

Commande Optimale

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE DE STRABOURG

3^{ÈME} ANNÉE

OPTION INGÉNIERIE DES SYSTÈMES, AUTOMATIQUE ET VISION

MASTER IMAGES, ROBOTIQUE ET INGÉNIERIE POUR LE VIVANT

PARCOURS AUTOMATIQUE ET ROBOTIQUE

Edouard Laroche

laroche@lsiit.u-strasbg.fr

<http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>

2009–2010

Table des matières

1	Introduction	5
2	Commande optimale	6
2.1	Position du problème	6
2.2	Principe d'optimalité de Bellman	7
2.3	Principe du minimum de Pontriaguine	8
2.4	Equation d'Euler-Lagrange	10
2.5	Commande bang-bang	10
3	Commande Linéaire Quadratique	11
3.1	Commande LQ à horizon fini	11
3.2	Commande LQ à horizon infini	13
3.3	Robustesse de la commande LQ	14
3.3.1	Différence de retour	14
3.3.2	Marges de stabilité	14
3.4	Structure des régulateurs	15
3.5	Choix des pondérations	17
3.6	Commande LQ à temps discret	17
3.6.1	Commande LQ à temps discret à horizon fini	17
3.6.2	Critère à horizon infini	20
3.7	Commande prédictive	20
3.7.1	Suivi de consigne	20
3.7.2	Rejet d'une perturbation connue	21
4	Commande Linéaire Quadratique Gaussienne	27
4.1	Formulation	27
4.2	Théorème de séparation	27
4.3	Structure de la commande LQG	28
4.4	Choix des pondérations	29
4.4.1	Généralités	29
4.4.2	Réglage de l'estimateur d'état	29
4.4.3	Loop Transfert Recovery	29
4.5	Commande LQG à temps discret	30
5	Commande H_2	31
5.1	Norme H_2	31
5.1.1	Définition	31
5.1.2	Propriétés	31
5.1.3	Calcul	32

5.1.4	Formulation LMI	33
5.2	Problème standard	34
5.3	Equivalence H_2 et LQG	35
6	Forme LQG équivalente	36
6.1	Paramétrisation de Youla du correcteur LQG	36
6.2	Calcul des paramètres	37
6.3	Application à l'interpolation de correcteurs	38
A	Optimisation et calcul des variations	41
A.1	Optimisation	41
A.1.1	Notations	41
A.1.2	Définitions	41
A.1.3	Optimisation sans contrainte	41
A.1.4	Optimisation avec contrainte	42
A.2	Calcul des variations	42
A.2.1	Problématique	42
A.2.2	Équation d'Euler-Lagrange	43
A.2.3	Prise en compte des conditions initiales et finales	44
A.2.4	Prise en compte de contraintes	44
B	Systèmes linéaires multivariables	47
B.1	Généralités	47
B.2	Pôles	47
B.3	Commandabilité et observabilité	47
B.4	Système linéaire à temps variant	48
B.4.1	Modèle LTV	48
B.4.2	Observabilité	49
B.4.3	Commandabilité	49
C	Analyse des systèmes asservis multivariables	50
C.1	Position du problème	50
C.2	Valeur singulière	50
C.3	Tracé des valeurs singulières	51
C.4	Stabilité	52
C.5	Suivi de consigne	53
C.6	Rejet de perturbation	53
C.7	Robustesse	53

D	Inégalités matricielles affines	54
D.1	Positivité	54
D.2	Inégalité matricielle affine ou linéaire	54
D.3	Exemple de LMI	55
D.4	Résolution	55

1 Introduction

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation... Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le XIX^{ème} siècle avec le calcul des variations. Une des grandes applications de la commande optimale a été l'application au lanceur Apollo dans les années 1960. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d'automatique. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité.

On s'intéressera dans une première partie (§2) à la commande optimale telle qu'elle a été posée initialement et dans le cas des systèmes les plus généraux. Dans une seconde partie (§3), on s'intéressera plus particulièrement aux systèmes linéaires dans le cas d'un critère quadratique, cas connu sous le nom de commande linéaire quadratique (LQ), et qui s'exprime sous la forme d'un retour statique d'état. On s'intéressera ensuite (§4) à la commande linéaire quadratique gaussienne (LQG) permettant de synthétiser un correcteur dynamique pour un système dont l'état n'est que partiellement mesuré. On verra au §5 comment la commande LQG peut se formaliser comme la synthèse d'un correcteur minimisant une norme matricielle (norme H_2) entre des signaux particuliers. Finalement, on s'intéressera à la possibilité d'obtenir, pour un correcteur quelconque, une forme LQG équivalente.

2 Commande optimale

Plutôt que de présenter de manière approfondie le problème de la commande optimale, cette partie constitue plutôt une introduction au sujet. Le choix a été fait de présenter un résultat s'appuyant sur le principe du maximum de Pontriaguine sans rentrer dans la théorie du calcul des variations. Pour approfondir ce domaine, vous pouvez consulter les ouvrages disponibles [1, 2, 3]. D'autres cours sont également disponibles ; notamment celui de Denis Arzelier (<http://www.laas.fr/~arzelier/cours.html>).

2.1 Position du problème

Soit un système à temps continu de représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1)$$

et de condition initiale $x(t_0) = x_0$, où $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Les signaux u et x sont des fonctions de \mathbb{R} vers respectivement \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . Pour la condition initiale x_0 et la commande u , l'équation d'état (1) définit une trajectoire unique x pour l'état sur $[t_0, t_f]$. Celle-ci est fonction de la condition initiale x_0 et de la commande u sur $[t_0, t_f]$.

Soit un critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (2)$$

avec $x_f = x(t_f)$. Les fonctions θ et ϕ ainsi que les instants t_0 et t_f étant donnés, ce critère ne dépend que de x_0 et de u sur $[t_0, t_f]$. L'application qui au signal de commande u associe le critère scalaire $J(x_0, t_0, u)$ est une *fonctionnelle*. On peut noter que différents critères existent dans la littérature :

– le problème de Lagrange :

$$\int_{t_0}^{t_f} \psi(x, u, t) dt \quad (3)$$

– le critère de Bolza :

$$\theta(x_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (4)$$

– le critère de Mayer :

$$\sigma(x_f, t_f) \quad (5)$$

Eventuellement au moyen d'une augmentation d'état du système, il est intéressant de noter qu'ils sont équivalents.

En plus de l'équation d'état qui lie les trajectoires de u et de x , d'autres contraintes peuvent intervenir (sans pour autant remettre en cause le critère choisi). Typiquement :

- l'instant final peut être imposé ou libre ;
- la commande peut appartenir à un ensemble $u \in \mathcal{U} \neq \mathbb{R}^m$;
- des contraintes peuvent exister sur l'état final : $x_f \in \mathcal{X}$.

Le problème de la commande optimale consiste alors à trouver la commande \tilde{u} minimisant $J(x_0, t_0, u)$:

$$\tilde{u} = \min_{u \in \mathcal{U}} J(x_0, t_0, u) \quad (6)$$

On notera alors \tilde{x} la trajectoire correspondante de l'état et $\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u})$ la valeur du critère.

2.2 Principe d'optimalité de Bellman

Soit le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (7)$$

La trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ est \tilde{u} et le critère optimal :

$$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_{u_{[t_0, t_f]}} J(x_0, t_0, u). \quad (8)$$

Soit $t_1 \in [t_0, t_f]$. Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1, t_f]$ avec comme condition initiale $x_1 = x(t_1)$. Autrement dit :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u_{[t_0, t_1]}, x_1} \left(\int_{t_0}^{t_1} \phi(x, u, t) dt + \tilde{J}(x_1) \right). \quad (9)$$

Bien que les développements suivants ne s'appuient pas directement sur ce principe, mais sur le principe du maximum, ce principe est un résultat classique de la commande optimale et se trouve souvent utilisé dans la littérature. Il permet d'obtenir une solution optimale en découpant l'intervalle et en résolvant un problème récursif.

2.3 Principe du minimum de Pontriaguine

Le principe du minimum de Pontriaguine [4] est ici brièvement énoncé. On peut se référer à Sage et White [1] § 4.3.1 pour sa démonstration.

Soit le système d'équation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (10)$$

et le critère de performance :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (11)$$

On définit l'hamiltonien du système :

$$H(x, u, p, t) = \phi(x, u, t) + p^T f(x, u, t) \quad (12)$$

où p est appelé *état-adjoint*¹. Le principe du minimum de Pontriaguine énonce que la trajectoire optimale minimise l'hamiltonien du système. Autrement dit :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{p}) \leq H(\tilde{x}, u, \tilde{p}) \quad \forall u \in U \quad (13)$$

Le long de la trajectoire optimale, on dispose d'un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations sont généralement établies en utilisant le calcul des variations. Pour plus d'informations, se reporter à un ouvrage de référence.

L'extrémalité de la solution conduit à un jeu d'équations, appelées équations canoniques de Hamilton, qui régissent les dynamiques de l'état d'une part et de l'état adjoint d'autre part :

– état

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}$$

– état adjoint

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$$

Les équations provenant des conditions dites terminales, en t_0 d'une part et en t_f d'autre part sont appelées équations de transversalité :

– à l'origine

$$\left(-H(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial t_0} \right) \delta t_0 + \left(p(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} \right)^T \delta x_0 = 0$$

1. En Anglais : *costate vector*

– à l'arrivée

$$\left(H(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \left(-p(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial x_f} \right)^T \delta x_f = 0$$

Enfin, selon la nature du problème, on aura encore certaines relations additionnelles :

– si aucune contrainte (de type saturation) n'est imposée sur $u(t)$ à l'instant t , on a :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t) = 0$$

– si H n'est pas une fonction explicite du temps, on a :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Lien avec le calcul des variations

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte égalité $f(x, u, t) - \dot{x} = 0$. En s'appuyant sur le calcul des variations, on est amené à introduire un multiplicateur de Lagrange p , qui est une fonction du temps, et à introduire le Hermicien :

$$H(x, u, p, t) = \phi(x, u, t) + p^T f(x, u, t) \quad (14)$$

Le critère s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\phi(x, u, t) + p^T (f(x, u, t) - \dot{x})) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, p, t) - p^T \dot{x}) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, p, t) + \dot{p}^T x) dt - p_f^T x_f + p^T(t_0) x_0 \\ &= \tilde{\theta}(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, p, t) + \dot{p}^T x) dt \end{aligned} \quad (15)$$

où $\tilde{\theta}(x_0, t_0, x_f, t_f) = \theta(x_f, t_f) - p_f^T x_f + p_0^T x_0$. Le calcul des variations permet de donner des conditions nécessaires pour résoudre ce problème (cf. paragraphe A.2, page 42). On comprend ainsi l'apparition de l'équation de l'état adjoint $\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$.

2.4 Equation d'Euler-Lagrange

Cf. [1] §3.5 et [5] §4.1.3.

L'équation d'Euler-Lagrange, bien connue en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum. En notant T , l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle d'un système mécanique, le principe de moindre action énoncé par Maupertuis postule que le système évolue en minimisant l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt. \quad (16)$$

Notons q les coordonnées généralisées du système. Soit $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ le lagrangien, avec le critère :

$$J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \quad (17)$$

On considère un système dont on commande la vitesse, l'équation d'état du système s'écrivant alors simplement :

$$\dot{q} = u \quad (18)$$

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + p^T \dot{q} \quad (19)$$

et le principe du minimum donne les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{p} \quad (20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + p = 0 \quad (21)$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps puis en remplaçant \dot{p} grâce à la première, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (22)$$

2.5 Commande bang-bang

Un type de commande optimal particulier bien connu est la commande à temps minimal. Prenons un exemple : vous commandez l'accélération d'un véhicule que vous devez amener d'une position initiale d'arrêt à une position finale, également à l'arrêt, dans le temps le plus court possible. Si l'on

considère un mouvement en ligne droite, on conçoit intuitivement que la commande optimale est dans ce cas une accélération maximale jusqu'à un certain instant à partir duquel il faudra freiner au maximum. On parle de commande bang-bang parce que la commande est toujours saturée, alternativement à sa valeur minimale ou à sa valeur maximale. Quant à la robustesse de la commande, c'est-à-dire la capacité à remplir la mission de manière précise, lorsque la masse du véhicule est imparfaitement estimée, vous imaginez bien que ce genre de commande n'est pas très recommandable. Pour un exemple de ce type de commande, cf. Sage & White [1], §5.3, p. 103.

