

Electrotechnique
Licence Physique et Applications
Spécialité Ingénierie

Edouard Laroche
Université Louis Pasteur de Strasbourg
laroche@lsiit.u-strasbg.fr
<http://eavr.u-strasbg.fr/perso/edouard/Student>

22 février 2006

Table des matières

1	Les grandeurs électriques	9
2	Les dipôles électriques	13
2.1	Conventions	13
2.2	Résistance	13
2.3	Inductance	14
2.4	Capacité	15
2.5	Sources	15
3	Régime transitoire (équations différentielles)	17
3.1	Equation différentielle du premier ordre	17
3.1.1	Equation sans second membre	17
3.1.2	Equation avec second membre	18
3.1.3	Méthode de la variation de la constante	19
3.2	Equation différentielle du second ordre	20
3.2.1	Equation différentielle sans second membre	20
3.2.2	Équation différentielle avec second membre	22
4	Le régime sinusoïdal monophasé	23
4.1	Définition	23
4.2	Puissance	24
4.3	Dipôles en régime sinusoïdal	25
4.3.1	Résistance	25
4.3.2	Inductance	25
4.3.3	Condensateur	26
4.4	Relèvement du facteur de puissance	26
4.5	Notations de Fresnel	27
4.5.1	Introduction	27

4.5.2	Impédance complexe	27
4.5.3	Puissance complexe	28
5	Lois des réseaux électriques	31
5.1	Lois de Kirchhoff	31
5.1.1	Loi des nœuds	31
5.1.2	Loi des mailles	33
5.1.3	Théorème de Millmann	34
5.2	Sources équivalentes	35
5.2.1	Modèle de Thevenin	35
5.2.2	Modèle de Norton	36
5.3	Théorème de superposition	36
6	Le régime sinusoïdal triphasé équilibré	37
6.1	Introduction	37
6.2	Couplage en étoile	38
6.3	Couplage en triangle	40
6.4	Équivalence triangle/étoile	42
6.5	Méthode d'étude	43
7	Mesures	45
7.1	Mesures de tension et de courant	45
7.1.1	Les différentes technologies de mesure	45
7.1.2	Lecture sur un appareil analogique	45
7.1.3	Réduction du courant	46
7.1.4	Sondes pour la visualisation	46
7.2	Mesures de puissance	46
7.2.1	Méthode des deux watt-mètres	47
7.3	Incertitudes	48
7.3.1	Mesures	49
7.3.2	Calculs	49
7.4	Techniques numériques de mesure	50
8	Circuits magnétiques	51
8.1	Magnétostatique	51
8.1.1	Généralités	51
8.1.2	Théorème d'Ampère	52
8.1.3	Lois de comportement des matériaux	54

8.1.4	Flux magnétique	55
8.1.5	Loi d’Hopkinson	56
8.1.6	Induction électromagnétique	57
8.1.7	Forces et couples électromécaniques	58
8.2	Transformateur	61
8.2.1	Constitution	61
8.2.2	Equations du transformateur	61
8.2.3	Modèle du transformateur idéal	63
8.2.4	Prise en compte de l’énergie magnétique	63
8.2.5	Prise en compte des fuites magnétiques	64
8.2.6	Pertes Joule	65
8.2.7	Pertes fer	66
8.2.8	Modèles simplifiés	67
8.2.9	Estimation des paramètres	68
9	Les moteurs électriques	71
9.1	Généralités	71
9.1.1	Terminologie	71
9.1.2	Principe général de la conversion électromécanique	72
9.1.3	Principe de fonctionnement	73
9.2	Moteur à courant continu	74
9.2.1	Principe et équations	74
9.2.2	Différents types de moteurs	76
9.3	Moteur synchrone	78
9.3.1	Stator des machines à courant alternatif	78
9.3.2	Constitution du rotor	79
9.3.3	Force-électromotrice induite	80
9.3.4	Modèle de Behn-Eschenburg	81
9.4	Moteur asynchrone	82
9.4.1	Constitution	82
9.4.2	Principe de fonctionnement	83
9.4.3	Modélisation	83
9.4.4	Bilan de puissance	85
9.4.5	Expression du couple	86
9.4.6	Identification des paramètres	88
A	Historique de l’électricité	91

