du second ordre)**

Soit un système de transfert  $G(s) = \frac{K}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}$ . On envisage d'asservir ce système par un correcteur proportionnel. On a  $K = 10$ ,  $\omega_1 = 10$  rad/s et  $\omega_2 = 50$  rad/s.

1. Représentez le diagramme de Bode de la FTBO.
2. Déterminez la pulsation pour laquelle la phase est à  $-135^\circ$ .
3. Déterminez la valeur du gain permettant d'obtenir une marge de phase de  $45^\circ$ .
4. Déterminez la marge de gain.
5. Déterminez de manière approchée le temps de réponse du système.
6. Déterminez la précision du système asservi.

### 3.3.3 Correcteur proportionnel intégral (PI)

L'intérêt de la correction de type intégrale est de permettre une erreur statique nulle. En effet, si le système comporte un intégrateur et se stabilise à un point d'équilibre, tous les signaux sont constants. Or, pour que la sortie d'un intégrateur soit constante, il est nécessaire que son entrée soit nulle. Si l'entrée de l'intégrateur est reliée à l'erreur de régulation, l'effet du terme intégral sera bien d'annuler cette erreur. Notons que l'erreur est annulée même en présence d'une perturbation. Annuler l'erreur en régime permanent est une chose, mais le faire rapidement en est une autre. Il convient donc d'être capable de régler le correcteur de manière adéquate.

Deux types de corrections PI sont possibles :

- en utilisant le signal d'erreur  $e(t) = r(t) - y(t)$  et en calculant la commande avec  $U(s) = K(s)E(s)$  où  $K(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ . Les fonctions de

transfert en boucle fermée s'écrivent alors :

$$H_{\text{yr}}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.24)$$

$$H_{\text{yp}}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.25)$$

$$H_{\text{ur}}(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.26)$$

$$H_{\text{up}}(s) = -\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.27)$$

$$H_{\text{er}}(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.28)$$

$$H_{\text{ep}}(s) = -\frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.29)$$

– on peut également choisir une loi de commande de la forme  $U(s) = -K_p Y(s) + \frac{K_i}{s}(R(s) - Y(s))$ .

### Exercice 19 (Correcteur PI pour système du premier ordre)

Soit un système d'équation différentielle  $\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$  avec  $\tau = 20$  ms et  $K = 0,4$ . On envisage une loi de commande proportionnelle-intégrale de la forme  $u(t) = -K_p y(t) + K_i \int^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$ .

1. Déterminez l'équation différentielle du second ordre liant la référence et la mesure et modélisant le système bouclé.
2. Montrez que l'erreur statique est nulle quelque soit les valeurs des paramètres du correcteur.
3. Déterminez les valeurs des paramètres permettant d'obtenir une pulsation propre de 200 rad/s et un amortissement de 1.

### Exercice 20 (Asservissement PI d'un système du second ordre)

Soit un système de fonction de transfert  $H(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$  avec  $a = 10$  rad/s,  $b = 40$  rad/s et  $K = 10$ . On envisage d'utiliser un correcteur PI de la forme  $K(s) = \frac{K_p}{s} (s + \frac{1}{\tau_i})$  où  $K_p$  est le gain du correcteur et  $\tau_i$  est sa constante de temps. On choisit la stratégie suivante : on règle le correcteur de manière à compenser le pôle basse fréquence du système et à avoir une marge de gain de  $45^\circ$ .

1. Tracez l'allure du diagramme de Bode du système et de celui du correcteur pour des valeurs quelconques de ses paramètres.
2. Écrivez la FTBO du système.
3. Donnez la valeur de  $\tau_i$  et simplifiez l'expression de la FTBO en conséquence.
4. Tracez le diagramme de Bode de la FTBO.
5. Donnez la valeur de  $K_p$  permettant de respecter la marge de phase spécifiée.
6. Donnez le temps de réponse approché du système.
7. Quelle est la précision du système asservi ?
8. On suppose que le système est perturbé en entrée par un signal  $p(t)$ . Calculez la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{yp}(s)$  entre  $P(s)$  et  $Y(s)$ .
9. Tracez l'allure du diagramme de Bode de  $H_{yp}(s)$ .
10. Calculez le gain maximal de  $H_{yp}(s)$ . Pour quel pulsation est-il obtenu ?

### Exercice 21 (Correction PI d'un système à retard)

On considère un système du premier ordre avec retard de fonction de transfert  $H(s) = \frac{K \exp(-t/\tau)}{s+a}$  avec  $a = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\tau = 0.1 \text{ s}$  et  $K = 1$ . On envisage d'utiliser un correcteur PI de la forme  $K(s) = \frac{K_p}{s}(s + \frac{1}{\tau_i})$ . On choisit la stratégie suivante : on règle le correcteur de manière à compenser le pôle du système et à avoir une marge de gain de  $45^\circ$ .

1. Tracez l'allure du diagramme de Bode du système et de celui du correcteur pour des valeurs quelconques de ses paramètres.
2. Écrivez la FTBO du système.
3. Donnez la valeur de  $\tau_i$  et simplifiez l'expression de la FTBO en conséquence.
4. Tracez le diagramme de Bode de la FTBO.
5. Donnez la valeur de  $K_p$  permettant de respecter la marge de phase spécifiée.
6. Donnez le temps de réponse approché du système.
7. Quelle est la précision du système asservi ?

