Commande Optimale

Edouard Laroche

ENSPS - 3A ISAV

laroche@lsiit.u-strasbg.fr
http://eavr.u-strasbg.fr/perso/edouard/Student/

Objectifs et Evaluation

☞ Objectifs

- ➢ Connaissance des méthode de commande optimale
- ➢ Capacité à mettre en oeuvre une telle commande

☞ Evaluation

- ➢ Bureau d'étude en simulation

Plan

- ➢ Généralités sur les systèmes dynamiques
- ➢ Introduction à la commande optimale
- ➢ Commande Linéaire Quadratique
- ➢ Commande Linéaire Quadratique Gaussienne
- ➢ Etude d'un cas pratique

Notations

- hermicien d'un vecteur où d'une matrice $M^H = (M^*)^T = (M^T)^*$
- dérivée d'un vecteur par rapport à un vecteur $\left(\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j}$

Introduction sur les systèmes dynamiques

☞ Différents systèmes

➢ Système à temps continu $\dot{x} = f(x, u, t)$ / à temps discret $x_{k+1} = f(x_k, u_k, t_k)$

➢ Systèmes à temps variant $\dot{x} = f(x, u, t)$ / à temps invariant $\dot{x} = f(x, u)$

➢ Système linéaire LTV $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ou LTI $\dot{x} = Ax + Bu$

☞ Propriétés

➢ Commandabilité, stabilisabilité

➢ Observabilité, détectabilité

☞ Différents types d'asservissement

- ➢ retour statique d'état
- ➢ retour statique de sortie
- ➢ retour dynamique d'état
- ➢ retour dynamique de sortie
- ➢ remarque : équivalence entre retour dynamique et retour statique

☞ Propriétés des systèmes asservis

- Stabilité
- Valeurs singulières (réponses fréquentielles)
- Performances : bande passante
- Robustesse
  - Marge de module
  - Roll-off

Introduction à la Commande Optimale

☞ Système

- ➢ Système à temps continu $\dot{x} = f(x, u, t)$
- ➢ avec $x(t_0) = x_0$

☞ Critère

- ➢ Minimiser $J(x_0, t_0, u) = \theta(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t)dt$
- ➢ La commande optimale est $\tilde{u} = \text{arg}_u \min J(x_0, t_0, u)$
- ➢ La valeur optimale du critère est $\tilde{J}(x_0, t_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u})$

☞ Contraintes

➢ Sur le temps final : libre ou imposé

➢ Sur l'état final $x_f \in X_f$

➢ Sur la commande $u \in U$

☞ Principe d'optimalité de Bellman

➢ Notons $u_{[t_1,t_f]}$ la commande sur $[t_1, t_f]$ avec $t_0 < t_1 < t_f$

➢ Principe d'optimalité de Bellman: la trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1, t_f]$ avec comme condition initiale $x(t_1)$.

➢ Formulation mathématique :
$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_{u_{[t_0,t_1]}} \left(\int_{t_0}^{t_1} \phi(x(t), u(t), t) dt + \tilde{J}(x_1, t_1) \right)$

➢ Application : recherche récursive d'un chemin optimal

☞ Principe du maximum de Pontriaguine

- ➢ Lagrangien $L(x,u,p,t) = \phi(x,u,t) + p^T f(x,u,t)$ (p : état adjoit)
- ➢ La solution optimale du problème sans contrainte vérifie le principe du maximum :
  - ∘ $\frac{\partial L}{\partial x} = -\dot{p}^T$: équation adjointe, avec $p(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial x}(x(t_f), t_f)$ dans le cas d'un état final libre ;
  - ∘ $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$; il s'agit de la condition de transversabilité dans le cas où aucune contrainte n'est imposée sur u ;
  - ∘ $\frac{\partial L}{\partial p} = \dot{x}^T$, avec $x(t_0)$ donné ; il s'agit de l'équation du système $\dot{x} = f(x,u,t)$.