B Bibliographie	93
B.1 Ouvrages	93
B.2 Sites Internet	94

Introduction

L'électrotechnique est la discipline qui étudie les questions relatives à l'énergie électrique. Issue de travaux principalement développés au XIX^{ème} siècle, elle constitue aujourd'hui encore un bagage de base nécessaire pour des études supérieures et des activités professionnelles dans de nombreux secteurs. En effet, l'énergie électrique est de plus en plus présente dans les systèmes toujours plus sophistiqués et plus nombreux qui facilitent nos activités quotidiennement.

Ce cours d'électrotechnique se propose de vous faire découvrir et approfondir les connaissances relatives à l'étude des problèmes la puissance électrique. A travers cet enseignement, il s'agira également d'approfondir par leur usage les connaissances de mathématique utiles en électricité (intégrales, nombres complexes, équations différentielles). Il s'agira également de développer l'esprit de raisonnement physique en montrant des démarches déductives permettant de passer de connaissances théoriques à des modèles utilisables en pratique. L'aspect expérimental est également présent avec des activités de travaux pratiques.

Ce document n'a pas la prétention de se suffire à lui-même. Il consitue plutôt des notes qui vous serviront à préparer, travailler et approfondir le cours. Il vous appartient de vous approprier ce document, de le travailler autant qu'il faut pour arriver à une compréhension satisfaisante. Des exercices sont inclus ; entraînez vous à les faire et à les refaire. N'hésiter pas à utiliser également d'autres ouvrages et ressources bibliographiques que vous jugerez utiles. Des références non exhaustives sont données en annexe à cet effet.

Cet enseignement compte pour 3 ECTS, ce qui correspond à 90 heures de travail personnel toutes activités confondues. Si on retranche les 26 heures d'activités présentielles, on observe qu'il reste 64 heures de travail personnel à faire pour un étudiant de niveau moyen. Si un étudiant brillant peut se satisfaire de moins, un étudiant rencontrant des difficultés ne doit pas hésiter

à travailler d'avantage. La progression prévue suppose que les séances soient préparées. Entre chaque séance, vous devrez revoir et approfondir les parties qui auront été vues précédemment. Vous devrez également préparer la séance suivante en travaillant le cours et faisant les exercices afin que les séances de TD soient consacrées principalement à répondre aux questions et à lever les difficultés rencontrées. A titre indicatif, les 64 heures de travail personnel peuvent-être réparties somme suit : pour chaque séance de TD, 3 heures de préparation avant la séance et 3 heures d'approfondissement ensuite, soit 6 heures de travail personnel entre 2 séances. Pour les TP, 7 heures peuvent-être consacrées pour chacune des 3 séances, dont 4 heures de préparation et 3 heures pour la rédaction du compte-rendu.

L'évaluation de l'enseignement se fera par deux examens de contrôle continu d'une heures au cours des différentes séances et par l'évaluation des compte-rendus des séances de TP. L'écrit comptera pour $2/3$ de la note et les TP pour $1/3$.

Chapitre 1

Les grandeurs électriques

Lorsqu'on parle de signal, on fait référence aux variations d'une grandeur en fonction du temps t (unité la seconde, notée s). Les signaux électriques sont la tension, notée $u(t)$ ou $v(t)$ (unité le Volt, noté V) et le courant noté $i(t)$ ou $j(t)$ (unité l'Ampère, noté A). On travaille également sur la puissance $p(t) = u(t).i(t)$ (unité le Watt, noté W = V.A). Afin de présenter des définitions pour tout type de signal, on utilisera le signal $x(t)$ qui prendra la place de n'importe quel signal électrique.