### Méthode de l'optimum symétrique

Cette méthode permet d'obtenir de très bon réglages des correcteur PI pour de nombreuses applications. On suppose que le système à asservir a comme fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{1}{Ls(1 + \tau s)}. \quad (3.30)$$

Le correcteur PI s'écrivant  $K(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}$ , la FTBO s'écrit :

$$H_{bo}(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i L s^2 (1 + \tau s)}. \quad (3.31)$$

On règle le correcteur de la manière suivante :

- On choisit  $\tau_i$  dans un rapport  $a > 1$  donné par rapport à  $\tau$  :

$$\tau_i = a\tau \quad (3.32)$$

La FTBO s'écrit alors :

$$H_{bo}(s) = \frac{K_p}{a\tau L s^2} \frac{1 + a\tau s}{1 + \tau s} \quad (3.33)$$

Son gain complexe à la pulsation  $\omega$  s'écrit :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{K_p}{a\tau L (j\omega)^2} \frac{1 + ja\tau\omega}{1 + j\tau\omega} = \frac{K_p}{a\tau L (j\omega)^2} \frac{1 + a\tau^2\omega^2 + j\tau\omega(a-1)}{1 + a\tau^2\omega^2} \quad (3.34)$$

et son argument est :

$$\arg(H_{bo}(j\omega)) = -\pi + \arctan\left(\frac{\tau\omega(a-1)}{1 + a\tau^2\omega^2}\right) \quad (3.35)$$

Sa phase présente un maximum  $\phi_{\max}$  en  $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{a\tau}}$  et on a :

$$H_{bo}(j\omega^*) = -\frac{K_p\tau}{L} \frac{1 + j\sqrt{a}}{1 + j/\sqrt{a}} = \frac{j\sqrt{a}K_p\tau}{L} \frac{1 + j\sqrt{a}}{1 - j\sqrt{a}} \quad (3.36)$$

Le gain est :

$$|H_{bo}(j\omega^*)| = \frac{\sqrt{a}K_p\tau}{L} \quad (3.37)$$

et la phase est :

$$\phi_{\max} = \arg(H_{bo}(j\omega^*)) = -\frac{3\pi}{2} + 2 \arctan(\sqrt{a}) \quad (3.38)$$

- On règle alors le gain de manière à ce que la marge de phase corresponde au maximum de la phase, c'est-à-dire que l'on doit avoir  $|H_{bo}(j\omega^*)| = 1$ , d'où :

$$K_p = \frac{L}{\sqrt{a\tau}} \quad (3.39)$$

La constante  $a$  est choisie de manière à assurer une marge de phase  $\Delta\phi = \phi_{\max} + \pi$ . On a :

$$\Delta\phi = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan(\sqrt{a}) \quad (3.40)$$

d'où :

$$a = \tan^2 \left( \frac{\Delta\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.41)$$

### 3.3.4 Correcteur proportionnel dérivé (PD)

L'instabilité d'un système asservi est lié au fait que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte soit inférieure à  $-180^\circ$  lorsque le gain passe par 0 dB. Une des possibilité pour augmenter la phase de la boucle ouverte est d'utiliser un effet dérivé (ou aussi une avance de phase).

#### Exercice 22 (Correcteur PD et système du second ordre)

Soit un système du second ordre d'équation différentielle  $\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 100y(t) = 20u(t)$ . On envisage d'asservir ce système par un correcteur proportionnel-dérivé dont le comportement est régit par l'équation différentielle de la forme  $u(t) = K_p(r(t) - y(t)) - K_d\dot{y}(t)$ .

1. Déterminez la pulsation propre, l'amortissement et le gain statique du système en boucle ouverte.
2. Déterminez la forme de l'équation différentielle liant la référence et la mesure.
3. Déterminez les paramètres  $K_p$  et  $K_d$  du correcteur de sorte que le système en boucle ouverte ait une pulsation propre de 50 rad/s et un amortissement égal à 1.
4. Déterminez le gain statique du système asservi ainsi réglé.

### 3.3.5 Correcteur PID

### 3.3.6 Correcteur à avance de phase

Il s'agit d'un correcteur de la forme :

$$K(s) = K_p \frac{s + a}{s + b} \quad (3.42)$$

avec  $b > a$ . Comme pour l'effet dérivée, ce correcteur permet d'augmenter la bande passante d'un système en ajoutant de la phase à la boucle ouverte. Il peut être assimilé à un correcteur PD dont le gain est tronqué en haute fréquence.

#### Exercice 23 (Correction à avance de phase pour intégrateur double)

Soit un système de type double intégrateur de fonction de transfert  $H(s) = \frac{K}{s^2}$  avec  $K = 10$ . On envisage de l'asservir par un correcteur à avance de phase (3.43).

1. Représentez le diagramme de Bode du système à asservir.
2. Représentez le diagramme de Bode du correcteur.
3. Donnez la FTBO du système; donnez l'allure de son diagramme de Bode.
4. Déterminez le maximum de la phase du correcteur en fonction de  $\frac{b}{a}$  ainsi que la pulsation à laquelle ce maximum est atteint.
5. Déterminez le rapport  $\frac{b}{a}$  permettant d'apporter une phase de  $60^\circ$ .
6. Déterminez le correcteur permettant d'avoir une marge de phase de  $60^\circ$  et un temps d'établissement de 10 ms.

### 3.3.7 Correcteur à retard de phase

Il s'agit d'un correcteur de la forme :

$$K(s) = K_p \frac{s + a}{s + b} \quad (3.43)$$

avec  $b < a$ . Ce correcteur présente un gain plus élevé en basse fréquence qu'en haute fréquence. Son action est comparable à celle d'un correcteur PI dont le gain en basse fréquence est limité.