Un exemple complet de commande en temps minimal sera traité en cours : celui du double intégrateur.

3 Commande Linéaire Quadratique

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour linear quadratic regulator. Le système est linéaire et la commande est quadratique. La commande optimale est un retour d'état.

3.1 Commande LQ à horizon fini

Cf. [1] § 5.1 et l'exemple 5.1-1 (très didactique) ; cf. annexe C de [2].

Soit le problème de commande optimale du système :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (23)$$

avec le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt, \quad (24)$$

les matrices Q , R et S étant symétriques avec Q et $S \geq 0$ et $R > 0^2$.

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(x, u, p, t) = p^T A(t)x + p^T B(t)u + \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u). \quad (25)$$

L'hamiltonien, vérifie les conditions suivantes :

– équation de l'état adjoint

$$\dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -A^T(t)p - Q(t)x \quad (26)$$

2. Remarquons que le critère $\int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(y^T Q_y(t)y + u^T R(t)u)dt$ est équivalent avec $Q_y = C^T(t)Q(t)C(t)$.

– condition de transversalité

$$p(t_f) = Sx_f \quad (27)$$

– absence de contrainte sur la commande

$$\frac{\partial L}{\partial u} = B^T(t)p + R(t)u = 0 \quad (28)$$

De l'équation (28), on déduit :

$$u = -R^{-1}(t)B^T(t)p. \quad (29)$$

Alors l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p. \quad (30)$$

Les équations (26) et (30) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé *système hamiltonien* :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ecrivons $p = P(t)x$, comme nous y incite (27), avec, d'après (27), la condition finale $P(t_f) = S$. L'équation (26) s'écrit alors :

$$\dot{p} = - (A^T(t)P(t) + Q(t)) x. \quad (32)$$

Avec $\dot{p} = \dot{P}x + P\dot{x}$ et l'équation d'état (23) du système, l'équation (32) s'écrit (en omettant la référence au temps afin d'alléger les notation) :

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (33)$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de Riccati suivante :

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (34)$$

avec la condition finale $P(t_f) = S$.

On montre que la condition :

$$x^T(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (35)$$

s'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) + x^T Q x + u^T R u = 0. \quad (36)$$

Le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt. \quad (37)$$

s'écrit alors :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} \left(x_f^T S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(x^T P x) dt \right). \quad (38)$$

soit, avec la condition de transversalité $S = P(t_f)$:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_0^T P(t_0)x_0 \quad (39)$$

Le minimum du critère est donc :

$$\tilde{J}(x_0) = J_0(t_0, x_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2}x_0^T P(t_0)x_0. \quad (40)$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état $u = -K(t)x$ avec :

$$K = -R^{-1}B^T P. \quad (41)$$

Néanmoins, n'oublions pas que, dans le cas présent, K varie en fonction du temps, même dans le cas d'un système et d'un critère à temps invariant (c'est-à-dire si les matrices A , B , Q et R ne dépendent pas du temps). En effet, la matrice $P(t)$ reste dépendant du temps dans le cas d'un critère à temps fini.

3.2 Commande LQ à horizon infini

Intéressons nous ici au cas du système LTV précédent où :

$$J(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt. \quad (42)$$

On montre que ce critère est fini si le système est stabilisable à tout instant t , (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un $K(t)$ tel que les valeurs propres de $A - BK$ soient à partie réelle négative). Remarquons par ailleurs que la partie du critère concernant l'état final n'est plus pertinente car, sur un horizon infini, l'état tend vers zéro si le système bouclé est stable.

Dans le cas d'un problème LTI (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état statique $u = -Kx$ où K est exprimé par l'équation (41) et où P vérifie l'équation algébrique de Riccati :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (43)$$

La résolution de l'équation algébrique de Riccati (43), disponible dans les Toolboxes du logiciel Matlab, dépasse le cadre de ce cours.

3.3 Robustesse de la commande LQ

Cf. [2] pp. 104 & 122, cf. [6]. Sur les propriétés de robustesse de la commande LQ, cf. [7].

3.3.1 Différence de retour

A partir de l'équation de Riccati, faisons apparaître les termes $sI - A$ en ajoutant $PsI - sIP$ où I est la matrice unité³ :

$$P(sI - A) + (-sI - A^T)P + PBR^{-1}B^T P = Q \quad (44)$$

Multiplions à droite par $(sI - A)^{-1}B$ et à gauche par $B^T(-sI - A^T)^{-1}$:

$$\begin{aligned} & B^T(-sI - A^T)^{-1}PB + B^T P(sI - A)^{-1}B \\ & + B^T(-sI - A^T)^{-1}PBR^{-1}B^T P(sI - A)^{-1}B \\ & = B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B. \end{aligned} \quad (45)$$

En notant que d'après (41), on a $B^T P = RK$ et $PB = K^T R$, on obtient :

$$\begin{aligned} & B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T R + RK(sI - A)^{-1}B \\ & + B^T(-sI - A^T)^{-1}PBR^{-1}B^T P(sI - A)^{-1}B \\ & = B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B. \end{aligned} \quad (46)$$

Le premier membre de l'égalité s'écrit :

$$(I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) - R. \quad (47)$$

On obtient finalement l'équation de la différence de retour :

$$\begin{aligned} & (I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) \\ & = R + B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B. \end{aligned} \quad (48)$$

3.3.2 Marges de stabilité

Reprenons l'équation de la différence de retour en fréquentiel avec $s = j\omega$ et en notant $H(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1}B$. On obtient alors pour tout ω :

$$(I + KH(j\omega))^H R(I + KH(j\omega)) = R + H^H(j\omega)QH(j\omega) \quad (49)$$

où M^H est le hermitien de M , c'est-à-dire le conjugué transposé. On en déduit alors l'inégalité de Kalman :

$$(I + KH(j\omega))^H R(I + KH(j\omega)) \geq R. \quad (50)$$

3. Ces calculs sont repris de [8], § II.7 ; voir aussi [2], § 5.2.

Restreignons nous au cas où $R = \rho I$ et factorisons Q en⁴ $Q = L^T L$. L'égalité (49) s'écrit alors :

$$(I + KH(j\omega))^H(I + KH(j\omega)) = I + \frac{1}{\rho}(LH(j\omega))^H(LH(j\omega)) \quad (51)$$

dont on déduit les valeurs singulières de $I + H(j\omega)K$:

$$\sigma_i(I + KH(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i((I + KH(j\omega))^H(I + KH(j\omega)))} \quad (52)$$

$$= \sqrt{\lambda_i\left(I + \frac{1}{\rho}(LH(j\omega))^H(LH(j\omega))\right)} \quad (53)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{\rho}\sigma_i^2(LH(j\omega))} \quad (54)$$

$$\geq 1 \quad (55)$$

où λ_i représente la $i^{\text{ème}}$ valeur propre⁵. En monovariante, ce résultat s'interprète facilement sur le lieu de Nyquist, comme le fait que la distance au point -1 est toujours supérieure à 1. Ainsi, la commande LQ présente la propriété de robustesse suivante : sa marge de module est égale à 1. On en déduit ainsi les intervalles dans lesquels le gain et la phase peuvent varier :

- gain $]0, 5 ; +\infty[$,
- phase $] - 60^\circ ; 60^\circ[$

3.4 Structure des régulateurs

Lorsque des signaux de consigne y^* sont donnés pour certaines composantes y de x , comment les intégrer à la loi de commande? Imaginons que les consignes concernent les premières composantes de x et décomposons x et K ainsi :

$$Kx = [K_y \ K_z] \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (56)$$

Alors la loi de commande sera :

$$u = K_y(y^* - y) - K_z z. \quad (57)$$

Si y est donné par une loi de type équation de sortie, $y = Cx$, on peut effectuer un changement d'état de sorte que le nouveau vecteur d'état contienne y , par exemple en utilisant la forme canonique d'observabilité.

4. C'est toujours possible puisque $Q \geq 0$, par exemple avec une factorisation de Choleski.

5. En utilisant les propriétés $\sigma_i^2(M) = \lambda_i(M^H M)$ et $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$.

La commande LQ est de type proportionnelle. Dans le but d'améliorer les performances en régulation en présence de perturbations constantes, il est souhaitable d'ajouter un effet intégral. Imaginons, à titre d'exemple, que la première composante x_1 de x doive être asservie à x_1^* sans erreur statique. Construisons l'état supplémentaire :

$$I_1 = \int_0^t (x_1(\tau) - x_1^*(\tau)) d\tau \quad (58)$$

avec l'équation correspondante :

$$\dot{I}_1 = x_1 - x_1^* \quad (59)$$

En considérant x_1^* comme une perturbation constante et, de ce fait, en ne l'intégrant pas dans le modèle, l'équation d'état du système augmenté de son nouvel état I_1 s'écrit :

$$\dot{x}_e = A_e(t)x_e - B_e(t)u \quad (60)$$

où le vecteur d'état augmenté est :

$$x_e = \begin{bmatrix} x \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

et les matrices d'état sont ⁶ :

$$A_e = \begin{bmatrix} A & O_{n \times 1} \\ [1 \ O_{1 \times n-1}] & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$B_e = \begin{bmatrix} B \\ O_{1 \times m} \end{bmatrix} \quad (63)$$

Sur ce modèle, un régulateur $K_e \in \mathbb{R}^{m \times n+1}$ de type LQ peut être synthétisé. Décomposons K_e selon :

$$K_e x_e = [K \ K_I] \begin{bmatrix} x \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Le régulateur obtenu, d'entrées x et x_1^* , et de sortie u est un système dynamique d'ordre 1 de modèle d'état :

$$\begin{cases} \dot{I}_1 &= x_1 - x_1^* \\ u &= -K_I I_1 - Kx \end{cases} \quad (65)$$

La consigne x_1^* peut aussi être retranchée à x_1 ; d'autres consignes peuvent être intégrées de la même manière en retranchant leur valeur à l'état correspondant. Si une commande en boucle ouverte (feed-forward) est disponible, elle peut être également intégrée ; la commande sera alors la somme de la commande en boucle fermée et de la commande en boucle ouverte.

6. La matrice $O_{k \times l}$ représente la matrice nulle de dimension $k \times l$.

3.5 Choix des pondérations

Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations Q et R par un même scalaire laisse inchangé le gain K . En effet, soit P solution de (43) et soit le nouveau problème basé sur les pondérations $\hat{Q} = \lambda Q$ et $\hat{R} = \lambda R$. On vérifie que $\hat{P} = \lambda P$ est solution de l'équation de Riccati correspondante. En effet :

$$\hat{K} = -\hat{R}^{-1}B^T\hat{P} = -RB^T P = K \quad (66)$$

Sans restriction, les pondérations peuvent être choisies symétriques. Elles sont généralement choisies diagonales. Ainsi, on se ramène au choix de n scalaires pour l'état et de p scalaires pour la commande. Voici une méthode simple de choix et de modification des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

1. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.
2. Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice Q par un scalaire λ (accélération avec $\lambda > 1$ et décélération avec $\lambda < 1$), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
3. Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de Q correspondant aux premiers.
4. Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de R leur correspondant.

Les étapes 2, 3 et 4 peuvent être répétées dans l'ordre souhaité jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier des charges.

3.6 Commande LQ à temps discret

Cf. §9 de [9].