La puissance $p(t)$ est la dérivée de l'énergie électrique $W_e(t)$ (en Joule, noté J = W.s) reçue par le dipôle :

$$p(t) = \frac{dW_e(t)}{dt} \quad (1.1)$$

Propriété 1 (Conservation de l'énergie) *L'énergie absorbée par un système est égale à la somme de l'énergie qu'il a dissipée et de l'énergie qu'il a emmagasinée.*

La plupart du temps, on travaillera sur des *signaux périodiques* de période T .

Définition 1 (Signal périodique) *Un signal $x(t)$ est périodique de période T si $x(t + T) = x(t)$ pour tout t . Sa fréquence est alors $f = \frac{1}{T}$ (en Hertz, noté Hz).*

Propriété 2 (Calcul de l'intégrale) *L'intégrale d'un signal périodique de période T sur un intervalle de largeur égale à T est identique quelque soit l'intervalle choisi. On note $\int_T x(t)dt$ cette intégrale.*

Pour un signal $x(t)$ périodique de période T , on définit la *valeur moyenne* et la *valeur efficace*.

Définition 2 (Valeur moyenne) *La valeur moyenne de $x(t)$ est le signal constant qui a la même intégrale sur une période. On notera $\langle x \rangle$ cette quantité.*

Propriété 3 (Calcul de la valeur moyenne)

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t).dt \quad (1.2)$$

Définition 3 (Valeur efficace) *La valeur efficace de $x(t)$ est le signal constant dont le carré a la même valeur moyenne que $x^2(t)$. On notera X_{eff} cette quantité.*

Propriété 4 (Calcul de la valeur efficace)

$$X_{eff} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} \quad (1.3)$$

Remarque 1 (Valeur RMS = valeur efficace) *La valeur efficace est la racine carrée de la moyenne du carré du signal, ce qui se dit en anglais root mean square et donne les initiales RMS couramment utilisées.*

Propriété 5 (Valeur efficace nulle) *Un signal qui a une valeur efficace nulle est nul à tout instant.*

Définition 4 (Régime continu) *Le régime continu est caractérisé par des valeurs moyennes non-nulles. Dans ce cas, c'est aux valeurs moyennes des signaux que l'on s'intéresse.*

Définition 5 (Régime alternatif) *Le régime alternatif est caractérisé par des valeurs moyennes nulles. Dans ce cas, c'est aux valeurs efficaces que l'on s'intéresse.*

Définition 6 (Puissance moyenne) *On appelle puissance moyenne ou puissance active la valeur moyenne de la puissance :*

$$P = \langle p(t) \rangle . \quad (1.4)$$

Définition 7 (Puissance apparente) *La puissance apparente S (unité VA) est définie comme le produit des valeurs efficaces de la tension et du courant :*

$$S = U_{eff} \cdot I_{eff} \quad (1.5)$$

La puissance apparente est supérieure ou égale à la puissance moyenne. Le facteur de puissance F_p caractérise le rapport entre ces deux grandeurs :

$$F_p = \frac{P}{S} \quad (1.6)$$

Avec les conventions adéquates, F_p est positif et on a $0 \leq F_p \leq 1$. Un facteur de puissance proche de 1 (0,9 par exemple) correspond à une bonne utilisation de l'électricité alors qu'un facteur de puissance nul où très faible correspond à de la tension et du courant avec pas ou peu d'échange d'énergie.

Remarque 2 *On ne s'intéresse jamais à la valeur efficace de la puissance. En effet, seule la puissance moyenne a un sens physique. D'ailleurs, pour connaître l'énergie transférée sur un intervalle de temps par une ligne, il suffit de multiplier la puissance moyenne par la durée de l'intervalle.*

Propriété 6 (La valeur moyenne est un opérateur linéaire) *Cela signifie que la valeur moyenne de la somme de deux signaux est la somme de leurs valeurs moyennes et que la valeur moyenne d'un signal multiplié par une constante s'obtient en multipliant la valeur moyenne du signal par cette même valeur.*

$$\langle x(t) + y(t) \rangle = \langle x(t) \rangle + \langle y(t) \rangle \quad (1.7)$$

$$\langle \lambda \cdot x(t) \rangle = \lambda \langle x(t) \rangle \quad (1.8)$$