# Chapitre 4

## Asservissements numériques

Depuis les progrès de l'électronique numérique, les asservissements sont maintenant réalisés, la plupart du temps, par des calculateurs. C'est-à-dire que les mesures sont faites à des instants bien précis, appelés instants d'échantillonnage et espacés d'une période d'échantillonnage  $T_e$ . Les commandes déterminées sont appliquées sur une période d'échantillonnage :  $u_k$  est appliqué sur  $[t_k ; t_{k+1}]$ .

### 4.1 Modélisation des systèmes échantillonnés

#### 4.1.1 Transformée en $Z$

Soit  $x(t)$  un signal à temps continu. Un échantillonnage à la période  $T_e$  donne les échantillons  $x_k = x(t_k)$  avec  $t_k = kT_e$ . La transformée en  $Z$  de ce signal est définie par :

$$X(z) = x_0 + x_1z^{-1} + x_2z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x_kz^{-k} \quad (4.1)$$

#### Exercice 24 (Transformée en $Z$ de signaux simples)

Déterminez la transformée en  $Z$  des signaux suivants :

1.  $x_0 = 1, x_k = 0 \quad \forall k \neq 0$
2.  $x_k = 1 \quad \forall k \geq 0$

Soit  $y_k$  le signal retardé d'une période obtenu à partir du signal  $x_k$ . On a  $y_0 = 0$  et  $y_k = x_{k-1}$  pour  $k \geq 1$ . Sa transformée en  $\mathcal{Z}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} z^{-k} \\
 &= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \\
 &= z^{-1} X(z)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

On peut donc en déduire la propriété suivante :

**Propriété 19 (Opérateurs retard et avance)**

*Retarder un signal d'une période correspond à multiplier sa transformée en  $\mathcal{Z}$  par  $z^{-1}$ . On dit que  $z^{-1}$  est l'opérateur retard. Inversement, avancer un signal d'une période correspond à multiplier sa transformée en  $\mathcal{Z}$  par  $z$ . On dit que  $z$  est l'opérateur avance.*

**Propriété 20 (Linéarité)**

*La transformée en  $\mathcal{Z}$  est une opération linéaire. Ainsi,  $\mathcal{Z}(x(k) + y(k)) = \mathcal{Z}(x(k)) + \mathcal{Z}(y(k))$  et  $\mathcal{Z}(\lambda x(k)) = \lambda \mathcal{Z}(x(k))$ .*

### 4.1.2 Fonction de transfert

Soit un système dynamique à temps discret d'entrée  $u_k$  et de sortie  $y_k$ . On dit que ce système est *causal* si la sortie  $y_k$  ne dépend que des entrées  $u_l$  pour  $l \leq k$  et des valeurs précédentes des sorties  $y_l$ ,  $l < k$ , soit :

$$y_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \tag{4.3}$$

On dit que le système est strictement causal si, en plus,  $y_k$  ne dépend pas de  $u_k$ .

$h(k)$	$H(z)$
$\delta(k)$	1
$u(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$a^k u(k)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$ka^k u(k)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$\cos(\omega_0 k) u(k)$	$\frac{1-z^{-1} \cos(\omega_0)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0)+z^{-2}}$
$\sin(\omega_0 k) u(k)$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1-2z^{-1} \sin(\omega_0)+z^{-2}}$
$a^k \cos(\omega_0 k) u(k)$	$\frac{1-az^{-1} \cos(\omega_0)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0)+a^2 z^{-2}}$
$a^k \sin(\omega_0 k) u(k)$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1-2az^{-1} \sin(\omega_0)+a^2 z^{-2}}$

TAB. 4.1 – Exemples de transformées en  $\mathcal{Z}$  ( $u(k)$  est l'échelon unitaire et  $\delta(k)$  est le signal impulsionnel)

Pour un systèmes linéaire, l'équation 4.3 s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 y_k &= b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots \\
 &= \sum_{l=0}^m b_l u_{k-l} - \sum_{l=1}^n a_l y_{k-l}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

En appliquant la transformée en  $\mathcal{Z}$  aux signaux  $u_k$ ,  $y_k$  et à leurs valeurs retardées, on obtient :

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \dots \\
 &= \sum_{l=0}^m b_l z^{-l} U(z) - \sum_{l=1}^n a_l z^{-l} Y(z)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

On obtient alors :

$$Y(z) = H(z)U(z) \tag{4.6}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} \\
 &= \frac{\sum_{l=0}^m b_l z^{-l}}{\sum_{l=1}^n a_l z^{-l}}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

avec  $a_0 = 1$ . La fonction de transfert a un dénominateur d'ordre  $n$  et un numérateur d'ordre  $m$ . Le système est propre si  $m \leq n$ . Il est strictement propre si  $m < n$ . L'ordre du système est l'ordre de son dénominateur. Les pôles du système sont les zéros du dénominateur. Ses zéros sont les zéros du numérateur.

**Propriété 21 (Fonction de transfert et réponse à une impulsion)**

*La fonction de transfert d'un système à temps discret est égal à la transformée en  $\mathcal{Z}$  de sa réponse à une impulsion.*

**Exercice 25 (Équation aux récurrences)**

Soit le système à temps discret de fonction de transfert  $H(z) = \frac{z+1}{z^2-1.2z+0.35}$ .