3.6.1 Commande LQ à temps discret à horizon fini

Formulation du problème. Soit le système dynamique à temps discret défini par :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (67)$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$ et cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k). \quad (68)$$

Ce problème est plus simple que celui à temps continu car il s'agit ici d'un problème dont les inconnues sont les $n + 1$ valeurs de $u(k)$ et non plus une fonction du temps. Il s'agit d'une minimisation de (68) sous les contraintes (67). Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2}x^T(k)Q(k)x(k) + \frac{1}{2}u^T(k)R(k)u(k) + p^T(k+1)(-x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k)) \right) \quad (69)$$

et la solution optimale vérifie les équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial u(k)} = R(k)u(k) + B^T(k)p(k+1) = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x(k)} = Q(k)x(k) - p(k) + A^T(k)p(k+1) = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p(k+1)} = -x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k) = 0 \quad (72)$$

L'équation de la commande (70) donne :

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1). \quad (73)$$

La dernière commande $u(n)$ n'a aucun effet sur l'évolution du système sur l'horizon considéré ; sa valeur optimale est donc nulle :

$$u(n) = 0. \quad (74)$$

On a ainsi d'après (70) :

$$p(n+1) = 0 \quad (75)$$

et d'après l'équation adjointe (71) :

$$p(n) = Q(n)x(n). \quad (76)$$

Il s'agit d'un problème aux deux bouts : une condition initiale est disponible pour l'état alors que c'est une condition finale qui est disponible pour l'état adjoint. Ainsi, la résolution du problème doit se faire pour l'ensemble de la trajectoire, ce qui peut représenter une charge de calcul élevée dans le cas d'un horizon n élevé.

Formulation sous forme d'équation de Riccati. Les équations précédentes peuvent être résolues directement en x et p . On peut aussi adopter la démarche suivante, basé sur un changement de variable suivant pour la variable adjointe :

$$p(k) = P(k)x(k) \quad (77)$$

où $P(k)$ est une matrice qu'il faudra déterminer ; $P(n) = Q(n)$. La commande $u(k)$ vérifie alors :

$$R(k)u(k) = -B^T(k)P(k+1)x(k+1) \quad (78)$$

$$= -B^T(k)P(k+1)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) \quad (79)$$

et peut donc s'écrire :

$$u(k) = -K(k)x(k) \quad (80)$$

avec :

$$K(k) = \tilde{R}^{-1}(k)B^T(k)P(k+1)A(k) \quad (81)$$

où :

$$\tilde{R}(k) = R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k). \quad (82)$$

Il reste maintenant à déterminer la matrice $P(k)$. Partant de (71), on obtient :

$$P(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)P(k+1)x(k+1) \quad (83)$$

$$= Q(k)x(k) + A^T(k)P(k+1)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) \quad (84)$$

En utilisant (80), l'équation ci-dessus se réécrit :

$$P(k)x(k) = [Q(k) + A^T(k)P(k+1)(A(k) - B(k)K(k))] x(k). \quad (85)$$

Comme cette équation doit être vérifiée pour tout $x(k)$, il est nécessaire que :

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)P(k+1)(A(k) - B(k)K(k)), \quad (86)$$

ce qui s'écrit :

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)M(k+1)A(k), \quad (87)$$

avec :

$$M(k+1) = P(k+1) - P(k+1)B(k)(R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k))^{-1}B^T(k)P(k+1). \quad (88)$$

Cette équation récursive à inconnue matricielle est appelée équation de Riccati discrète. Sa condition finale est $P(n) = Q(n)$ et sa résolution se fait donc à rebours. Dans le cas de systèmes LTV où les matrices A , B dépendent effectivement de k ou bien si c'est le cas des matrices de pondération Q et R , cela suppose de connaître à l'avance l'ensemble des matrices pour $k = 0 \dots n$.

3.6.2 Critère à horizon infini

Cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k). \quad (89)$$

Il s'agit du critère précédent où n tend vers l'infini.

On peut montrer alors que pour un système LTI le gain du retour d'état est constant. Il s'écrit :

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (90)$$

où P est solution de l'équation algébrique de Riccati discrète :

$$P = Q + A^T (P - P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P) A. \quad (91)$$

La résolution de cette équation non linéaire n'est pas triviale. Des algorithmes [10] sont disponibles dans les Toolboxes du logiciel Matlab [11].

3.7 Commande prédictive

La commande linéaire quadratique sur un horizon a connu un succès particulier sous le nom de commande prédictive. Il s'agit d'une famille de commande qui se basent sur des prédictions de l'évolution des signaux extérieurs et des états internes pour le calcul du signal de commande optimal. La commande LQ, présentée précédemment, permet de faire tendre vers zéro l'état interne d'un système. La loi de commande obtenue peut être utilisée dans le but de suivre un signal de consigne (on retranchera alors la consigne à l'état utilisé dans la loi de commande) et pour un rejet de perturbation (les commande en boucle fermée ont des propriétés naturelles de rejet de perturbation). Toutefois, le problème peut être formulé de manière spécifique pour chacun de ces problèmes. On se limitera au cas des systèmes à temps invariant. Ici, nous nous intéressons à la formulation pour les systèmes sous forme de représentation d'état. Une formulation pour les fonctions de transfert (approche polynomiale) est également disponible.

3.7.1 Suivi de consigne

On suppose que la consigne $r(k)$ est connue à l'avance et on cherche la commande permettant de minimiser le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} (x(k) - r(k))^T Q (x(k) - r(k)) + u^T(k) R u(k) \quad (92)$$

Souvent, on préfère considérer le critère suivant :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} (x(k) - r(k))^T Q (x(k) - r(k)) + \Delta_u^T(k) R \Delta_u(k) \quad (93)$$

où $\Delta_u(k) = u(k) - u(k-1)$. Ce critère pénalise l'amplitude des variations du signal d'entrée au lieu de pénaliser directement son amplitude. Pour minimiser le critère (93), il suffit d'ajouter un intégrateur $\frac{z}{z-1}$ sur chacune des entrées du système et de poursuivre avec le critère (92).

3.7.2 Rejet d'une perturbation connue

Position du problème. On considère cette fois que le système est affecté par une perturbation $v(k)$ dont on est capable de prédire l'évolution :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + v(k) \quad (94)$$

Le critère à minimiser (68) est identique au cas général. La démarche est identique au cas précédent en tenant compte du nouveau modèle.

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} x^T(k) Q x(k) + \frac{1}{2} u^T(k) R u(k) + p^T(k+1) (-x(k+1) + Ax(k) + Bu(k) + v(k)) \right) \quad (95)$$

Dans les équation (70-72), seule la troisième équation est modifiée :

$$\frac{\partial L}{\partial p(k+1)} = -x(k+1) + Ax(k) + Bu(k) + v(k) = 0 \quad (96)$$

L'équation de la commande (73) est inchangée. En remplaçant la commande dans l'équation (72) grâce à (73) et en reprenant (71), on obtient un système d'équations dont les inconnues sont les signaux $x(k)$ et $p(k)$.

$$Qx(k) - p(k) + A^T p(k+1) = 0 \quad (97)$$

$$-x(k+1) + Ax(k) - BR^{-1}B^T p(k+1) + v(k) = 0 \quad (98)$$

Pour l'état, on connaît la condition initiale $x(0)$; pour l'état adjoint, on connaît la condition finale $p(n+1) = 0$. Il s'agit donc d'un problème aux deux-bouts. La méthode de résolution générale consiste à écrire l'ensemble des relations et à résoudre le système matriciel ainsi obtenu.

Résolution. En considérant (97) pour $k = 1, \dots, n$, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & -A^T & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & -A^T & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{I} & -A^T \\ \mathbb{O} & \dots & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q & & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbb{O} & \dots & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \quad (99)$$

En notant $S = BR^{-1}B^T$, l'équation (98) donne pour $k = 0, \dots, n$:

$$\begin{bmatrix} S & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & S & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} & \dots & \dots & \mathbb{O} \\ -A & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & -A & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) + Ax(0) \\ v(1) \\ \vdots \\ v(n-1) \end{bmatrix} \quad (100)$$

En notant $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix}$ et $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(n) \end{bmatrix}$, le système (99-100) se réécrit sous

la forme :

$$M_{11}\mathbf{p} + M_{12}\mathbf{x} = \mathbb{O} \quad (101)$$

$$M_{21}\mathbf{p} + M_{22}\mathbf{x} = B_2 \quad (102)$$

Les matrices M_{11} et M_{22} sont inversibles ; il est donc possible d'éliminer \mathbf{x} dans les équations, afin d'obtenir :

$$\bar{M}_{11}\mathbf{p} = -M_{12}M_{22}^{-1}B_2 \quad (103)$$

où $\bar{M}_{11} = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$. Si \bar{M}_{11} est inversible, alors,

$$\mathbf{p} = -\bar{M}_{11}^{-1}M_{12}M_{22}^{-1}B_2 \quad (104)$$

En réalité, d'après (73), seul $p(1)$ est utile pour calculer $u(0)$. On calcule ainsi $u(0)$ et on l'applique à l'instant t_0 . A l'étape suivante (t_1), au lieu d'appliquer $u(1)$ qui vient d'être calculé, on recommence la résolution du problème en tenant compte des nouvelles mesures.

Réécriture de la loi de commande. En notant :

$$B_2 = \mathbf{v} + \bar{A}x(0) \quad (105)$$

avec :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v(0) \\ \vdots \\ v(n-1) \end{bmatrix},$$

on peut réécrire le vecteur des états adjoints :

$$\mathbf{p} = -\bar{M}_{11}^{-1} M_{12} M_{22}^{-1} (\bar{A}x(0) - \mathbf{v}) \quad (106)$$

Par ailleurs, on a :

$$p(1) = \bar{C}\mathbf{p}$$

avec

$$\bar{C} = [\mathbb{I} \quad \mathbb{O} \quad \dots \quad \mathbb{O}].$$

On peut donc écrire la commande sous la forme :

$$u(0) = -Kx(0) + L\mathbf{v} \quad (107)$$

avec $L = R^{-1}B^T\bar{C}\bar{M}_{11}^{-1}M_{12}M_{22}^{-1}$ et $K = -L\bar{A}$.

Le calcul que nous venons de faire pour l'instant initial $k = 0$ peut être fait pour tout instant k . En notant :

$$\mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ \vdots \\ v(k+n) \end{bmatrix},$$

la loi de commande se réécrit :

$$u(k) = -Kx(k) + L\mathbf{v}(k) \quad (108)$$

On observe que la commande est un retour d'état avec une compensation de la perturbation. Le calcul de K et L sera fait à l'avance, hors ligne, afin d'alléger la charge de calcul à effectuer en ligne.

La commande $u(k)$ à appliquer à l'instant t_k est déterminée d'après la valeur de l'état au même instant. Pourtant, un temps de calcul non nul est nécessaire pour réaliser le calcul de la commande. En pratique, le calcul de $u(k)$ sera effectué pendant l'intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ en utilisant une prédiction de $x(k)$: $\hat{x}(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1) + v(k-1)$. La loi de commande s'écrit donc finalement :

$$u(k) = -K\hat{x}(k) + L\mathbf{v}(k) \quad (109)$$

Des techniques d'estimation optimale peuvent être utilisées pour déterminer la trajectoire de l'état, notamment si l'ensemble de l'état n'est pas mesuré.

Exemple illustratif. La commande a été testée sur un système du second ordre de fonction de transfert ⁷ :

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \quad (110)$$

avec $\omega_0 = 10$ rad/s, $\xi = 2$ et discrétisé à $T = 0.1$ s en considérant en entrée un bloqueur d'ordre zéro, ce qui donne comme représentation d'état :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.7889 & -0.1465 & 0.0625 \\ 0.1250 & 0 & 0 \\ \hline 0.0284 & 0.0662 & 0 \end{array} \right] \quad (111)$$

Pour le critère, on a choisit $R = \mathbb{I}$ et $Q = 10^6 C^T C$ afin de minimiser la sortie y . L'horizon de prédiction est choisi à $n = 6$. La perturbation est un signal additif sur la commande, soit $v(k) = Bw(k)$. Dans les simulations qui suivent, on teste l'effet d'un échelon de perturbation à $k = 21$ en présence de condition initiale non nulle, soit $w(k) = 1$ si $k \leq 20$ et $w(k) = 0$ si $k < 20$. Le correcteur obtenu s'écrit :

$$K = [12.9867 \quad -1.8798]$$

et

$$L = \begin{bmatrix} -12.8293 & -22.9263 & -2.5736 & -6.2616 & 0.1052 & 0.2258 & \dots \\ \dots & 0.0069 & 0.0176 & -0.0005 & -0.0012 & -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

En plus du système asservi par le GPC avec modèle de la perturbation, ont été simulés le système en boucle ouverte et le système asservi par un retour d'état statique K_0 réglé par la méthode LQR (critère quadratique à horizon infini) avec les mêmes matrices de pondération que le GPC :

$$K_0 = [12.9867 \quad -1.8798]$$

On remarque que dans le cas présent, le correcteur LQR est sensiblement identique à la partie "retour d'état" du correcteur prédictif.