Propriété 7 (La valeur efficace n'est pas un opérateur linéaire) *Pour la valeur efficace, seule la seconde propriété est valable. Si $y(t) = \lambda \cdot x(t)$, alors $Y_{eff} = \lambda \cdot X_{eff}$.*

Exercice 1 (Valeur moyenne et linéarité) *Démontrez la Propriété 6.*

Exercice 2 (Valeur efficace et linéarité) *Démontrez la Propriété 7. Trouvez un contre-exemple simple prouvant que la valeur efficace de la somme de deux signaux n'est pas, généralement, la somme des valeurs efficaces des signaux.*

Exercice 3 (Valeur moyenne et efficace d'un créneau) *On considère le signal $x(t)$ périodique de période T égal à E sur $[0; \alpha T[$ et à $-E$ sur $[\alpha T; T[$ avec $0 < \alpha < 1$. Déterminez la valeur moyenne et la valeur efficace de ce signal.*

Exercice 4 (Valeur moyenne d'une sinusoïde redressée) *On considère le signal $x(t)$ périodique de période $T/2$ égal à $X \cos(\omega.t)$ sur $[-T/4; T/4]$. Déterminez sa valeur moyenne.*

Exercice 5 (Valeur efficace d'une sinusoïde) *Déterminez la valeur efficace de $x(t) = X \cos(\omega.t)$.*

Exercice 6 (Puissance en sinusoïdal) *Un dipôle a à ses bornes la tension $u(t) = U \cos(\omega.t)$ et est parcouru par le courant $i(t) = I \sin(\omega.t - \phi)$. Déterminez sa puissance moyenne.*

Chapitre 2

Les dipôles électriques

2.1 Conventions

En convention récepteur, la puissance calculée est la puissance fournie par le circuit et absorbée par le dipôle. Elle est globalement positive pour une charge et négative pour un générateur. En convention générateur, la puissance calculée est la puissance fournie par le dipôle au circuit. Elle est globalement positive pour un générateur et négative pour une charge. Les conventions peuvent être choisies arbitrairement. Les lois de comportement des dipôles changent de signe suivant la convention choisie ; il est donc préférable de choisir la convention appropriée (récepteur pour une charge et générateur pour une source).

2.2 Résistance

Certains dipôles électriques ont la propriété d'avoir un signal de courant proportionnel au signal de tension à tout instant. On appelle *résistance* (noté R , d'unité l'Ohm $\Omega = \text{V/A}$) le coefficient de proportionnalité tel que $u(t) = Ri(t)$ pour tout t . Notons qu'il s'agit d'une propriété mathématique qui, pour un système physique, ne correspondra qu'à une approximation de la réalité, valable dans un certain domaine. Les dipôles couramment modélisés par une résistance sont les rhéostats (chauffage) et les lampes (du moins les ampoules à filament). En convention récepteur, la résistance est positive.

De manière évidente, on montre que la loi de proportionnalité reste valable pour les valeurs moyennes et efficaces ($\langle u \rangle = R \cdot \langle i \rangle$ et $U_{eff} = R \cdot I_{eff}$),

cf. exercice 7).

La puissance s'écrit $p(t) = u(t).i(t) = R.i^2(t) = \frac{1}{R}u^2(t)$. La puissance moyenne s'écrit $P = R. \langle i^2(t) \rangle = R.I_{eff}^2$ ou $P = \frac{1}{R} \langle u^2(t) \rangle = \frac{1}{R}U_{eff}^2$. On comprend maintenant la notion de "valeur efficace" : il s'agit de la valeur du courant (ou de la tension) qui, s'il traversait une résistance, produirait le même échauffement.

Un câble cylindrique de section uniforme S (en m^2) et de longueur l (en m), composé d'un matériau de conductivité σ (en $\Omega^{-1}m^{-1}$) a comme résistance :

$$R = \frac{l}{\sigma S}. \quad (2.1)$$

On utilise également la résistivité $\rho = 1/\sigma$ (en Ωm). Les matériaux les plus conducteurs sont le cuivre et l'aluminium ; leur conductivité est de l'ordre de $10^8 \Omega^{-1}m^{-1}$.