1. Déterminez l'équation aux récurrences permettant de calculer la sortie du système en fonction des valeurs précédentes de l'entrée et de la sortie.
2. Déterminez les 5 premiers échantillons de la réponse du système à un échelon unitaire.

**Exercice 26 (Système du premier ordre)**

Soit le système à temps discret de fonction de transfert  $H(z) = \frac{2}{z-0.8}$ . On considère la réponse  $y(k)$  de ce système à une entrée  $u(k)$  égale à un échelon unitaire. On prend comme condition initiale du système  $y(0) = 0$ .

1. Déterminez l'expression de la transformée en  $\mathcal{Z}$  de la réponse du système.
2. Déduisez-en les valeurs des 5 premiers échantillons de cette réponse.

### 4.1.3 Propriétés des systèmes à temps discret

#### Gain statique

Pour une entrée constante  $u_k = U$ , si le système est stable, il se stabilise avec une sortie constante  $Y$ . On peut alors écrire  $y_k = y_{k-1} = y_{k-2} \cdots = Y$  et  $u_k = u_{k-1} = u_{k-2} \cdots = U$ . Cela revient à considérer que l'opérateur avance est égale à l'identité ( $z = 1$ ). Ainsi, on a :

$$Y = H(1)U \tag{4.8}$$

C'est-à-dire que le gain statique d'un système à temps discret de fonction de transfert  $H(z)$  est  $H(1)$ .

## Stabilité

### Propriété 22 (Stabilité)

Un système de fonction de transfert  $H(z)$  est stable si tous les pôles de  $H(z)$  ont un module strictement inférieur à 1.

Considérons un système du premier ordre de la forme  $H(z) = \frac{K}{z-a}$ . Son équation aux récurrences s'écrit :

$$y_{k+1} = ay_k + Ku_k \quad (4.9)$$

La réponse à un signal nul à partir d'une condition initiale  $y_0$  s'écrit :

$$\begin{aligned} y_1 &= ay_0 \\ y_2 &= a^2y_0 \\ &\vdots \\ y_k &= a^ky_0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pour que  $a^k$  ne tende pas vers l'infini, il faut et il suffit que son module soit inférieur à 1. Pour un systèmes d'ordre plus élevé, on peut le décomposer en une somme d'éléments simples du premier ordre, ce qui fait que cette propriété reste valable.

### 4.1.4 Systèmes continus échantillonnés

Soit le système à temps continu  $H(s)$  commandé de manière numérique avec une période d'échantillonnage  $T_e$ . Ainsi, on a la tension qui est bloquée entre deux instants d'échantillonnage<sup>1</sup>  $u(t) = u_k$ , pour  $t \in [t_k ; t_{k+1}]$  et  $y_k = y(t_k)$ . Le système d'entrée  $u_k$  et de sortie  $y_k$  est un système échantillonné. Nous allons voir qu'il s'agit d'un système linéaire et que l'on peut déterminer sa fonction de transfert.

Puisque la fonction de transfert d'un système à temps discret est la transformée en  $\mathcal{Z}$  de sa réponse à une impulsion, commençons par alimenter le système avec  $u_k = \delta_k$ , c'est-à-dire avec  $u_0 = 1$  et  $u_k = 0 \forall k \neq 0$ . La tension  $u(t)$  correspondante est alors un créneau égale à un entre  $t_0$  et  $t_1$  qui s'écrit

---

<sup>1</sup>On parle de bloqueur d'ordre zéro par opposition au bloqueur d'ordre un pour lequel la commande  $u(t)$  varie de manière affine entre  $u_k$  et  $u_{k+1}$ .

aussi  $u(t) = u_e(t) - u_e(t - T_e)$  où  $u_e(t)$  représente l'échelon unitaire. Avec la transformée de Laplace, on a  $U(s) = \frac{1}{s} - \frac{\exp(-T_e s)}{s} = \frac{1 - \exp(-T_e s)}{s}$ . La sortie s'écrit alors dans le domaine de Laplace  $Y(s) = \frac{H(s)}{s}(1 - \exp(-T_e s))$ , c'est-à-dire que c'est la différence entre  $\frac{H(s)}{s}$  et le même signal retardé d'une période. En passant en  $\mathcal{Z}$  et en sachant qu'un retard est équivalent à une multiplication par  $z^{-1}$ , on obtient  $Y(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H(s)}{s}\right)$ , ce qui donne la fonction de transfert du système échantillonné :

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H(s)}{s}\right) \quad (4.11)$$

### Exercice 27 (Système à temps continu échantillonné)

Déterminez la fonction de transfert du système à temps discret obtenu à partir du système à temps continu de fonction de transfert  $H(s) = \frac{K}{s+a}$  avec un bloqueur d'ordre zéro en entrée et un échantillonnage en sortie ; les deux opérations étant synchronisées à la période  $T_e$ .

La fréquence d'échantillonnage doit être choisie de manière appropriée par rapport aux dynamiques du système que l'on souhaite réguler. Il faut choisir une fréquence d'échantillonnage supérieure aux fréquences propres des modes à prendre en compte. Un rapport de 5 à 10 est généralement recommandé. Par exemple, pour un système à temps continu de fonction de transfert  $H(s) = \frac{K}{(s+10)(s+2)}$ , le mode le plus rapide a comme constante de temps  $\tau_{\min} = \frac{1}{10} = 100$  ms. On pourra donc choisir  $T_e = 10$  ms.

#### 4.1.5 Lieu des pôles

Un pôle  $p_k$  en temps continu se retrouve en  $z_k = \exp(T_e p_k)$  en temps discret. Considérons différents types de pôles.