Sur la figure 1, on observe que le correcteur prédictif permet de mieux rejeter la perturbation. L'écart de la commande entre les correcteurs GPC et LQR s'observe sur la figure 2 : on note que la commande du correcteur prédictif commence à varier dès $k = 19$ alors que le correcteur LQR ne peut réagir qu'à partir de $k > 20$.

7. Le code Matlab de cet exemple est disponible sur <http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student/#MIRIV>.

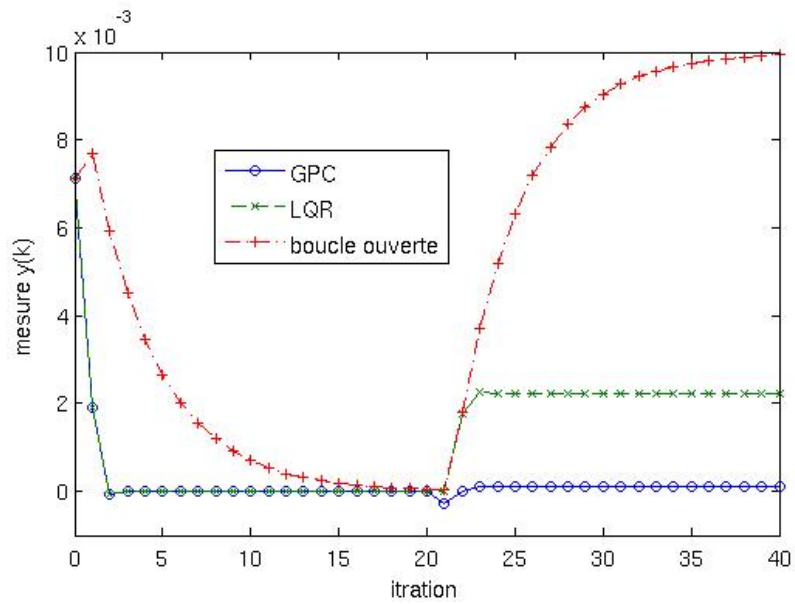


FIGURE 1 – Allure des réponses des systèmes

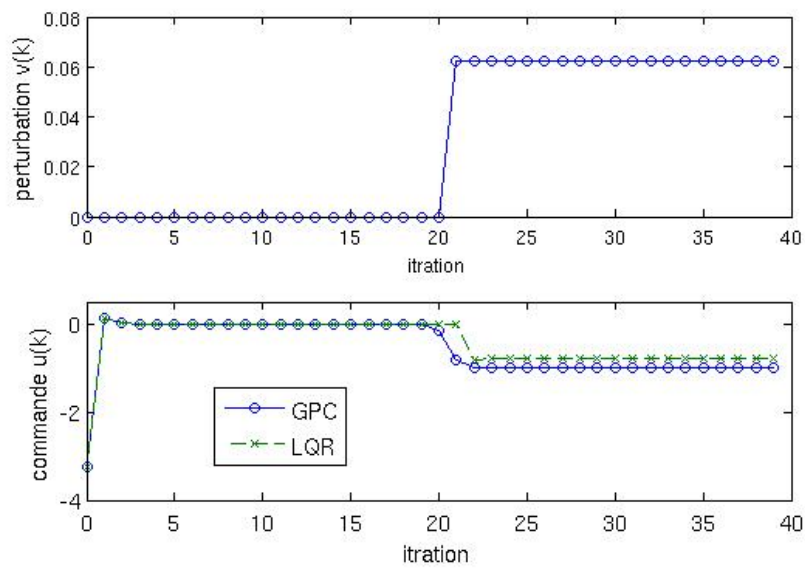


FIGURE 2 – Allures de la perturbation et de la commande

Il faut toutefois préciser que ces simulation correspondent à une situation où la perturbation est supposée parfaitement connue. En réalité, on sera amené à réaliser une prédiction de la perturbation en utilisant les ob-

servations passées. L'erreur de prédiction entrainera une dégradation des résultats. Toutefois, les résultats devraient rester meilleurs que ceux obtenue sans utiliser cette prédiction. A titre d'exemple d'application, citons la compensation des mouvements physiologiques en robotique chirurgicale. Pour mieux stabiliser la portion du cœur à opérer, un modèle de la perturbation engendrée par le battement cardiaque peut être développé [12].

4 Commande Linéaire Quadratique Gaussienne

Par rapport à la commande LQ, la commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. Développée au début de la seconde moitié du 20^{ème} siècle et appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation de lanceurs, elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multivariables. De ce fait, elle a connu un grand succès comme en témoigne les nombreuses publications sur le sujet. Depuis la fin du 20^{ème} siècle, la commande H_∞ apparaît comme un sérieux concurrent pour l'asservissement robuste des systèmes multivariables. Néanmoins, la commande LQG n'en demeure pas moins un standard industriel.

4.1 Formulation

Soit le système dynamique stochastique d'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx + w \end{cases} \quad (112)$$

où le bruit d'état v et le bruit de mesure w sont des bruits blancs centrés de variance $E\{vv^T\} = V \geq 0$ et $E\{ww^T\} = W > 0$. Le problème LQG consiste en la minimisation du critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{t_f} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \right\}, \quad (113)$$

où $Q \geq 0$ et $R > 0$. Du fait des entrées de bruit v et w , les grandeurs u et x sont des grandeurs stochastiques. Comme critère, il est ainsi naturel de s'intéresser à l'espérance d'une intégrale. Comme pour la commande LQ, il est possible de considérer des critères à temps fini.

4.2 Théorème de séparation

La solution de ce problème de commande optimale de processus stochastique est bien connue sous le nom de *théorème de séparation*⁸. Ce théorème énonce que la solution du problème est composée de deux parties :

- un observateur de Kalman permettant de donner l'estimée \hat{x} de x qui est non biaisée et à variance minimale,

8. En Anglais : *Seperation Theorem* ou *Certainty Equivalence Principle*.

- la commande par retour d'état $u = -K\hat{x}$ à appliquer à \hat{x} où K est calculé en considérant le problème LQ correspondant (en enlevant v et w de l'équation d'état et E dans le critère).

Ce théorème est intéressant dans la mesure où il donne la solution du problème complet comme étant la réunion des solutions de deux problèmes plus simples et déjà résolus : celui de la commande LQ et celui de l'estimation de Kalman. Pour une démonstration de ce théorème, cf. [2] § 8.2 et [13].

4.3 Structure de la commande LQG

L'estimée optimale \hat{x} est donnée par l'observateur d'équation d'état :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad (114)$$

où le gain de Kalman est :

$$L = \Sigma C^T W^{-1}, \quad (115)$$

avec Σ la solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$\Sigma A^T + A\Sigma - \Sigma C^T W^{-1} C \Sigma + V = 0. \quad (116)$$

La commande étant donnée par $u = -K\hat{x}$, on peut réécrire les équations de la commande d'entrée y et de sortie u :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A - BK - LC)\hat{x} + Ly \\ u &= -K\hat{x} \end{cases} \quad (117)$$

Le suivi d'une consigne y^* se fera par la loi de commande $u = C(s)(y^* - y)$ où la fonction de transfert du correcteur est :

$$C(s) = K(sI - A + BK + LC)^{-1}L. \quad (118)$$

Ses équations d'état sont :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A - BK - LC)\hat{x} + L\epsilon \\ u &= K\hat{x} \end{cases} \quad (119)$$

où $\epsilon = y^* - y$. Notons que ce correcteur LTI a le même ordre que le processus.

4.4 Choix des pondérations

4.4.1 Généralités

Le réglage du correcteur LQG nécessite la donnée de quatre matrices de pondération : Q et R pour le retour d'état ; V et W pour l'estimateur. La méthode de réglage la plus simple repose sur un réglage séparé : régler V et W de sorte que l'état soit 'bien' reconstruit et régler Q et R pour avoir un 'bon' retour d'état. Si les dynamiques de la régulation sont relativement lentes devant celles de l'observation, on peut supposer que l'état est parfaitement connu du point de vue du retour d'état et la commande sera robuste (marge de module égale à 1). Si cette hypothèse n'est pas respectée, et ce sera le cas dès que vous souhaitez obtenir un régulateur avec des dynamiques élevées, la robustesse n'est plus assurée. La méthode de réglage des pondérations Q et R du retour d'état vue au paragraphe précédent reste valable. Abordons la question du réglage de l'estimateur avant de présenter les méthodes de recouvrement du gain destinées à rendre robuste la commande LQG.

4.4.2 Réglage de l'estimateur d'état

L'estimateur d'état s'appuie sur la commande u et sur la mesure y du système pour donner l'estimée de l'état la plus plausible, compte-tenu des incertitudes et bruits affectant le modèle et la mesure.

Une première approche du réglage du filtre concerne le cas où l'hypothèse de départ sur le modèle est respectée ; c'est-à-dire que le seul défaut du modèle est d'être affecté par des signaux stochastiques blancs. Dans ce cas, le réglage se fera directement par une évaluation des variances des bruits. Evaluer le bruit de mesure w en observant y est direct ; ce qui n'est pas le cas du bruit d'état v . Ce bruit peut être attribué à la commande u en choisissant $V = BV_u B^T$, avec V_u la variance du bruit de mesure.

Cependant, la principale source de bruit d'état d'un modèle provient généralement des erreurs de modélisation qui sont déterministes et non stochastiques. Néanmoins ces erreurs de modélisation sont généralement mal connues et il n'est pas aberrant d'en tenir compte globalement grâce à un terme stochastique. La validation du filtre de Kalman peut alors se faire en simulation en introduisant des erreurs sur le modèle telles que des variations sur ses paramètres.

4.4.3 Loop Transfert Recovery

Cf. [2] § 8.4, p.236.

La présence d'un observateur fait que les propriétés de robustesse du correcteur LQ ne sont plus valables [14]. Les méthodes de Loop Transfer Recovery (LTR ou en Français recouvrement du transfert de la boucle) consistent à modifier les conditions de la synthèse afin de se rapprocher du transfert qui serait obtenu avec un retour d'état LQ. Si ce transfert est obtenu, la robustesse est alors assurée. Depuis les premiers travaux de Doyle et Stein en 1981 [15], de nombreux travaux ont été menés sur ce sujet [16, 17, 18]. C'est cette première approche qui est présentée ici ; elle est également présentée dans [6]. Elle a l'inconvénient de ne pas convenir aux systèmes à déphasage non-minimal⁹. Des travaux ultérieurs se sont attachés à ce type de système [19].

La méthode de recouvrement repose sur l'écriture de la matrice de covariance V de la forme :

$$V = V_0 + q^2 BB^T. \quad (120)$$

On montre que le gain de la boucle ouverte $C(s)G(s)$ tend vers $K(sI - A)^{-1}B$, celui du régulateur LQ, lorsque q tend vers l'infini. Ainsi, à partir d'un correcteur initial reposant sur les pondérations V_0 et W , on augmente petit-à-petit q jusqu'à obtenir la robustesse suffisante.

Une approche duale consiste à retoucher le gain du retour d'état en choisissant la matrice de pondération Q de la forme :

$$Q = Q_0 + q^2 C^T C. \quad (121)$$

La méthode reste la même : on augmente q jusqu'à obtenir la robustesse désirée. Dans tous les cas, l'augmentation de la robustesse se fait au détriment des performances et un compromis doit être trouvé.

4.5 Commande LQG à temps discret

A l'image de la commande LQG à temps continu, la version à temps discret consiste en la combinaison d'un filtre de Kalman à temps discret et d'un retour d'état. La méthode LTR s'applique également.

9. Il s'agit des systèmes possédant des zéros à partie réelle positive.

5 Commande H_2

Les commandes LQ et LQG peuvent se mettre sous une forme particulière dite forme standard. Il s'agit alors de synthétiser un correcteur minimisant une norme sur les signaux de transfert.

5.1 Norme H_2

La présentation de la norme H_2 reprend celle de [6], §1.2.