Exercice 7 Montrez que $\langle u \rangle = R. \langle i \rangle$ et que $U_{eff} = R.I_{eff}$ pour des signaux périodiques quelconques.

2.3 Inductance

Certains dipôles électriques ont la propriété d'avoir une tension proportionnelle à la dérivée du courant. On appelle inductance (notée L , d'unité le Henry, $H=Vs/A$) ce coefficient de proportionnalité tel que $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. Les bobinages électriques sont modélisés en première approximation par une telle inductance¹. En convention récepteur, l'inductance est positive.

La puissance instantanée s'écrit $p(t) = u(t).i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t)$. La quantité d'énergie transférée entre les instants t_0 et t est :

$$\int_{t_0}^t p(\tau).d\tau = \int_{t_0}^t L \frac{di(\tau)}{d\tau} i(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$= \left[\frac{1}{2} L i^2(\tau) \right]_{\tau=t_0}^{\tau=t} \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{2} L i^2(t) - \frac{1}{2} L i^2(t_0) \quad (2.4)$$

¹Ce modèle n'est pas valable en basse fréquence et en régime continu où l'effet de la résistance du circuit est prépondérant.

En considérant qu'à t_0 le courant est nul ($i(t_0) = 0$) et que cela correspond à un niveau d'énergie nul, on observe que l'énergie transmise est $W_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$. Cette énergie n'est pas dissipée comme c'était le cas pour la résistance ; elle est stockée et peut être libérée par une diminution de $i(t)$. Remarquons que le courant dans une inductance ne peut être discontinu (cela correspondrait à une tension infinie) ; placé dans un circuit, une inductance a donc tendance à lisser le courant la traversant. En régime continu constant, l'inductance se comporte comme un court-circuit.

2.4 Capacité

La capacité est l'élément dual de l'inductance : il suffit d'échanger les rôles de la tension et du courant. Ainsi, la capacité C correspond à une proportionnalité entre le courant et la dérivée de la tension : $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ (unité : le Farad noté $F=As/V$). Les condensateurs sont des dipôles dont le modèle classique est un condensateur. Tout comme l'inductance, la capacité stocke de l'énergie : $W_C(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$. La tension ne peut être discontinue aux bornes d'une capacité à moins d'un courant infini ; placée aux bornes d'un circuit, la capacité a donc tendance à diminuer les variations de tension à ses bornes. En convention récepteur, la capacité est positive. En régime continu constant, la capacité se comporte comme un circuit ouvert.

2.5 Sources

On distingue des sources de tension et de courant. Une source de tension a la propriété d'imposer la valeur de la tension à ses bornes quelque soit le courant qui la parcourt ; une telle source ne peut être mise en court-circuit sous risque de destruction. Une source de courant a la propriété d'imposer la valeur du courant la traversant, du moins tant que son circuit n'est pas ouvert. Les sources peuvent être continues (constante ou non), alternatives (sinusoïdales ou non).

Exercice 8 *Un condensateur de capacité C est traversé par un courant périodique de période T et de rapport cyclique $\alpha = 0,75$ égal à I sur $[0; \alpha T]$ et égal à $-I$ sur $[\alpha T; T]$. Le condensateur a une tension nulle à $t = 0$. Déterminez l'allure de la tension aux bornes du condensateur. Valeurs numériques : $I = 10 A$, $C = 1 mF$ et $T = 10 \mu s$.*

Chapitre 3

Régime transitoire (équations différentielles)

3.1 Equation différentielle du premier ordre

3.1.1 Equation sans second membre

Considérons l'équation différentielle suivante¹ :

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \quad (3.1)$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$ où a est un réel constant et $y(t)$ est le signal inconnu. Cette équation peut se réécrire :

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -a \quad (3.2)$$

En intégrant cette expression entre t_0 et t , on obtient :

$$\int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{\dot{y}(\tau)}{y(\tau)} d\tau = \ln(y(t)) - \ln(y(t_0)) = -a(t - t_0) \quad (3.3)$$

En appliquant aux deux membres la fonction exponentielle², on obtient :

$$y(t) = y(0) \exp(-a(t - t_0)) \quad (3.4)$$

¹On note $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

²On rappelle que $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$, que $\exp(a - b) = \exp(a)/\exp(b)$ et que $\exp(\ln(x)) = x$.