☞ Equation d'Euler-Lagrange

- Un système mécanique d'énergie cynétique T et d'énergie potentielle U se comporte de manière à minimiser l'action $S = \int_{t_0}^{t_f} (T - U)dt$ (Principe de moindre action de Maupertuis)
- Système $\dot{q} = u$
- Critère $J(q, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t))dt$ avec $L = T - U$
- Exercice : en appliquant le principe du mamimum de Pontriaguine, démontrez l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

☞ Commande bang-bang

- Il s'agit des commandes à temps minimal avec des contraintes intervalle sur les commandes
- La commande optimale est alors toujours égale au maximum ou au minimal
- Exemple illustratif :
  - Système linéaire à une entrée $\dot{x} = Ax + bu$, $x(t_0) = x_0$
  - coût $J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$ (temps minimal)
  - contrainte sur l'entrée $-1 \leq u(t) \leq 1$
  - contrainte sur l'état final $x(t_f) = 0$
  - temps final libre (toujours le cas pour un temps minimal)

➢ Application du principe du maximum

- Le Lagrangien est $L(x,u,p,t) = 1 + p^T Ax + p^T bu$
- Le critère s'écrit $J = \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,p,t)dt$. La commande minimisant le critère est $\tilde{u}(t) = -\mathrm{sign}(b^T p(t))$.
- L'équation adjointe est $\dot{p} = -A^T p$ avec $p(t_f)$ libre (car $x(t_f)$ imposé)
- Equation d'état $\dot{x} = Ax - b\,\mathrm{sign}(b^T p)$

➢ Système 'intégrateur double'

- $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

- $$\exp(At) = I + At + \frac{1}{2}A^2 t^t + \cdots = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

➢ Résolution

- $\dot{p} = -A^T p \;\Rightarrow\; p(t) = \exp(-A^T(t-t_f))p(tf)$

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_1(t_f) && (3)\\ p_2(t) &= (t_f - t)p_1(t_f) + p_2(t_f) && (4)\\ u(t) &= \mathsf{sign}(p_2(t)) && (5) \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(A(t-t_f))x(t_f) + \int_{t_f}^{t} \exp(A(t-\tau))bu(\tau)\mathsf{d}\tau && (6)\\ &= -\int_{t}^{t_f} \begin{bmatrix} t-\tau \\ 1 \end{bmatrix} \mathsf{sign}((t_f-\tau)p_1(t_f)+p_2(t_f))\mathsf{d}\tau && (7) \end{aligned}$$

➢ Caractérisation des points de commutation $x(t_s)$ définis par $(t_f - t_s)p_1(t_f) + p_2(t_f) = 0$.

$$x(t_s) = -\int_{t_s}^{t_f} \begin{bmatrix} t_s - \tau \\ 1 \end{bmatrix} \mathsf{sign}((t_s - \tau)p_1(t_f))\mathsf{d}\tau \tag{8}$$

$$= \mathsf{sign}(p_1(t_f)) \int_{t_s}^{t_f} \begin{bmatrix} t_s - \tau \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$= \mathsf{sign}(p_1(t_f)) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(t_f - t_s)^2 \\ t_f - t_s \end{bmatrix} \tag{10}$$

Pour $p_1(t_f) > 0$, les points de commutation appartiennent à la branche de parabole d'équation $x_1 = -\frac{1}{2}{x_2}^2$ avec $x_2 > 0$; pour $p_1(t_f) < 0$, ils appartiennent à la parabole d'équation $x_1 = \frac{1}{2}{x_2}^2$ avec $x_2 < 0$. Le lieu complet est défini par $x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2| = 0$.