- Un pôle réel  $p_k = -a$  se retrouve en  $z_k = \exp(-aT_e)$ . Ainsi, l'axe réel en continu se retrouve sur la partie positive de l'axe réel en discret. On a  $|z_k| < 1 \iff -a < 0$ , c'est-à-dire que l'on vérifie que les conditions de stabilité en continu ( $\text{Re}(p_k) < 0$ ) et en discret ( $|z_k| < 1$ ) coïncident.
- Un pôle imaginaire pur  $p_k = \pm j\omega_0$  se retrouve en  $z_k = \exp(\pm j\omega_0 T_e)$ , c'est-à-dire sur le cercle de rayon unitaire. Dans le domaine continu, l'axe imaginaire marque la limite de stabilité ; dans le domaine discret, c'est le cercle de rayon unitaire.

- Un pôle complexe correspondant au second ordre  $\frac{K}{s^2+2\xi\omega_0s+\omega_0^2}$  sont  $p_k = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ . En discret, ils se retrouvent en :

$$z_k = \exp(-\xi\omega_0 T_e) \exp(\pm j\omega_0 T_e \sqrt{1-\xi^2}) \quad (4.12)$$

Ils ont un module égal à  $\exp(-\xi\omega_0 T_e)$  (ils sont stables si  $\xi\omega_0 > 0$ ) et un argument égal à  $\pm\omega_0 T_e \sqrt{1-\xi^2}$ .

## 4.2 Correcteur discret équivalent

Dans le cas où la fréquence d'échantillonnage est élevée par rapport aux dynamiques du système, il est possible de concevoir un correcteur numérique à partir d'une synthèse en continu.

Pour les systèmes à temps discret, l'opérateur retard d'une période  $T_e$  est  $z^{-1}$ . Pour les systèmes à temps continu, c'est  $\exp(-T_e s)$  dans le domaine de Laplace. On peut donc passer du domaine  $\mathcal{Z}$  au domaine  $\mathcal{L}$  par la relation :

$$z = \exp(T_e s) \quad (4.13)$$

Cette relation exacte ne permet pas facilement de déduire un correcteur à temps discret à partir d'un correcteur à temps continu. On utilise pour cela des approximations.

L'approximation d'Euler consiste à approcher la dérivée par une différence finie,  $\dot{y}(t_k) \simeq \frac{1}{T_e}(y(t_{k+1}) - y(t_k))$  ou  $\dot{y}(t_k) \simeq \frac{1}{T_e}(y(t_k) - y(t_{k-1}))$ , ce qui s'écrit :

$$s \simeq \frac{z-1}{T_e} \quad (4.14)$$

ou

$$s \simeq \frac{1-z^{-1}}{T_e} \quad (4.15)$$

On utilise la seconde expression car elle est causale<sup>2</sup>. A partir d'un correcteur à temps continu donné sous forme de fonction de transfert  $H(s)$ , on détermine la fonction de transfert en  $\mathcal{Z}$  en remplaçant  $s$  par son expression en fonction

---

<sup>2</sup>C'est à dire que le calcul de la dérivée ne se fait qu'à partir des valeurs antérieures des mesures.

de  $z$  ou de  $z^{-1}$ .

Une approximation un peu meilleure de  $s$  est également souvent utilisée. Il s'agit de la transformée bilinéaire de Tustin qui s'écrit :

$$s \simeq \frac{2(1 - z^{-1})}{T_e(1 + z^{-1})} \quad (4.16)$$

### Exercice 28 (Correcteur PI discret)

Soit un correcteur PI à temps continu sous la forme  $C(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}$ . Déterminez la fonction de transfert du correcteur à temps discret équivalent par les méthodes d'Euler et de Tustin. Donnez les équations aux récurrences correspondantes.

### Exemple de synthèse

A titre d'illustration, voici le cas d'un système à temps continu de fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1}{Ls(1 + \tau_e s)} \quad (4.17)$$

avec  $L = 0,1$  et  $\tau_e = 10^{-2}$  s asservi par un correcteur PI :