La solution est une fonction exponentielle passant par $y(t_0)$ à t_0 , convergeant vers 0 si a est positif et divergeant vers l'infini si a est négatif.

Exercice 9 (Allure d'une exponentielle) On considère la fonction $x(t) = A \exp(-at)$ avec $a > 0$. Déterminez l'équation de la droite tangente à la fonction en $t = 0$; tracez cette droite dans le plan (t, x) . Déterminez et placez les points $x(\tau)$ et $x(3\tau)$ où $\tau = 1/a$. Déduisez en un tracé relativement précis de la fonction $x(t)$.

Exercice 10 (Décharge d'un condensateur) On considère une capacité C , chargée à la tension E , en série avec une résistance R . A $t = 0$, on court-circuite le dipôle. Déterminez l'équation différentielle liant le courant et la tension. Déterminez les expressions du courant et de la tension; représentez leurs formes d'onde.

Exercice 11 (Ouverture d'un inductance) Une inductance L est court-circuitée par un transistor dont on néglige la chute de tension. A $t = 0$, on ouvre le transistor, obligeant ainsi le courant parcourant l'inductance à se déverser dans une résistance R . Déterminez l'équation différentielle liant le courant et la tension. La valeur initiale du courant étant I , déterminez son expression en fonction du temps; représentez son allure.

3.1.2 Equation avec second membre

Considérons maintenant l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \quad (3.5)$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$ où a et b sont des réels constants, $u(t)$ est un signal connu et $y(t)$ est le signal inconnu.

Supposons qu'une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation est connue, vérifiant donc :

$$\dot{y}_p(t) + ay_p(t) = bu(t). \quad (3.6)$$

En soustrayant (3.6) à (3.5) et en notant :

$$\delta_y(t) = y(t) - y_p(t), \quad (3.7)$$

on obtient : $\dot{\delta}_y(t) + a\delta_y(t) = 0$. Il s'agit alors d'une équation différentielle sans second membre dont la solution s'écrit $\delta_y(t) = \lambda \exp(-a(t - t_0))$ où λ est une constante à déterminer. La solution générale s'écrit alors :

$$y(t) = y_p(t) + \lambda \exp(-a(t - t_0)). \quad (3.8)$$

La condition initiale permet d'écrire : $y(t_0) = y_p(t_0) + \lambda \exp(0) = y_0$, ce qui donne $\lambda = y_0 - y_p(t_0)$ d'où la solution complète :

$$y(t) = y_p(t) + (y_0 - y_p(t_0)) \exp(-a(t - t_0)). \quad (3.9)$$

Dans le cas où le second membre est constant, i.e. $u(t) = u$, une solution particulière constante est évidente : $y_p(t) = y_p = \frac{bu}{a}$. La solution s'écrit alors :

$$y(t) = y_0 \exp(-a(t - t_0)) + \frac{bu}{a}(1 - \exp(-a(t - t_0))). \quad (3.10)$$

Exercice 12 (Mise sous tension d'une charge inductive) Une charge inductive, composée de la mise en série d'une inductance L et d'une résistance R et initialement parcourue par un courant nul est connectée à une source de tension constante E à $t = 0$. Déterminez l'expression du courant en fonction du temps ; représentez son allure.

Exercice 13 (Charge RL en régime sinusoïdal) On considère un dipôle RL série (de résistance R et d'inductance L), parcouru par un courant $i(t)$ et soumis à une tension sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$. (1) Déterminez l'équation différentielle liant le courant et la tension. (2) On ne s'intéresse qu'au régime permanent sinusoïdal ; montrez que $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi)$ est une solution. (3) Déterminez I_m et ϕ .