➢ Loi de commande optimale $u(t) = -\mathsf{sign}(x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|)$

➢ Représentation des trajectoires dans l'espace d'état

Commande Linéaire Quadratique

☞ Horizon fini

➢ Position du problème

- Système $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$
- Critère $J(x_0, u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}\left(x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right) dt$
  avec $Q = Q^T \geq 0$ et $R = R^T > 0$

➢ Formulation du problème par Pontriaguine avec
$L(x, u, p, t) = p^T A(t)x + p^T B(t)u + \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u)$

- $\frac{\partial L}{\partial u} = B^T(t)p + R(t)u = 0$
- $\dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -A^T(t)p - Q(t)x$
- $p(t_f) = Sx(t_f)$

➢ Reformulation

- $u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p(t)$
- $\dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p(t)$
- $\dot{p} = -A^T(t)p - Q(t)x$

➢ système Hamiltonien :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \qquad (11)$$

➢ Résolution

- écrivons $p(t) = P(t)x(t)$ avec $P(t_f) = S$
- alors, $\dot{p}(t) = -\left(A^T(t)P(t) + Q(t)\right)x(t)$
- ce qui donne $(\dot{P} + PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q)x = 0$
- on obtient une équation (différentielle) de Riccati :
  $\dot{P} + PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$ avec $P(t_f) = S$

➢ Solution : $u(t) = -K(t)x(t)$ avec $K(t) = -R(t)^{-1}B(t)^TP(t)$.

☞ Horizon infini

➢ Position du problème

- On a nécessairement $x(t_f) = 0$ et la pondération sur $x(t_f)$ n'a plus de sens
- $J(x_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) \right) dt$
- Système LTI $\dot{x} = Ax + Bu$

➢ Solution

- $u(t) = -Kx(t)$
- avec $K = -R^{-1}B^TP$
- et P solution de l'équation algébrique de Riccati
  $PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$

☞ Commande LQ à temps discret : horizon fini

➢ Position du problème

- $x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$
- $J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n} x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)$

➢ Résolution par le Lagrangien

- $L = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2}x^T(k)Q(k)x(k) + \frac{1}{2}u^T(k)R(k)u(k) + p^T(k+1)\left(-x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k)\right)$
- $\frac{\partial L}{\partial u(k)} = R(k)u(k) + B^T(k)p(k+1) = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial x(k)} = Q(k)x(k) - p(k) + A^T(k)p(k+1) = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial p(k+1)} = -x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k) = 0$

➢ Reformulation

- Commande $u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)$ avec $u(n) = 0$ et donc $p(n+1) = 0$.
- L'équation adjointe pour $k = n$ donne $p(n) = Q(n)x(n)$, on choisit alors $p(k) = P(k)x(k)$ avec $P(n) = Q(n)$

➢ Solution

- $u(k) = -K(k)x(k)$ avec
- $K(k) = \tilde{R}^{-1}(k)B^T(k)P(k+1)A(k)$ et
- $\tilde{R}(k) = R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)$.

➢ Détermination de $P(k)$

- $P(k) = Q(k) + A^T(k)P(k+1)(A(k) - B(k)K(k))$
- ce qui est équivalent à $P(k) = Q(k) + A^T(k)M(k+1)A(k)$
- avec l'équation de Riccati discrète $M(k+1) = P(k+1) - P(k+1)B(k)(R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k))^{-1}B^T(k)P(k+1)$
- calcul à rebours à partir de $P(n) = Q(n)$

☞ Commande LQ à temps discret : horizon infini

➢ Position du problème

- $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$
- $J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)$

➢ Solution

- $u(k) = -K(k)x(k)$
- avec $K = (R + B^T PB)^{-1}B^T PA$
- et P solution de l'équation algébrique de Riccati discrète
  $P = Q + A^T(P - PB(R + B^T PB)^{-1}B^T P)A$

☞ Propriété de robustesse : marge de module ≥ 1

➢ Différence de retour : par des manipulations à partir de l'équation de Riccati, on obtient l'équation de la différence de retour :
$(I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) =$
$R + B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B$

➢ Inégalité de Kalman multivariable : en fréquentiel ($s = j\omega$) et en notant $H(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1}B$, on obtient :
$(I + KH(j\omega))^H R(I + KH(j\omega)) = R + H^H(j\omega)QH(j\omega) \geq R$