$$K(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s} \quad (4.18)$$

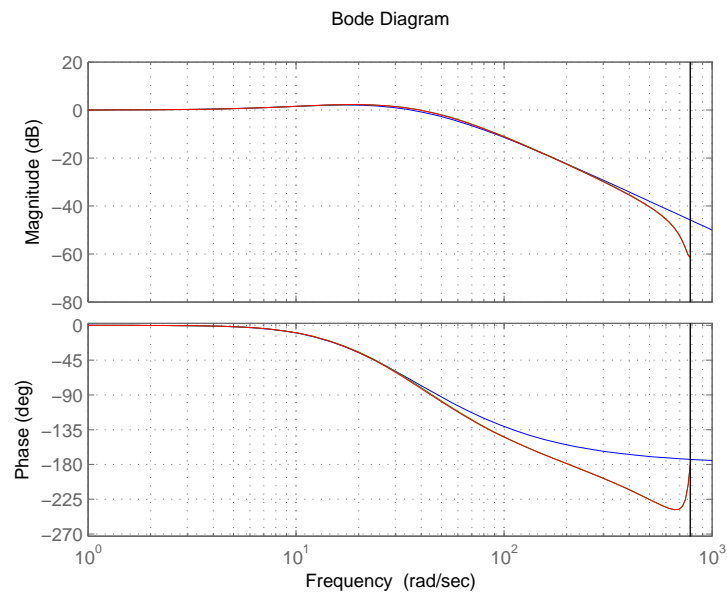
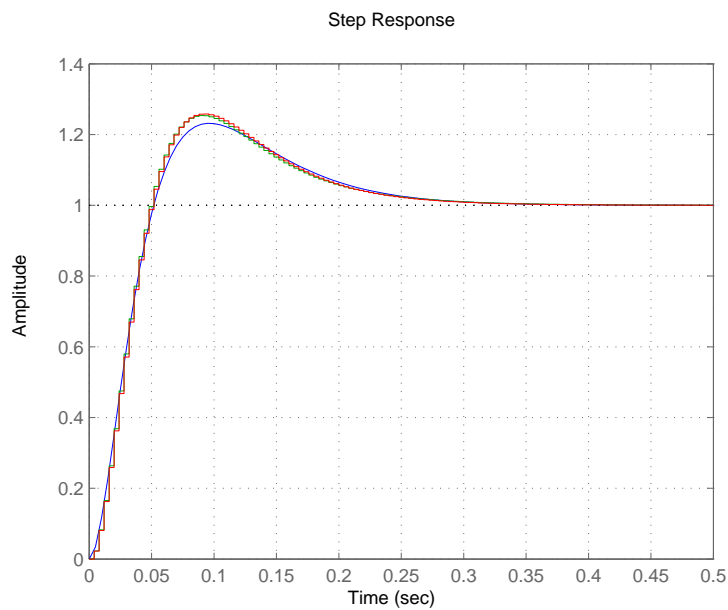
réglé par la méthode de l'optimum symétrique (voir le paragraphe 3.3.3).

Le système étant commandé par un régulateur numérique travaillant à la fréquence  $f_e = \frac{1}{T_e}$ , avec une entrée bloquée, le modèle du système discret avec un bloqueur d'ordre zéro est d'abord obtenu. On développe ensuite deux correcteurs discrets : le premier obtenu par la méthode d'Euler ( $K_1(s) = \frac{K_p (\tau_i + T_e) z^{-\tau_i}}{\tau_i (z-1)}$ ) et le second obtenu par la méthode de Tustin.

Les résultats obtenus avec le système continu et avec les correcteurs discrets pour  $T_e = 4$  ms sont donnés sur les courbes<sup>3</sup> 4.1 et 4.2. On observe un comportement des asservissements numériques très proche de celui de l'asservissement analogique, ce qui est rendu possible par une valeur relativement faible de  $T_e$ .

---

<sup>3</sup>Le tracé du diagramme de Bode est effectué pour les fréquences inférieures à la fréquence de Shannon  $\frac{f_e}{2}$  avec  $z = \exp(T_e s)$ .

FIG. 4.1 – Diagramme de Bode du système asservi obtenu avec  $T_e = 4$  msFIG. 4.2 – Réponse à un échelon du système asservi obtenu avec  $T_e = 4$  ms

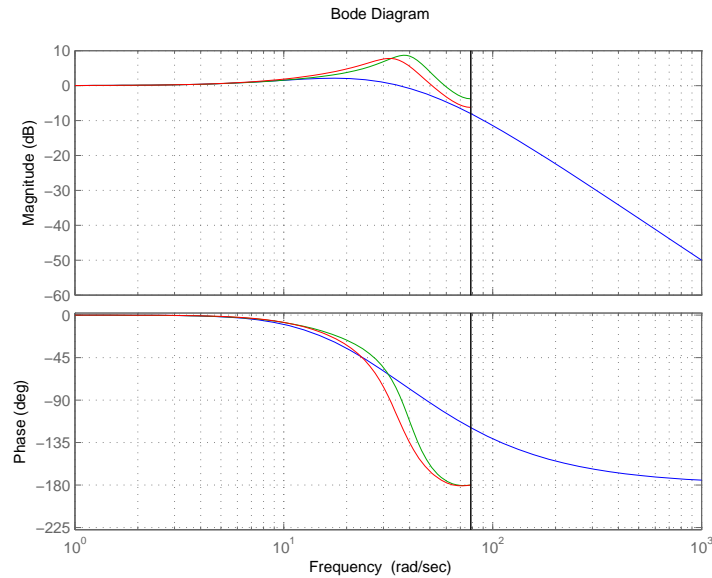


FIG. 4.3 – Diagramme de Bode du système asservi obtenu avec  $T_e = 40$  ms

Les résultats obtenus pour  $T_e = 40$  ms sont donnés sur les courbes 4.3 et 4.4. Bien que l'asservissement reste satisfaisant, on observe une augmentation de l'écart de comportement entre le système continu et les systèmes numériques, liés à une valeur assez élevée de  $T_e$ .

Le programme Matlab permettant d'obtenir ces courbes est le suivant :

```
L = 0.1; toe = 10e-3;
G = tf(1,L*[toe 1 0]);
a = 10; toi = a*toe; Kp = L/(sqrt(a)*toe);
K = tf(Kp*[toi 1],[toi 0]);
Hbo = G*K;
Hbf = feedback(Hbo,1);
Te = 40e-3;
Gn = c2d(G,Te,'zoh'); % Conversion continu/discret
K1 = Kp/toi*tf([toi+Te -toi],[1 -1],Te); % Euler
K2 = c2d(K,Te,'tustin');
Hbon1 = Gn*K1; Hbfn1 = feedback(Hbon1,1);
Hbon2 = Gn*K2; Hbfn2 = feedback(Hbon2,1);
figure(1); bode(Hbf,Hbfn1,Hbfn2,{1,1e3}); grid on
```