5.1.1 Définition

Soit $G(s)$ le système LTI multivariable défini par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad (122)$$

avec $D = O$ (système strictement propre¹⁰). On définit la norme matricielle H_2 de ce système par :

$$\|G\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [G^H(j\omega)G(j\omega)] d\omega\right)} \quad (123)$$

5.1.2 Propriétés

Soit g la réponse impulsionnelle du système. Dans le cas monovariante, le théorème de Parseval donne une forme équivalente¹¹ :

$$\|G\|_2^2 = \int_0^{\infty} g^T(t)g(t)dt. \quad (124)$$

Dans le cas monovariante, la norme H_2 du système est égale à l'énergie de la réponse impulsionnelle.

Supposons maintenant que v soit un bruit blanc gaussien vérifiant

10. Cette restriction est nécessaire pour que la norme du système soit finie.

11. On rappelle que la fonction de transfert est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

$E\{v(t)v^T(\tau)\} = I\delta(t - \tau)$ et calculons la puissance de sortie :

$$\begin{aligned}
E\{z^T z\} &= \text{tr} [E\{zz^T\}] \\
&= \text{tr} \left[E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau_1)v(\tau_1)v^T(\tau_2)g^T(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \right\} \right] \\
&= \text{tr} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau_1)E\{v(\tau_1)v^T(\tau_2)\}g^T(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \right] \\
&= \text{tr} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau)g^T(t - \tau)d\tau \right] \\
&= \text{tr} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)g^T(\tau)d\tau \right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [g^T(\tau)g(\tau)] d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [G^H(j\omega)G(j\omega)] d\omega \\
&= \|G\|_2^2
\end{aligned}$$

Ainsi, la norme H_2 est la puissance de sortie lorsque le système est alimenté par un bruit blanc gaussien unitaire.

5.1.3 Calcul

La norme H_2 peut être calculée pour tous les systèmes strictement propres ($D = O$) et strictement stables. En effet, elle peut s'écrire ainsi :

$$\|G\|_2^2 = \int_0^\infty \text{tr} [g^T(t)g(t)] dt \quad (125)$$

$$= \text{tr} \int_0^\infty (B^T \exp(A^T t)C^T) (C \exp(At)B) dt \quad (126)$$

$$= \text{tr} \left[B^T \int_0^\infty \exp(A^T t)C^T C \exp(At)dt B \right] \quad (127)$$

ou encore :

$$\|G\|_2^2 = \int_0^\infty \text{tr} [g(t)g^T(t)] dt \quad (128)$$

$$= \text{tr} \int_0^\infty (C \exp(At)B) (B^T \exp(A^T t)C^T) dt \quad (129)$$

$$= \text{tr} \left[C \int_0^\infty \exp(At)BB^T \exp(A^T t)dt C^T \right] \quad (130)$$

soit :

$$\|G\|_2^2 = \text{tr} [B^T W_o B] = \text{tr} [C W_c C^T] \quad (131)$$

où W_o et W_c sont les gramiens de commandabilité et d'observabilité :

$$W_o = \int_0^\infty \exp(At) B B^T \exp(A^T t) dt \quad (132)$$

$$W_c = \int_0^\infty \exp(A^T t) C^T C \exp(At) dt \quad (133)$$

Ils peuvent être obtenus comme les solutions des équations de Lyapunov ¹² suivantes :

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0 \quad (134)$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (135)$$

En effet, partons de :

$$\frac{d}{dt} [\exp(At) B B^T \exp(A^T t)] = A \exp(At) B B^T \exp(A^T t) + \exp(At) B B^T \exp(A^T t) A^T. \quad (136)$$

En notant que pour un système stable :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(At) = 0, \quad (137)$$

et en intégrant sur $[0, \infty]$, on obtient directement les deux équations de Lyapunov. C'est cette méthode qui est utilisée dans les Toolboxes de Matlab pour le calcul de la norme H_2 [11].

5.1.4 Formulation LMI

Les inégalités matricielles affines (LMI pour inégalités matricielles linéaires) sont devenues un outil classique de l'automatique. Ils sont à la base de nombreuses méthodes innovantes et les méthodes classiques ont généralement une formulation LMI. Une introduction sur les LMI est développée en Annexe B. Voici la formulation LMI de la norme H_2 [20].

12. D'après la théorie de Lyapunov, l'équation $AX + X^T A + Q = 0$ d'inconnue X , avec Q symétrique définie positive, a une solution positive si A est Hurwitz (ses pôles sont à partie réelle strictement négative). Alors une solution symétrique peut être facilement obtenue par la résolution d'un système de $n(n+1)$ équations linéaires à autant d'inconnues (les composantes de X), où n est la dimension de A . La résolution de l'équation de Lyapunov est disponible dans les Toolboxes [11].

Soit S_0 la solution de l'équation de Lyapunov (134), c'est-à-dire vérifiant :

$$AS_0 + S_0A^T + BB^T = 0, \quad (138)$$

avec $S_0 = S_0^T \leq 0$. Alors toute matrice S vérifiant :

$$AS + SA^T + BB^T < 0 \quad (139)$$

vérifie aussi $S > S_0$.

Le système $G(s)$ stable avec $D = 0$ vérifie $\|G\|_2^2 < \nu$ si et seulement si il existe une matrice symétrique positive, :

$$S > 0, \quad (140)$$

vérifiant (139) et :

$$\text{tr} [CSC^T] < \nu. \quad (141)$$

L'ensemble des inégalités (139-141) constitue un système LMI et peut se résoudre avec les solveurs disponibles [21, 22].

5.2 Problème standard

Soit le système dynamique LTI d'équations d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ u \end{bmatrix} \quad (142)$$

qui peut aussi s'écrire sous forme de fonction de transfert :

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (143)$$

avec :

$$\begin{aligned} G_{11}(s) &= D_{11} + C_1(sI - A)^{-1}B_1 \\ G_{12}(s) &= D_{12} + C_1(sI - A)^{-1}B_2 \\ G_{21}(s) &= D_{21} + C_2(sI - A)^{-1}B_1 \\ G_{22}(s) &= D_{22} + C_2(sI - A)^{-1}B_2 \end{aligned} \quad (144)$$

On appelle problème standard le problème consistant à trouver la loi de commande :

$$u(s) = K(s)y(s) \quad (145)$$

tel que le transfert T_{zv} entre v et z , du système bouclé, minimise une norme matricielle donnée.

En considérant la norme H_2 , on parlera de synthèse H_2 standard. Une autre technique populaire repose sur la norme H_∞ ¹³ et fait l'objet d'un enseignement spécifique de la formation.

13. La norme H_∞ d'un système $G(s)$ est le maximum pour $\omega \in [0, \infty]$ de la plus grande des valeurs singulières de $G(j\omega)$.

5.3 Equivalence H_2 et LQG

Considérons d'abord le cas de la commande LQ avec le critère :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt. \quad (146)$$

Ce critère peut s'écrire :

$$J = \int_0^{\infty} z^T(t) z(t) dt. \quad (147)$$

avec :

$$z = \begin{pmatrix} Q^{1/2} x \\ R^{1/2} u \end{pmatrix} \quad (148)$$

En utilisant le théorème de Parseval , on obtient :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z^H(j\omega) Z(j\omega) d\omega. \quad (149)$$

où $Z(s)$ est la transformée de Laplace de z . En boucle fermée et en absence de signal exogène, z ne dépend que de la condition initiale et on a $Z(s) = M(s)x_0$. On a alors :

$$J = \text{tr} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_0^T M^H(j\omega) M(j\omega) x_0 d\omega \right] \quad (150)$$

$$= \frac{x_0^T x_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [M^H(j\omega) M(j\omega)] d\omega \quad (151)$$

$$= \|M\|_2^2 x_0^2 \quad (152)$$

La commande LQ est alors la commande minimisant la norme H_2 du transfert entre x_0 et z .

Considérons désormais la commande LQG et posons :

$$v = L\xi \quad (153)$$

$$w = N\eta \quad (154)$$

où ξ et η sont des bruits blancs de variance unitaire. On montre alors que le correcteur LQG est équivalent au correcteur H_2 minimisant le transfert entre $[\xi^T \eta^T]^T$ et $z = [x^T Q^{1/2} \ u^T R^{1/2}]^T$ [17].

6 Forme LQG équivalente

Un correcteur quelconque de même ordre que le processus peut se mettre sous la forme d'un correcteur LQG. Cette possibilité, expliquée dans ce paragraphe, présente plusieurs intérêts. Tout d'abord, cela signifie qu'un correcteur initial obtenu par une autre méthode et que l'on voudrait améliorer grâce à une synthèse LQG peut servir de point de départ pour le réglage des pondérations. Ensuite, la méthode LQG a comme intérêt que les états du correcteur sont les estimées des états du système ; ils peuvent donc être utilisés dans un but de diagnostic ou de supervision. Dans ce cas, il est intéressant d'implanter le correcteur sous forme LQG quelle que soit la méthode de synthèse. L'obtention de cette forme LQG équivalente repose sur une propriété particulière de cette forme, donnant lieu à ce qu'on appelle la paramétrisation de Youla. Des compléments sur la forme LQG équivalente peuvent être trouvés dans les références [23, 24].

6.1 Paramétrisation de Youla du correcteur LQG

Considérons le système complet composé du processus et de sa commande LQG avec le signal d'entrée w tel que $u = w - K_c \hat{x}$ et comme sortie l'erreur d'estimation de la sortie, également appelée innovation, $\epsilon_y = y - \hat{y} = y - C\hat{x}$. La représentation d'état de ce système bouclé s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax - BK\hat{x} + Bw \\ \dot{\hat{x}} &= LCx + (A - BK - LC)\hat{x} \\ \epsilon_y &= Cx - C\hat{x} \end{cases} \quad (155)$$

En utilisant comme vecteur d'état :

$$\begin{bmatrix} x \\ \epsilon_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix}, \quad (156)$$

le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A - BK)x - BK\epsilon_x + Bw \\ \dot{\epsilon}_x &= (A - LC)\epsilon_x \\ \epsilon_y &= C\epsilon_x \end{cases} \quad (157)$$

De par sa structure, il apparaît que ce système présente n pôles non observables (les valeurs propres de $A - BK$ qui sont indépendants du gain d'observation L) et n pôles non commandables (les valeurs propres de $A - LC$ qui sont indépendantes du gain de la commande K). Il s'agit là d'une autre expression du principe de séparation : les pôles du système bouclé sont réglables

indépendamment par le gain de la commande et par le gain de l'observateur¹⁴. Ainsi, aucun mode du système n'est à la fois commandable (par l'entrée w) et observable (par la sortie ϵ_y). Le transfert entre w et ϵ_y est donc nul. On peut alors ajouter un transfert $N(s)$ quelconque sans changer le comportement du système. Ce paramétrage du correcteur par un bouclage sur un transfert extérieur $N(s)$ est appelé paramétrisation de Youla .

En notant le modèle de $N(s)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_N &= A_N x_N + B_N \epsilon_y \\ w &= C_N x_N + D_N \epsilon_y \end{cases} \quad (158)$$

on peut alors écrire les équations du correcteur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A - LC - BK - BD_N C)\hat{x} + BC_N x_N + (L + BD_N)y \\ \dot{x}_N &= -B_N C\hat{x} + A_N x_N + B_N y \\ u &= -(K + D_N C)\hat{x} + C_N x_N + D_N y \end{cases} \quad (159)$$

6.2 Calcul des paramètres

Cherchons s'il est possible d'obtenir un correcteur LQG (c'est-à-dire les gains K et L ainsi que le système $N(s)$) identique à un correcteur $\{A_K, B_K, C_K, D_K\}$ quelconque d'ordre n . Pour que les correcteurs soient de même ordre, $N(s)$ doit être statique, c'est-à-dire que seul D_N est non nul parmi les matrices d'état de $N(s)$. Le modèle du correcteur LQG s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A - LC - BK - BD_N C)\hat{x} + (L + BD_N)y \\ u &= -(K + D_N C)\hat{x} + D_N y \end{cases} \quad (160)$$

Les deux correcteurs sont identiques du point de vue entrée/sortie s'il existe un changement d'état T :

$$x_K = T\hat{x} \quad (161)$$

tel que

$$T^{-1}A_K T = A - LC - BK - BD_N C \quad (162)$$

$$T^{-1}B_K = L + BD_N \quad (163)$$

$$C_K T = -K - D_N C \quad (164)$$

$$D_K = D_N \quad (165)$$

14. Afin de mieux visualiser ce résultat, le lecteur est invité à représenter graphiquement le système d'équations (157)

ce qui s'écrit :

$$D_N = D_K \quad (166)$$

$$K = -C_K T - D_K C \quad (167)$$

$$L = T^{-1} B_K - B D_K \quad (168)$$

$$0 = -T B C_K T - T(A - B D_K C) + A_K T + B_K C \quad (169)$$

La dernière équation est une équation algébrique de Riccati non symétrique (GNARE pour Generalized Non-symmetric Algebraic Riccati Equation) et peut se mettre sous la forme hamiltonienne :

$$[-T \ I] \begin{bmatrix} A + B D_K C & B C_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0. \quad (170)$$

Pour la résolution, cf. [24]. Une fois T déterminé, les matrices K , L et D_N peuvent être calculées.