➢ Dans le cas particulier où $R = \rho I$ et en écrivant $Q = L^T L$ (factorisation de Choleski), on obtient :
$(I + KH(j\omega))^H(I + KH(j\omega)) = I + \frac{1}{\rho}(LH(j\omega))^H(LH(j\omega))$

➢ Marge de module : on en déduit : $\sigma_i(I + KH(j\omega)) = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho}\sigma_i^2(LH(j\omega))} \geq 1$

☞ Réglage des pondérations

➢ Remarque : la multiplication des pondérations Q et R par un même scalaire ne modifie pas le régulateur

➢ Restriction à des pondérations diagonales

➢ Méthodologie itérative

- ◦ pondérations initiales : matrices identité.
- ◦ Régler globalemnt la dynamique en multipliant Q ou R par un scalaire
- ◦ Ajuster les dynamiques sur les différents états en ajustant les éléments de Q
- ◦ Ajuster les dunamiques des actionneurs en ajustant les éléments de R

☞ Schéma de régulation

➢ Prise en compte des signaux de consigne

➢ Ajout d'un terme intégral

Commande Linéaire Quadratique Gaussienne

☞ Formulation du problème

➢ Système dynamique stochastique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) &= Cx(t) + w(t) \end{cases} \tag{12}$$

où v et le bruit de mesure w sont des bruits blancs centrés de variance $E\{v^T v\} = V = V^T \geq 0$ et $E\{w^T w\} = W = W^T > 0$

➢ Critère

$$J(x_0, u) = \lim_{t_f \to \infty} E\left\{ \frac{1}{t_f} \int_{t_0}^{t_f} \left((x(t))^T Q x(t) + (u(t))^T R u(t) \right) dt \right\}, \tag{13}$$

avec $Q = Q^T \geq 0$ et $R = R^T > 0$

☞ Principe de séparation

La solution du problème LQG est donnée par les solutions de deux problèmes connus :

- le problème d'estimation optimale de l'état d'un système dynamique stochastique (filtre de Kalman donnant une estimée $\hat{x}$ de x)
- le problème de commande LQ optimale en supposant x connu, donnant un retour d'état de gain K.

La commande LQG est finalement $u = -K\hat{x}$

☞ Structure de la commande

➢ Equation de l'observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) + L(y(t) - Cx(t)) \tag{14}$$

gain de Kalman : $L = \Sigma C^T W^{-1}$ avec Σ la solution de l'équation algébrique de Riccati : $\Sigma A^T + A\Sigma - \Sigma C^T W^{-1} C \Sigma + V = 0$

➢ Equations du régulateur :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}}(t) & = & (A - BK - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) \\ u(t) & = & -K\hat{x}(t) \end{array} \right. \tag{15}$$

équivalent à un transfert $u = -C(s)y$ avec
$C(s) = K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$.

➢ Suivi de consigne : on peut facilement intégrer un signal de sonsigne y^* avec $u = C(s)(y^* - y)$.

☞ Retour sur le principe de séparation

➢ Equations du système bouclé avec $u = w - K_c\hat{x}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax - BK\hat{x} + Bw \\ \dot{\hat{x}} & = & LCx + (A - BK - LC)\hat{x} \\ \epsilon_y & = & Cx - C\hat{x} \end{array} \right. \tag{16}$$

➢ Avec $\epsilon_x = x - \hat{x}$, les équations du système s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (A - BK)x - BK\epsilon_x + Bw \\ \dot{\epsilon}_x & = & (A - LC)\epsilon_x \\ \epsilon_y & = & C\epsilon_x \end{array} \right. \tag{17}$$

matrice d'état bloc-triangulaire : ses valeurs propres = celles de $A - BK$ + celles de $A - LC$. On retrouve le *principe de séparation* des modes de la commande des modes d'observation.

☞ Méthode de réglage

- Réglage du retour d'état
- Réglage du filtre de Kalman
- Recouvrement du gain de boucle (LTR pour loop transfer recovery)

☞ Formulation standard

➢ Représentation linéaire fractionnaire (LFR ou LFT ou produit de Redheffer ou star product)

- Soit un système dynamique d'entrées v et u et de sorties z et y

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{18}$$

- bouclé avec un correcteur $K(s)$ d'entrée y et de sortie u

$$\begin{bmatrix} \dot{x_K}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{19}$$

- L'interconnexion des deux systèmes est un système d'entrée v et de sortie z.