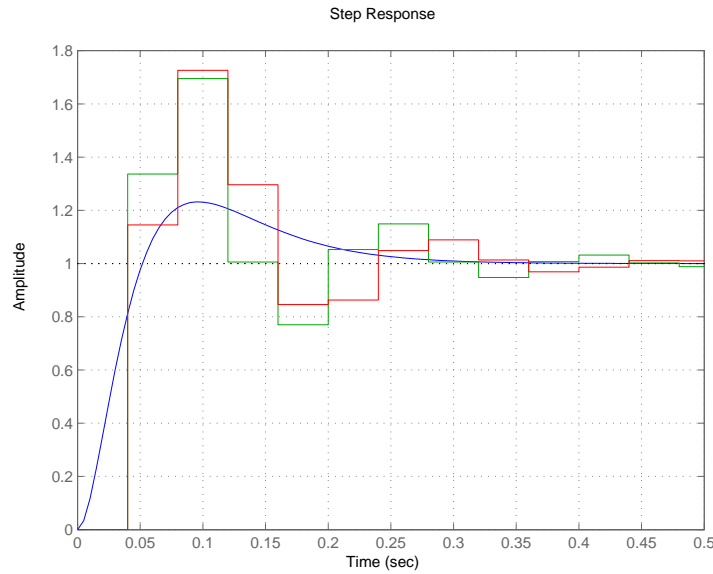


FIG. 4.4 – Réponse à un échelon du système asservi obtenu avec  $T_e = 40$  ms

```
figure(2); step(Hbf,Hbfn1,Hbfn2,0.5); grid on
```

### 4.3 Synthèses directes

De nombreuses méthodes sont disponibles qui permettent de synthétiser directement un correcteur échantillonné. Nous présentons ici une méthode relativement simple du point de vue conceptuel mais d'un intérêt pratique assez limité, notamment en ce qui concerne la robustesse. Vous trouverez dans la littérature d'autres méthodes.

Soit  $H(z)$  la fonction de transfert du système. Imaginons que l'on dispose d'un modèle de référence  $H_{bf}(s)$  pour le comportement de la boucle fermée. A quelle condition peut on trouver un correcteur  $C(z)$  permettant d'avoir le comportement en boucle fermé souhaité ?

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$H_{bf}(z) = \frac{H(z)C(z)}{1 + H(z)C(z)} \quad (4.19)$$

On peut voir cette relation comme une équation en  $C(z)$ . Sa résolution donne :

$$C(z) = \frac{H_{\text{bf}}(z)}{(1 - H_{\text{bf}}(z))H(z)} \quad (4.20)$$

L'application directe de cette formule peut entraîner des correcteurs non causaux<sup>4</sup> et donc impossibles à réaliser. Pour que le correcteur soit causal, on peut ajouter des retards purs à  $H_{\text{bf}}(z)$ .

### Exemple de synthèse

On s'intéresse ici à la correction d'un système de fonction de transfert de la forme  $H(z) = \frac{K}{z+a}$ . On veut que le transfert en boucle fermée soit de type réponse pile, c'est à dire que  $H_{\text{bf}}(z) = z^{-n}$  où l'entier  $n$  est le plus petit possible. L'expression 4.20 donne :

$$C(z) = \frac{z^{-n}(z+a)}{K(1-z^{-n})} \quad (4.21)$$

Pour  $n = 0$ , le correcteur n'est pas défini. Pour  $n = 1$ , on obtient :

$$C(z) = \frac{1+az^{-1}}{K(1-z^{-1})} \quad (4.22)$$

qui est causal. L'équation aux récurrences donne :

$$y(k+1) = y(k) + \frac{1}{K}u(k+1) + \frac{a}{K}u(k) \quad (4.23)$$

Ce correcteur n'est pas strictement causal; c'est-à-dire qu'il nécessite de connaître  $u(k+1)$  pour déterminer  $y(k+1)$ . Pour obtenir un correcteur strictement causal, on prend  $n = 2$ , ce qui donne comme correcteur :

$$C(z) = \frac{z^{-1}+az^{-2}}{K(1-z^{-2})} \quad (4.24)$$

L'équation aux récurrences s'écrit alors :

$$y(k+1) = y(k-1) + \frac{1}{K}u(k) + \frac{a}{K}u(k-1) \quad (4.25)$$

Les signaux de commande et de mesure obtenus en réponse à un échelon unitaire avec  $K = 0,2$  et  $a = 0,9$  sont donnés sur la figure 4.5.

<sup>4</sup>Un correcteur est non causal s'il nécessite de calculer l'avance du signal d'entrée.