3.1.3 Méthode de la variation de la constante

Lorsqu'on ne parvient pas à trouver une solution particulière permettant de se ramener à la résolution d'une équation sans second membre, on peut avoir recours à une méthode un peu plus compliquée appelée *méthode de la variation de la constante*. Cette méthode consiste à chercher la solution de l'équation différentielle (3.5) sous la forme :

$$y(t) = \lambda(t) \cdot \exp(-at). \quad (3.11)$$

On s'inspire donc de la forme de la solution de l'équation différentielle sans second membre mais on transforme la constante λ en une fonction du temps.

La dérivée de $y(t)$ s'écrit alors :

$$\dot{y}(t) = \dot{\lambda}(t) \cdot \exp(-at) - a\lambda(t) \cdot \exp(-at). \quad (3.12)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle (3.5), une simplification apparaît et on obtient :

$$\dot{\lambda}(t) = u(t) \exp(at). \quad (3.13)$$

Le succès de la méthode repose alors sur la capacité à intégrer cette dernière équation, ce qui n'est pas toujours possible. Dans le cas où une primitive $\lambda(t)$ est trouvée à une constante c près, la solution est alors de la forme :

$$y(t) = (\lambda(t) + c) \cdot \exp(-at). \quad (3.14)$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante c d'après la condition initiale.

Exercice 14 (Mise sous tension sinusoïdale d'un circuit RL) *Un circuit composé d'une résistance R et d'une inductance L connectés en série, initialement traversé par un courant nul est branché à $t = 0$ sur une source de tension sinusoïdale de forme d'onde $U \cos(\omega t)$. Déterminez l'expression du courant³.*

3.2 Equation différentielle du second ordre

3.2.1 Equation différentielle sans second membre

Soit l'équation différentielle⁴ :

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0. \quad (3.15)$$

Sa résolution passe par la résolution d'une équation associée :

$$r^2 + ar + br = 0 \quad (3.16)$$

dont les solutions sont bien connues^{5,6} :

$$r_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (3.17)$$

$$r_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (3.18)$$

³On pourra s'appuyer sur l'exercice 13 pour la détermination d'une solution particulière. On pourra également utiliser la méthode de la variation de la constante; on rappelle la décomposition de la fonction cosinus en exponentielles complexes : $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\exp(j\alpha) + \exp(-j\alpha))$.

⁴On note $\ddot{y}(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$.

⁵On peut facilement trouver ce résultat en notant que $r^2 + ar + br = (r + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + b$.

⁶Cette expression reste valable si l'argument de la racine carrée est négatif à condition de considérer $\sqrt{-1} = j$.

Les solutions de l'équation différentielle (3.15) sont alors de la forme :

$$y(t) = \lambda \exp(r_1 t) + \mu \exp(r_2 t) \quad (3.19)$$

où λ et μ sont deux constantes à déterminer d'après les conditions initiales.

Exercice 15 Montrez que la fonction (3.19) est bien solution de l'équation différentielle 3.15.

Dans le cas où le discriminant de (3.16) est négatif, les racines r_1 et r_2 sont complexes conjuguées et s'écrivent donc :

$$r_1 = r + js \quad (3.20)$$

$$r_2 = r - js \quad (3.21)$$

La solution de l'équation (3.15) s'écrit alors :

$$y(t) = \lambda \exp(rt) \exp(jst) + \mu \exp(rt) \exp(-jst) \quad (3.22)$$

$$= \exp(rt) (\lambda (\cos(st) + j \sin(st)) + \mu (\cos(st) - j \sin(st))) \quad (3.23)$$

$$= \exp(rt) ((\lambda + \mu) \cos(st) + j(\lambda - \mu) \sin(st)) \quad (3.24)$$

Puisque nous ne considérons ici que des équations à coefficients réels, la solution est nécessairement à coefficients réels. Ainsi, $c = \lambda + \mu$ et $d = j(\lambda - \mu)$ sont des coefficients réels. La solution s'écrit donc sous la forme :

$$y(t) = \exp(rt) (c \cos(st) + d \sin(st)). \quad (3.25)$$

Il reste encore à déterminer les constantes c et d d'après les conditions initiales.