- Principe de la formulation standard : synthétiser le correcteur permettant de minimiser une norme sur le transfert entre v et z : $K(s) = \text{arg}\min ||T_{zw}(s)||_n$
- Norme H_2. Soit $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ un système LTI strictement propre. Sa norme H_2 est $||G(s)||_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\left[G^H(j\omega)G(j\omega)\right] d\omega\right)}$
- Norme H_∞ : $||G(s)||_\infty = \max_\omega \overline{\sigma}(G(j\omega))$ où $\overline{\sigma}$ est la valeur singulière maximale.
- Formulation standard de la commande LQ
- Formulation standard de la commande LQG

☞ Forme LQG équivalente

➢ Principe

- Soit un correcteur LTI n'ordre n_K
- Est-il possible de le mettre sous une forme LQG : estimateur d'état $+$ retour d'état ?

➢ Applications

- retouche de correcteurs
- interpolation de correcteurs (par interpolation des gains de la forme LQG)

➢ Paramétrisation de Youla d'un correcteur LQG

- Le modèle système + correcteur s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& (A-BK)x - BK\epsilon_x + Bw \\ \dot{\epsilon}_x &=& (A-LC)\epsilon_x \\ \epsilon_y &=& C\epsilon_x \end{array} \right. \quad (20)$$

- il présente :
  - n pôles non commandables (les valeurs propres de $A-LC$)
  - n pôles non observables (les valeurs propres de $A-BK$)
- ces pôles sont distincts ; tous les pôles sont donc soit non commandables soit non observables
- le transfert entre w et ϵ_y est donc nul
- on peut donc ajouter n'importe quel transfert stable entre ϵ_y et w sans changer la dynamique du correcteur
- on appelle paramètre de Youla ce transfert

➢ Cas d'un correcteur de même ordre que le système

- même ordre $\Rightarrow$ paramètre de Youla statique : $w = D_N \epsilon_y$
- le correcteur LQG s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A - LC - BK - BD_N C)\hat{x} + (L + BD_N)y \\ u &= -(K + D_N C)\hat{x} + D_N y \end{cases} \tag{21}$$

- Trouver les matrices de gain K et L ainsi que la metrice T du changement de repère $x_K = T\hat{x}$ tel que les 2 représentations d'état soient identiques du point de vue entrée-sortie
- Ce qui s'écrit :

$$T^{-1}A_K T = A - LC - BK - BD_N C \tag{22}$$

$$T^{-1}B_K = L + BD_N \tag{23}$$

$$C_K T = -K - D_N C \tag{24}$$

$$D_K = D_N \tag{25}$$

- La solution est donnée par :

$$\begin{aligned} D_N &= D_K && (26)\\ K &= -C_K T - D_K C && (27)\\ L &= T^{-1} B_K - B D_K && (28)\\ 0 &= -TBC_K T - T(A - BD_K C) + A_K T + B_K C && (29) \end{aligned}$$

- La dernière équation est une équation algébrique de Riccati non symétrique (GNARE pour Generalized Non-symetric Algebraic Riccati Equation)

➢ Cas d'un correcteur d'ordre supérieur : ajouter des modes non observables ou non commandables à la représentation d'état du système pour obtenir un modèle d'ordre n_K

Bureau d'étude

☞ Pendule inversé

- ➢ Commande LQ puis LQG
- ➢ Mise en oeuvre des connaissances de cet enseignement mais aussi des autres cours d'automatique

☞ Méthodologie

- ➢ synthèse de la commande à partir du modèle linéarisé autour du point de fonctionnement nominal
- ➢ évaluation des performances et de la robustesse par analyse fréquentielle sur le modèle linéaire
- ➢ validation finale du correcteur par simulation sur le modèle non-linéaire