6.3 Application à l'interpolation de correcteurs

Une application de ces techniques est la synthèse de correcteurs à gains séquencés (gain scheduling en anglais) à partir d'interpolation de correcteurs LTI. Imaginez que le comportement du système à asservir varie en fonction d'une variable Θ dite variable de séquencement. Pour différentes valeurs constantes Θ_k de Θ , le comportement de votre système est linéaire et connu (par des lois de la physique ou par identification). On peut alors synthétiser une batterie de correcteurs LTI $K_k(s)$ valables pour les différents points de fonctionnement. La question est maintenant de déterminer un correcteur valable pour toute la plage de fonctionnement par interpolation des correcteurs $K_k(s)$. Ce correcteur dépendra bien sûr de Θ et on peut le noter $K_\Theta(s)$.

La question de l'interpolation de deux modèles n'est pas triviale. Bien entendu, l'idée d'interpoler directement les matrices de la représentation d'état n'a pas beaucoup de sens si rien n'est fait pour que les variables d'état aient le même sens physique. En utilisant une représentation d'état particulière, la représentation équilibrée (balanced en anglais), le résultat n'est pas non plus satisfaisant. En effet, on observe que les pôles n'évoluent pas de manière régulière entre deux points d'interpolation, même proches [25].

Une des méthodes présentes dans la littérature et qui donne de bons résultats consiste à interpoler les gains d'observation et de commande de la représentation LQG équivalente, établie à partir du modèle nominal du processus. Dans le cas où le correcteur est d'ordre supérieur au système (c'est généralement le cas des commandes H_∞), on détermine tout d'abord une

représentation d'état augmentée du modèle nominal du processus en ajoutant des états non commandables ou non observables afin de garder un paramètre de Youla statique.

Annexes

A Optimisation et calcul des variations

A.1 Optimisation

A.1.1 Notations

Soit un vecteur x dans \mathbb{R}^n de variables de décision et soit un critère $J(x)$ à valeur dans \mathbb{R} définie sur $E \subset \mathbb{R}^n$.

On note $\nabla_J(x) = \frac{dJ}{dx}(x)$ le gradient de la fonction de J . Il s'agit d'une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n . La $k^{\text{ème}}$ composante de $\nabla_J(x)$ s'écrit $\frac{\partial J}{\partial x_k}(x)$.

On note $H_J(x) = \frac{d^2J}{dx^2}(x)$ le Hessian de la fonction de J . Il s'agit d'une fonction de \mathbb{R}^n vers $\mathbb{R}^{n \times n}$. La composante (k, l) de $H_J(x)$ s'écrit $\frac{\partial^2 J}{\partial x_k \partial x_l}(x)$.

A.1.2 Définitions

Définition 1 (Minimum global)

La fonction J présente un minimum global en $x_0 \in E$ si $J(x) > J(x_0) \forall x \neq x_0$.

Définition 2 (Minimum local)

La fonction J présente un minimum local en $x_0 \in E$ s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $J(x) > J(x_0) \forall x \in V \setminus x_0$.

A.1.3 Optimisation sans contrainte

Lemme 1 (Condition du premier ordre d'existence d'un extremum)

Si le critère J présente un extrémum en x_0 , alors on a $\frac{dJ}{dx}(x_0) = 0$.

Cette condition du premier ordre n'est pas suffisante car la connaissance des dérivées d'ordre supérieur sont nécessaires pour conclure à la présence d'un extrémum et à la détermination du type d'extrémum (minimum ou maximum).

Lemme 2 (Condition suffisante d'existence d'un extremum)

Si $\frac{dJ}{dx}(x_0) = 0$ et si $\frac{d^2J}{dx^2}(x_0) > 0$ ¹⁵, alors le critère J présente un minimum en x_0 .

Si $\frac{dJ}{dx}(x_0) = 0$ et si $\frac{d^2J}{dx^2}(x_0) < 0$, alors le critère J présente un maximum en x_0 .

15. Cette inégalité doit être lue au sens des inégalités matricielles, c'est-à-dire que le Hessian doit être défini positif, ce qui revient aussi à dire que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

Dans l'hypothèse où les conditions précédentes ne seraient pas satisfaites, il faut étudier les conditions d'ordre supérieures. On est en présence d'un extrémum si la première dérivée non nulle est d'ordre pair¹⁶.

A.1.4 Optimisation avec contrainte

Intéressons nous désormais à la minimisation de $J(x)$ sous la contrainte $\phi(x) = \mathbb{O}_{p \times 1}$. La recherche du minimum se fait par l'introduction d'un vecteur de \mathbb{R}^p appelé *Lagrangien* et par l'introduction d'un critère modifié $\tilde{J}(x, \lambda) = J(x) + \lambda^T \phi(x)$.

Lemme 3 (Condition du premier ordre d'existence d'un extrémum)

Pour que x_0 soit solution du problème d'extréma sous contrainte ci-dessus, il faut qu'il existe un Lagrangien λ_0 qui satisfasse les conditions suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = \mathbb{O}_{n \times 1} \quad (171)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) = \mathbb{O}_{p \times 1} \quad (172)$$

Exercice 1 (Minimisation sous contrainte)

Pour $x \in \mathbb{R}^2$, on considère le critère $J(x) = x^T x$ et la contrainte $px = 1$ où $p = [1 \ 1]$. Trouvez la solution du problème de minimisation sous contrainte.

A.2 Calcul des variations

A.2.1 Problématique

Le calcul des variations est à la base des méthodes de la commande optimale. Dans ce paragraphe, nous nous contentons de donner un exemple introductif. Dans ce cas, l'inconnue n'est plus un scalaire ni un vecteur, mais une fonction. Autrement dit, la solution du problème est cherchée dans un espace de dimension infinie.

On cherche une fonction $y(x)$ minimisant une intégrale de la forme :

$$J(y) = \int_a^b \phi(y(x), \dot{y}(x), x) dx.$$

Notant $y^*(x)$ la fonction optimale qui doit vérifier :

$$J(y) \geq J(y^*) \quad \forall y \quad (173)$$

16. En effet, les fonctions polynomiales x^k possèdent un minimum en 0 pour k pair mais pas pour k impair.

L'argument de J est une fonction ; on qualifie souvent J de *fonctionnelle*, c'est-à-dire de fonction de fonction.

En notant δy une petite variation de la fonction y , et $\delta \dot{y}$ la variation de sa dérivée correspondante, on a :

$$\begin{aligned} J(y + \delta y) &\simeq \int_a^b \left(\phi(y, \dot{y}, x) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \dot{y}, x) \delta y(x) + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}}(y, \dot{y}, x) \delta \dot{y}(x) \right) dx \\ &\simeq J(y) + \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \dot{y}, x) \delta y(x) + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}}(y, \dot{y}, x) \delta \dot{y}(x) \right) dx \end{aligned} \quad (174)$$

Pour la trajectoire optimale, il faut que $\frac{\partial \phi}{\partial y}(y, \dot{y}, x) \delta y(x) + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}}(y, \dot{y}, x) \delta \dot{y}(x)$ soit nul tout au long de la trajectoire.

A.2.2 Équation d'Euler-Lagrange

La condition du premier ordre est donnée par la condition d'Euler-Lagrange.

Lemme 4 (Équation d'Euler-Lagrange)

La fonction optimale $y(x)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (175)$$

Dans le cas où ϕ ne dépend pas explicitement de x , la formule d'Euler-Lagrange se reformule de la manière suivante :

Lemme 5 (Formule de Beltrami)

La fonction optimale $y(x)$ vérifie l'équation suivante :

$$\phi - \dot{y} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} = k \quad (176)$$

où k est une constante.

Démonstration 1

La formule d'Euler-Lagrange se réécrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{y}^2} \ddot{y} = 0 \quad (177)$$

En calculant la dérivée par rapport à x de $\phi - \dot{y} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}}$, on obtient après deux lignes de calcul :

$$\frac{d}{dx} \left(\phi - \dot{y} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} \right) = \dot{y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \dot{y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial \dot{y}} - \ddot{y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{y}^2} \right) \quad (178)$$

$$= 0 \quad (179)$$

A.2.3 Prise en compte des conditions initiales et finales

Les conditions initiales et finales peuvent être libres où imposées. On peut imposer l'instant et/ou la valeurs de la fonction y . Considérons un critère intégrant éventuellement une pénalité sur les conditions initiales et finales, de la forme :

$$J = \int_a^b \phi(y(x), \dot{y}(x), x) dx + \psi(a, b, y(a), y(b)) \quad (180)$$

Les conditions correspondantes, appelées conditions de transversalité, s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}}(a) - \frac{\partial \psi}{\partial y(a)} \right) \delta x(a) + \left(\phi(a) - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}}(a) \dot{y}(a) - \frac{\partial \psi}{\partial a} \right) \delta a = 0 \quad (181)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}}(b) + \frac{\partial \psi}{\partial y(b)} \right) \delta x(b) + \left(\phi(b) - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}}(b) \dot{y}(b) + \frac{\partial \psi}{\partial b} \right) \delta b = 0 \quad (182)$$

où $\phi(a) = \phi(y(a), \dot{y}(a), a)$ et $\phi(b) = \phi(y(b), \dot{y}(b), b)$, pour alléger l'écriture.

Exercice 2 (Trajectoire optimale)

Déterminez la trajectoire $y(x)$ optimale minimisant le critère $\int_a^b (x\dot{y}(x) + \dot{y}^2(x)) dt$ avec $a = 0$, $y(a) = 1$, $y(b) = 5$ et b libre.

A.2.4 Prise en compte de contraintes

Considérons le cas d'une minimisation du critère (180) avec les contraintes suivantes :

- contrainte intégrale $\int_a^b r(y, \dot{y}, x) dx = 0$, $r() \in \mathbb{R}^r$
- contrainte instantanée $s(y, \dot{y}, x) = 0$, $s() \in \mathbb{R}^s$

La résolution se fait en introduisant les multiplicateurs de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^r$ et $\mu(x) \in \mathbb{R}^s$ et en substituant à la fonction ϕ le Hamiltonien :

$$H(y, \dot{y}, x, \lambda, \mu) = \phi(y, \dot{y}, x) + \lambda^T r(y, \dot{y}, x) + \mu^T(x) s(y, \dot{y}, x).$$

L'équation d'Euler-Lagrange est inchangée :

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (183)$$

Problème de Didon. Ce problème bien connu¹⁷ est lié à la fondation de Carthage¹⁸. Didon se trouvait devant le problème de maximiser l'aire de la cité entourée par les remparts pour une longueur de rempart donnée.

17. Voir par exemple sur http://serge.mehl.free.fr/anx/cv_didon.html.

18. http://serge.mehl.free.fr/anx/pb_didon.html

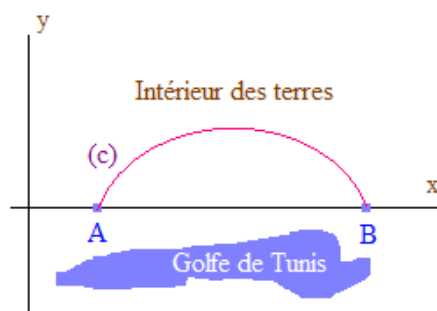


FIGURE 3 – Problème de Didon??