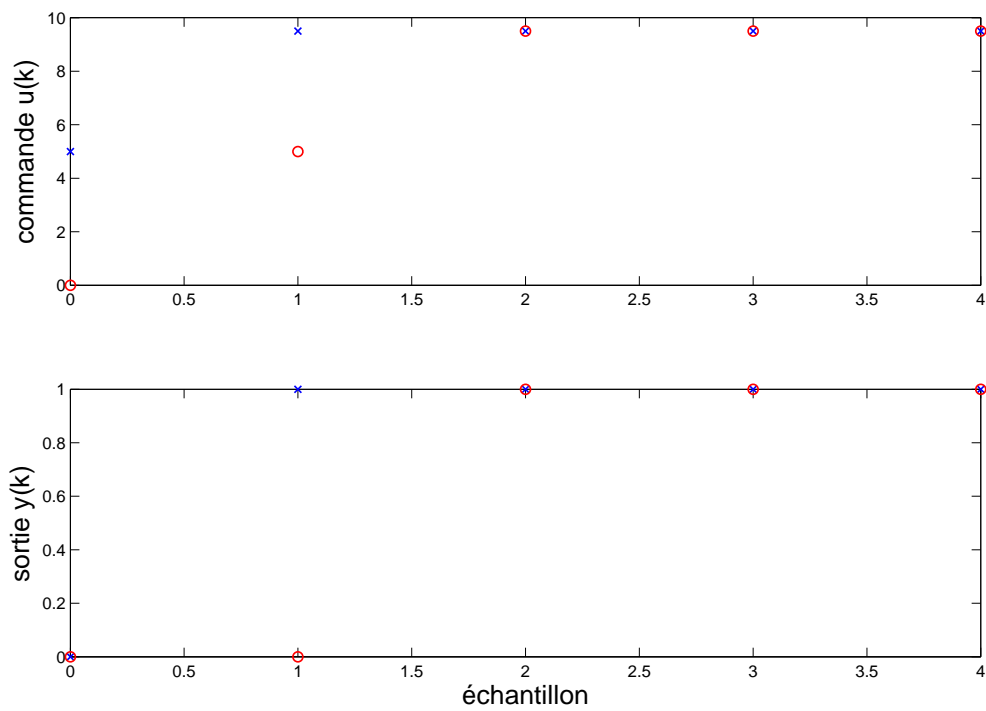


FIG. 4.5 – Commande et mesure d'un système avec un correcteur à réponse pile ( $x : n = 1$ ;  $o : n = 2$ )



# Annexe A

## Décomposition en éléments simples

Toute fraction rationnelle en  $s$  peut s'écrire comme une somme d'éléments simples de la forme  $\lambda_k s^k$ ,  $\frac{\mu_k}{s+p_k}$  ou  $\frac{\alpha_k s + \beta_k}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2}$ . Par exemple, on peut écrire :

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{\lambda_1}{s+a} + \frac{\lambda_2}{s+b} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{1}{(s+a)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{(s+a)^k} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s + b_0} = \lambda_1 s + \lambda_0 + \frac{\mu}{s + b_0} \quad (\text{A.3})$$

Pour obtenir la décomposition en éléments simples, il faut :

1. Déterminer la structure de la décomposition ;
2. Déterminez les coefficients de la décomposition.

Pour déterminer les coefficients de cette décomposition, on peut chercher à identifier directement les deux expressions, ce qui aboutit à la résolution d'un système d'équations comportant autant d'équations que de paramètres inconnus. Une autre approche, plus simple, consiste à déterminer à déterminer un par un chacun des coefficients en utilisant des valeurs particulières. Par exemple, pour déterminer le coefficient  $\lambda_1$  de l'équation A.1, on peut multiplier les deux termes de l'équation par  $s + a$  puis prendre comme valeur particulière  $s = -a$ , de manière à annuler une partie des termes. On obtient alors  $\lambda_1 = \frac{1}{b-a}$ . De la même manière, on obtient  $\lambda_2 = \frac{1}{a-b}$ .

**Exercice 29**

Décomposez en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. 
$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} \quad (\text{A.4})$$

2. 
$$\frac{s+a}{s+b} \quad (\text{A.5})$$

3. 
$$\frac{s+a}{(s+b)^2} \quad (\text{A.6})$$

4. 
$$\frac{1}{(s+a)^2(s+b)} \quad (\text{A.7})$$

5. 
$$\frac{s+a}{(s+b)(s+c)} \quad (\text{A.8})$$

6. 
$$\frac{s+a}{(s+b)^2(s+c)} \quad (\text{A.9})$$

# Bibliographie

- [1] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and I. Zambetakis, *Modélisation et Identification des Process*, Technip.
- [2] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne, *Automatique des Systèmes Continus*, Technip.
- [3] M. Rivoire and J.L. Ferrier, *Cours d'Automatique*, Eyrolles.
- [4] R.H. Bishop, *Modern Control Systems Analysis and Design using Matlab and Simulink*, Addison-Wesley.
- [5] J.L. Martin de Carvalho, *Dynamical Systems and Automatic Control*, Prentice-Hall.
- [6] C.L. Phillips and R.D. Harbor, *Feedback Control Systems*, Prentice-Hall.
- [7] V. Minzu and B. Lang, *Commande Automatique des Systèmes Linéaires Continus - Cours avec Applications utilisant Matlab*, Ellipses.
- [8] J.J. DiStefano, A.R. Stubberud, and I.J. Williams, *Systèmes Asservis*, McGraw-Hill.
- [9] E. Ostertag, *Systèmes et Asservissements Continus*, TechnoSup, Ellipses.
- [10] E. Godoy and E. Ostertag, *Commande Numérique des Systèmes*, TechnoSup, Ellipses.
- [11] G.F. Franklin, J.D. Powell, and A. Emami-Noeimi, *Feedback Control of Dynamical Systems*, Addison-Wesley.
- [12] P. Siary, *Automatique de Base*, Ellipses.
- [13] A. Crosnier, G. Abba, B. Jouvencel, and R. Zapata, *Ingénierie de la Commande des Systèmes*, Ellipses.
- [14] P. de Larminat, *Automatique*, Hermès.
- [15] J.C. Gille, P. Decaulne, and M. Pélegrin, *Dynamique de la Commande Linéaire*, Dunod.