Mathématiquement, en partant de la figure 3, on peut se ramener à deux variables (x, y) et considérer y comme fonction de x à déterminer. Il s'agit de maximiser la surface $\int_{x=a}^{x=b} y(x)dx$ tout en gardant le périmètre $\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + \dot{y}^2(x)}dx$ égal à L .

On note $H(y, \dot{y}, \lambda) = y + \lambda\sqrt{1 + \dot{y}^2}$ le Lagrangien. Comme il ne dépend pas explicitement de x , on peut utiliser la formule de Beltrami, ce qui donne $y - \lambda\sqrt{1 + \dot{y}^2} + \frac{\lambda\dot{y}^2}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = k$. Cette relation se réécrit sous la forme $(y - k)^2(1 + \dot{y}^2) = \lambda^2$. Il s'agit désormais de montrer que la courbe est un cercle et de caractériser ce cercle. En posant $Y = y - k$ et en remplaçant \dot{y} par $\frac{dY}{dx}$, on obtient $1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{Y^2}$, ce qui donne $\frac{Y}{\sqrt{\lambda^2 - Y^2}}dY = \pm dx$. En primitivant, on obtient $\sqrt{\lambda^2 - Y^2} = x - c$ où c est une constante d'intégration ; le signe positif est nécessaire pour que l'équation soit définie sur $[a, b]$. L'équation s'écrit alors $(y - k)^2 + (x - c)^2 = \lambda^2$, ce qui est l'équation d'un cercle de centre d'abscisse c et d'ordonnée k qui peuvent être obtenus par des considérations géométriques.

Problème du brachistochrone. Soit un plan vertical de repère $(0, x, y)$ où x est l'axe horizontal et y est l'axe vertical ascendant. Le problème du brachistochrone¹⁹, étudié et nommé par Jean Bernoulli, consiste à déterminer la trajectoire permettant à une bille posée en $(0, h)$ d'atteindre la position finale $(l, 0)$ le plus rapidement possible. L'inconnue étant la courbe $y(x)$.

Exercice 3 (Brachistochrone)

Pour une trajectoire de la bille $(x(t), y(t))$ débutant en $(0, 0)$ avec une vitesse nulle et terminant en un point précis $(l, -h)$, on se propose de vous guider vers l'obtention de la trajectoire optimale :

19. Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_brachistochrone.

1. Montrez que le module de la vitesse de la bille en un point (x, y) est égal à $\sqrt{-2gy}$.
2. Calculez l'expression de la vitesse de progression selon x en fonction de l'altitude y et de la dérivée $y' = dy/dx$ de l'altitude.
3. Montrez que le temps Δ_t mis par la bille pour parcourir l'ensemble du trajet s'écrit :

$$\Delta_t = \int_{x=0}^{x=l} \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{-2gy(x)}} dx \quad (184)$$

4. A partir de l'équation de Beltrami, montrez que la solution optimale vérifie une équation différentielle de la forme :

$$(1 + y'^2(x)) y(x) = k \quad (185)$$

5. Par un changement de variable $y'(x) = -\cotan(\phi/2)$, montrez que la solution est de la forme :

$$x(\theta) = a + b(\theta - \sin(\theta)) \quad (186)$$

$$y(\theta) = c + d(\theta - \cos(\theta)) \quad (187)$$

6. Déterminez la constante et tracez l'allure de la solution. Vous pourrez prendre comme application numérique $l = 1$ et $h = 0,4$.

B Systèmes linéaires multivariables

Récapitulons les résultats fondamentaux concernant les systèmes multivariables linéaires, tout d'abord à temps invariant (LTI) puis à temps variant (LTV).

B.1 Généralités

Soit le système LTI défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (188)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. La fonction de transfert de ce système s'écrit :

$$H(s) = D + C(sI_n - A)^{-1}B. \quad (189)$$

où $H(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Elle est invariante par changement d'état $\hat{x} = Px$ où $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible. Le système sera indifféremment représenté par sa fonction de transfert ou par sa représentation d'état.

B.2 Pôles

On appelle pôles du système les pôles de la fonction de transfert qui sont (par définition) aussi les valeurs propres de A . Ces pôles sont invariants par changement d'état.

Le système est stable si ses pôles sont à parties réelles strictement négatives. La matrice A d'un tel système est dit Hurwitz.

B.3 Commandabilité et observabilité

Un système est dit *gouvernable* s'il existe un retour d'état qui le stabilise ; c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tel que $A - BK$ soit Hurwitz. Puisque cette propriété ne concerne que les matrices A et B , on dit que la paire $\{A, B\}$ est gouvernable.

Un système est dit *commandable* si on peut imposer arbitrairement les pôles du système bouclé par un retour d'état, c'est-à-dire les pôles de $A - BK$. La commandabilité est une condition plus forte que la gouvernabilité. La commandabilité d'un système correspond à la stabilisabilité des modes instables. La paire $\{A, B\}$ est commandable si la matrice de commandabilité :

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (190)$$

est de rang n .

Un système est dit *déTECTABLE* s'il existe un observateur d'état stable ; c'est-à-dire s'il existe $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tel que $A - LC$ soit Hurwitz. On dit que la paire $\{A, C\}$ est détectable.

Un système est dit *observable* si on peut imposer arbitrairement les pôles de son observateur d'état, c'est-à-dire les pôles de $A - LC$. L'observabilité est une condition plus forte que la détectabilité. La paire $\{A, C\}$ est observable si la matrice d'observabilité :

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (191)$$

est de rang n .

Les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont duales. Ainsi, $\{A, C\}$ est observable si et seulement si $\{A^T, C^T\}$ est commandable. Il en est de même pour la gouvernabilité et la détectabilité.

B.4 Système linéaire à temps variant

B.4.1 Modèle LTV

Soit le système LTV défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (192)$$

Sa *matrice de transition* $\Phi(t, t_0)$ est définie par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \\ \Phi(t_0, t_0) = \mathcal{I}_n, \end{cases} \quad (193)$$

où \mathcal{I}_n est la matrice unité d'ordre n . La trajectoire de l'état s'écrit alors :

$$x = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (194)$$

où $x_0 = x(t_0)$. L'écriture de x sous cette forme a le mérite de faire apparaître deux termes : l'un issu de la condition initiale et l'autre du signal de commande. Dans le cas d'un système LTI, la matrice de transition s'écrit $\Phi(t_0, t) = \exp(A(t - t_0))$. Une propriété intéressante est que $\Phi(t, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t)$.

B.4.2 Observabilité

De manière générale, un système non linéaire est observable si on peut déterminer son état initial à partir de l'enregistrement de sa sortie sur un certain horizon. Une fois connu l'état initial, la trajectoire peut alors être entièrement reconstruite à partir du modèle.

Supposons pour simplifier les calculs que l'entrée est nulle ($u = 0$) ; le signal de sortie s'écrit $y(\tau) = C\Phi(\tau, t_0)x_0$. Multiplions cette relation à gauche par $\Phi^T(\tau, t_0)C^T$ et intégrons sur $[t_0, t_1]$, on obtient alors :

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0)C^T y(\tau) d\tau = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0)C^T C \Phi(\tau, t_0) d\tau}_{W_o(t_0, t_1)} x_0. \quad (195)$$

La condition initiale x_0 est alors obtenue en multipliant à gauche par $W_o(t_0, t_1)^{-1}$. Le système est donc observable si le gramien d'observabilité $W_o(t_0, t_1)$ est défini²⁰ (non singulier) [26]. L'observabilité peut dépendre de la trajectoire de l'état, celle-ci dépendant du signal d'entrée ; un signal d'entrée rendant le système observable est dit *entrée universelle*.

B.4.3 Commandabilité

De manière générale, un système est dit (complètement) commandable si, à partir d'une condition initiale $x_0 = x(t_0)$, on peut trouver une commande u permettant d'atteindre tout état final arbitraire $x_f = x(t_f)$ avec $t_f > t_0$. Remarquons que cette notion de commandabilité est équivalente à la possibilité de suivre une trajectoire quelconque pour l'état, à condition toutefois que cette trajectoire soit suffisamment régulière.

Le système LTV (192) est commandable sur l'horizon $[t_0, t_f]$ si et seulement si son *gramien de commandabilité* :

$$W_c(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^{-1}(t_0, \tau) B B^T \Phi^{-T}(t_0, \tau) d\tau \quad (196)$$

est défini.

Le caractère suffisant de cette condition se montre en considérant la commande :

$$u = B^T(t) \Phi^{-T}(t_0, t) W_c^{-1}(t_0, t_f) (x_f - \Phi^{-1}(t_0, t_f) x_0) \quad (197)$$

20. Toutes les valeurs propres de $W_o(t_0, t_1)$ sont réelles et positives puisque qu'elle est symétrique.

C Analyse des systèmes asservis multivari-ables

C.1 Position du problème

Considérons un processus linéaire multivariable $y = G(s)u$ asservi par un correcteur $K(s)$, avec n_u entrées et n_y sorties. En tenant compte de la consigne r et d'une perturbation d en entrée du processus, les équations s'écrivent :

$$u = K(s)(r - y) \quad (198)$$

$$y = G(s)(u + d) \quad (199)$$

En notant $S_y(s) = (I_{n_y} + K(s)G(s))^{-1}$ la sensibilité en sortie et $S_u(s) = (I_{n_u} + G(s)K(s))^{-1}$ la sensibilité en entrée, on obtient les transferts en boucle fermés suivants :

$$\epsilon = S_y(s)r - S_y(s)G(s)d \quad (200)$$

$$u = K(s)S_y(s)r - K(s)S_y(s)G(s)d \quad (201)$$

$$= S_u(s)K(s)r - S_u(s)K(s)G(s)d \quad (202)$$

$$y = S_y(s)G(s)K(s)r + S_y(s)G(s)d \quad (203)$$

$$(204)$$

où $\epsilon = r - y$ est l'erreur de régulation.

Les objectifs de ce schéma général d'asservissement sont les suivants :

- stabilité,
- robustesse,
- un bon suivi de trajectoire,
- un bon rejet des perturbations.

Voici comment les évaluer à partir de la représentation fréquentielle des transferts en boucle fermée.

Les outils classiques de l'automatique monovariable (lieu de Bode, de Black et de Nyquist) ne sont pas directement utilisables en multivariable. Les outils présentés s'appuient sur le tracé des valeurs singulières, extension de la notion de gain.

C.2 Valeur singulière

Définition 3 Les valeurs singulières d'une matrice complexe M sont les racines carrées des valeurs propres de $M^H M$ où M^H est le hermitien (transposé conjugué) de M . On les note $\sigma_i(M)$.

Propriété 1 (Propriétés générales)

- Les valeurs singulières sont des nombres réels positifs.
- Les valeurs singulières non nulles de M sont identiques à celles de M^H (invariance par l'opération transposé/conjugué)
- Les valeurs singulières non nulles sont au plus au nombre de $\min(n_u, n_y)$, la plus petite dimension de M .

Propriété 2 (Norme matricielle) La valeur singulière maximale $\bar{\sigma}(M)$ est une norme matricielle. Les propriétés générales des normes s'appliquent donc.

- $\bar{\sigma}(\lambda M) = |\lambda| \bar{\sigma}(M)$
- $\bar{\sigma}(M + N) \leq \bar{\sigma}(M) + \bar{\sigma}(N)$
- $\bar{\sigma}(MN) \leq \bar{\sigma}(M) \bar{\sigma}(N)$

Propriété 3 (Inversion de matrice) M est inversible si et seulement si sa plus petite valeur singulière est non nulle ($\underline{\sigma}(M) > 0$). Alors, $\bar{\sigma}(M) = \frac{1}{\underline{\sigma}(M^{-1})}$ et $\underline{\sigma}(M) = \frac{1}{\bar{\sigma}(M^{-1})}$.

On en déduit les propriétés suivantes :

Propriété 4 - $\underline{\sigma}(\lambda M) = |\lambda| \underline{\sigma}(M)$
 - $\underline{\sigma}(M + N) \geq \underline{\sigma}(M) + \underline{\sigma}(N)$
 - $\bar{\sigma}(M) \underline{\sigma}(N) \leq \bar{\sigma}(MN)$

Propriété 5 (Interprétation) La norme $\bar{\sigma}$ est la norme induite sur les matrices par la norme euclidienne des vecteurs :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(M) &= \max_{z \neq 0} \frac{\|Mz\|_2}{\|z\|_2} \\ \bar{\sigma}^2(M) &= \max_{z \neq 0} \frac{z^H M^H M z}{z^H z} \end{aligned} \quad (205)$$

Ainsi, la norme $\bar{\sigma}$ est l'amplification maximale du système de transfert M .

C.3 Tracé des valeurs singulières

Pour un transfert dynamique multivariable $M(s)$, la représentation fréquentielle consiste en le tracé des valeurs singulières de $M(j\omega)$ en fonction de ω sur $[0, \infty]$. L'échelle logarithmique est généralement choisie pour les abscisses et les ordonnées. Ce tracé généralise celui du gain aux systèmes multivariables.

Définition 4 (Norme H_∞) La norme H_∞ de $M(s)$, notée $\|M\|_\infty$ est la borne supérieure des valeurs singulières maximales de $M(j\omega)$ lorsque ω varie sur $[0, \infty]$:

$$\|M\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(M(j\omega)) \quad (206)$$

Définition 5 (Norme \mathcal{L}_2 sur les signaux) Soit z un signal à valeur réelle ou complexe sur $[0, \infty]$; on note $\|z\|_2$ sa norme \mathcal{L}_2 définie par :

$$\|z\|_2 = \int_0^\infty z^H(t)z(t)dt \quad (207)$$

Propriété 6 (Interprétation de la norme H_∞) La norme H_∞ est la norme induite sur les systèmes par la norme \mathcal{L}_2 sur les signaux :

$$\|M(s)\|_\infty = \max_{z \neq 0} \frac{\|M(s)z\|_2}{\|z\|_2} \quad (208)$$

Ainsi, la norme $\|M(s)\|_\infty$ est l'amplification maximale.

Des critères de stabilité, robustesse, qualité du suivi de trajectoire et qualité du rejet de perturbation peuvent s'évaluer à partir des représentations fréquentielles de certains transferts du système bouclé. Cela fait l'objet des paragraphes suivants. Pour obtenir les valeurs singulières d'un systèmes dynamique, vous pouvez utiliser sous Matlab la fonction **sigma** de la Control System Toolbox ou la fonction **vsvd** de la μ -Analysis and Synthesis Toolbox.

C.4 Stabilité

La stabilité est évaluable à partir du lieu des pôles (tous les pôles de la boucle fermée doivent être à partie réelle strictement positive), ce qui s'évalue en multivariable de la même manière qu'en monovariable. Cependant, on sait que la stabilité ne suffit pas et que des marges sont nécessaires. La marge de module est définie en monovariable comme la distance minimale au point -1 du transfert complexe en boucle ouverte, ce qui s'écrit avec les notations utilisées :

$$\Delta_M = \min_{\omega} |1 + K(j\omega)G(j\omega)|. \quad (209)$$

En notant que :

$$\min_{\omega} |1 + K(j\omega)G(j\omega)| = \max_{\omega} |(1 + K(j\omega)G(j\omega))^{-1}|, \quad (210)$$

on définit en multivariable la marge de module en sortie :

$$\Delta_M = \frac{1}{\|S_y(s)\|_\infty}, \quad (211)$$

et la marge de module en entrée :

$$\Delta_M = \frac{1}{\|S_u(s)\|_\infty}. \quad (212)$$

C.5 Suivi de consigne

Afin d'avoir un bon comportement en suivi de consigne, il faut que le transfert entre la référence et l'erreur soit de type coupe-bas (ou passe-haut). On pourra alors tracer la représentation fréquentielle de $S_y(s)$ et relever la bande passante à -3 dB ainsi que l'atténuation maximale (en continu).

C.6 Rejet de perturbation

Afin d'avoir un bon comportement en rejet de perturbation, il faut que le transfert entre la perturbation et l'erreur soit le plus faible possible notamment en basse fréquence. Ce transfert est généralement de type passe-bande. On pourra alors tracer la représentation fréquentielle de $S_y(s)G(s)$ et relever l'atténuation maximale (en continu) ainsi que l'amplification maximale en précisant la fréquence.

C.7 Robustesse

Les systèmes dynamiques physiques sont généralement de type passe-bande et on a un gain qui diminue en haute fréquence. Il en résulte donc qu'au-delà d'une certaine bande de fréquences, ces dynamiques sont nécessairement mal connues. Ainsi, une des sources classiques de manque de robustesse des systèmes asservis correspond à des amplifications de modes hautes fréquences mal connus, entraînant ainsi des instabilités. Afin de palier ce problème, il convient de s'assurer que le gain du correcteur décroît au-delà de la bande passante. Une manière détournée de s'en assurer consiste à considérer la réponse fréquentielle du transfert $S_u(s)K(s)$ ou $K(s)S_y(s)$ du transfert entre r et u .

D Inégalités matricielles affines

Les Inégalités Matricielles Affines ou LMI prennent une place de plus importante dans les méthodes modernes de l'automatique. De nombreux résultats antérieurs trouvent une formulation LMI et ce formalisme permet aussi de résoudre de nouveaux problèmes qui n'avaient pas trouvé jusqu'alors de solution.

D.1 Positivité

Définition 6 (Matrice positive) Une matrice $A \in \mathcal{R}^n$ est dite (semi-définie) positive et on note $A \geq 0$ si la forme quadratique $x^T A x$ est positive pour tout vecteur x .

Cette définition se transpose évidemment au cas négatif. On peut toujours écrire une forme quadratique à partir d'une matrice symétrique. Ainsi, $x^T A x = \frac{1}{2} x^T (A^T + A) x$. On ne contiendra donc de considérer le cas des matrices symétriques. Ces matrices ont la particularité d'avoir toutes leurs valeurs propres réelles.

Propriété 7 (Matrice négative) Une matrice A symétrique est négative si et seulement toutes ses valeurs propres sont négatives et on note $A \leq 0$.

On définit aussi la positivité stricte et on dit qu'une matrice est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives. C'est équivalent à dire que la forme quadratique correspondante $x^T A x$ est strictement positive pour tout x non nul.

Propriété 8 – Soit λ un scalaire, $A - \lambda I > 0 \iff \lambda_i(A) > \lambda$.
– $P > 0 \iff -P < 0$; on peut donc toujours se ramener à un problème de positivité (ou de négativité).

D.2 Inégalité matricielle affine ou linéaire

Définition 7 (Inégalité Matricielle Affine) On appelle inégalité matricielle affine (ou linéaire et en anglais *linear matrix inequality* noté LMI) le problème suivant; étant données les matrices réelles, carrées et symétriques M_k , $k = 1..n$, trouver les réels x_k , $k = 1..n$ tels que $M(x) = M_0 + x_1 M_1 + \dots + x_n M_n > 0$.

Le succès des LMI vient du développement des méthodes dites du point intérieur (interior point methods) qui permettent de résoudre de manière efficace ces problèmes [21].

Propriété 9 *Un système de plusieurs LMI est une LMI. En effet :*

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P(x) & 0 \\ 0 & Q(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (213)$$

D.3 Exemple de LMI

Les LMI ne se présentent pas directement sous la forme de l'inégalité présentée ci-dessus. Prenons un exemple classique de l'automatique ; la stabilité au sens de Lyapunov pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$. Il s'agit de trouver une matrice réelle $P = P^T > 0$ de même dimension que A telle que $A^T P + P A < 0$. Considérons à titre d'exemple, le cas où A est une matrice 2×2 .

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \quad (214)$$

La matrice P dépend alors de 3 paramètres $x_i, k = 1..3$ et peut s'écrire :

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \quad (215)$$

La condition de positivité de P s'écrit :

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (216)$$

L'inégalité de Lyapunov, elle se réécrit :

$$x_1 \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & a_1 + a_4 \\ a_1 + a_4 & a_2 + a_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 2a_4 \end{bmatrix} < 0 \quad (217)$$

D.4 Résolution

Afin de rendre les solveurs de LMI facilement utilisables pour les problèmes de l'automatique, des interfaces ont été développées permettant d'écrire les problèmes sous des formes matricielles simples. On peut citer LMI-Tools de El Ghaoui²¹, la LMI Control Toolbox de MathWorks [22] et l'interface SeDuMi développé au LAAS par Peaucelle et al. [27]. On pourra également utiliser l'outil YALMIP²².

Les trois problèmes classiques que ces outils résolvent sont

- la faisabilité (ou existence) : trouver x solution de $A(x) < 0$,

21. <http://robotics.eecs.berkeley.edu/~elghaoui/>

22. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>

- la minimisation d’une fonction linéaire ; trouver x minimisant $c^T x$ sous la contrainte $A(x) < 0$,
- le problème de valeur propre généralisée : minimiser λ sous les contraintes $A(x) < \lambda B(x)$, $B(x) > 0$ et $C(x) < 0$.

Références

- [1] A. P. Sage and C. C. White, *Optimum Systems Control*, Prentice Hall, 1977.
- [2] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, 1989.
- [3] E. Ostertag, *Commande et Estimation Multivariables*, TechnoSup, Ellipses, Paris, 2006.
- [4] L. Pontriaguine, V. Boltianski, G. Gamkrelidze, and E. Michtchenko, *Théorie Mathématique des Processus Optimaux*, Moscou : Mir, 1974.
- [5] H. Bourles, *Optimisation et Commande Optimale*, École Normale Supérieure de Cachan, 1996.
- [6] G. Duc, *Robustesse des Systèmes Linéaires Multivariables*, École Supérieure d’Électricité, 1994.
- [7] N. A. Lehtomaki, N. R. Sandell, and M. Athans, “Robustness results in linear quadratic gaussian based multivariable control design,” *IEEE Trans. Autom. Control*.
- [8] E. Ostertag, *Filtrage Optimal et Commande Optimale*, École Supérieure de Physique de Strasbourg, 2002.
- [9] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, 1990.
- [10] W. F. Arnold and A. J. Laub, “Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic riccati equations,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 72, pp. 1746–1754, 1984.
- [11] The MathWorks Inc., *Getting Started with the Control System Toolbox*, 2000-2002.
- [12] W. Bachtá, P. Renaud, E. Laroche, A. Forgiona, and J Gangloff, “Motion prediction for computer-assisted beating heart surgery,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2009.
- [13] M. H. A. Davis, *Linear Estimation and Stochastic Control*, Chapman and Hall, 1977.

- [14] J. C. Doyle and G. Stein, “Robustness with observers,” *IEEE Trans. Autom. Control*.
- [15] J. C. Doyle and G. Stein, “Multivariable feedback design : Concepts for a classical/modern synthesis,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 26, no. 1, 1981.
- [16] J. B. Moore and L. Xia, “Loop recovery and robust state estimate feedback design,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, no. 6, 1987.
- [17] G. Stein and M. Athans, “The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 32, no. 2, 1987.
- [18] J. D. Birdwell and A. J. Laub, “Balanced singular values for lqg/ltr design,” *International Journal of Control*, vol. 45, no. 3, 1987.
- [19] Z. Zhang and J. Freudenberg, “Loop transfert recovery for nonminimal phase plants,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 5, 1990.
- [20] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, “Multi-objective output-feedback control via LMI optimization,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 42, no. 7, pp. 896–911, 1997.
- [21] Y. Nesterov and A. Nemirovski, *Interior-point Polynomial Methods in Convex Programming*, SIAM, 1994.
- [22] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The MathWorks Inc., 1995.
- [23] D. Alazard and P. Apkarian, “Exact observer-based structures for arbitrary compensators,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 9, pp. 101–118, 1999.
- [24] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, and G. Ferrères, *Robustesse et Commande Optimale*, Cépaduès Éditions, 1999.
- [25] M. Berriri, “Commande LPV d’un système d’entraînement de bande flexible,” 2004.
- [26] G. Bornard, F. Celle-Couenne, and G. Gilles, *Observation, Observabilité*, vol. 1, chapter 5, pp. 177–221, Masson, Paris, 1993, in A.J. Fossard and D. Normand-Cyrot, *Systèmes non-linéaires*.
- [27] D. Peaucelle, D. Henrion, Y. Labit, and K. Taitz, *User’s guide for SeDuMi interface*, LAAS - CNRS, <http://www.laas.fr/~peaucell/SeDuMiInt.html>, 2002.