Dans le cas où les deux racines r_1 et r_2 sont identiques égales à $-\frac{a}{2}$ (discriminant nul), la solution générale est de la forme :

$$y(t) = (\lambda + \mu t) \exp(-\frac{a}{2}t) \quad (3.26)$$

Pour cela, il suffit de montrer que $t \exp(-\frac{a}{2}t)$ est solution de l'équation différentielle 3.15.

Exercice 16 (Décharge d'un circuit RLC) Un circuit RLC série de résistance R , l'inductance L et de capacité C est initialement ouvert ; la capacité étant chargée à la tension E . A l'instant $t = 0$, on court-circuite ce dipôle.

(1) Déterminez l'équation différentielle du second ordre liant le courant et ses dérivées.

(2) Donnez les conditions initiales sur $i(t)$ et $\frac{di(t)}{dt}$.

(3) Donnez l'expression du courant et tracez sa forme d'onde.

Exercice 17 (Mise sous tension d'un circuit RLC) *Un circuit RLC série de résistance R , l'inductance L et de capacité C est initialement ouvert et déchargé. A l'instant $t = 0$, on connecte ce dipôle avec un générateur de tension constante d'amplitude E . On donne $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ mF}$ et $E = 50 \text{ V}$.*

- (1) Déterminez l'équation différentielle du second ordre liant le courant et ses dérivées.
- (2) Donnez les conditions initiales sur $i(t)$ et $\frac{di(t)}{dt}$.
- (3) Donnez l'expression du courant et tracez sa forme d'onde.
- (4) Donnez l'allure des tensions aux bornes de la résistance, de l'inductance et de la capacité.

3.2.2 Équation différentielle avec second membre

Soit l'équation différentielle :

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = u(t). \quad (3.27)$$

Comme pour les équations différentielles du premier ordre avec second membre, on peut se ramener à l'équation sans second membre dès lors qu'une solution particulière est trouvée.

Exercice 18 (Mise sous tension d'un circuit RLC - 2) *Un circuit RLC composé d'une résistance R , l'inductance L et de capacité C est câblé comme suit : la capacité est connectée en parallèle sur la résistance, l'ensemble étant connecté en série avec l'inductance. Le circuit étant initialement ouvert et déchargé, on le connecte à $t = 0$ à un générateur de tension constante d'amplitude E . On donne $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ mF}$ et $E = 50 \text{ V}$.*

- (1) Déterminez l'équation différentielle du second ordre liant la tension $v(t)$ du condensateur et ses dérivées.
- (2) Donnez les conditions initiales sur $v(t)$ et $\frac{dv(t)}{dt}$.
- (3) Donnez l'expression de la tension et tracez sa forme d'onde.
- (4) Donnez l'expression et l'allure des tensions et courants relatifs à chacun des éléments du dipôle.

Chapitre 4

Le régime sinusoïdal monophasé

4.1 Définition

Le régime sinusoïdal est un régime alternatif particulier où l'ensemble des tensions et courants ont une allure sinusoïdale à une pulsation unique ω (en rad/s) :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.1)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta) \quad (4.2)$$

Une fois choisie une référence des temps, chaque tension ou courant est déterminé par deux grandeurs : son amplitude et son déphasage à $t = 0$ (ou déphasage à l'origine).

Les valeurs efficaces des signaux sont $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$. L'indication "eff" n'est plus nécessaire ; seule la valeur efficace étant importante en régime alternatif. On notera par la suite les grandeurs :

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.3)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \beta) \quad (4.4)$$

La pulsation est liée à la fréquence f par la relation $\omega = 2\pi f$. Les deux fréquences des réseaux électriques sont le 50 Hz présent notamment en Europe et le 60 Hz utilisé en Amérique du nord.

Un signal est en avance sur un autre si son déphasage à l'origine est plus important ; l'onde correspondante est alors décalée vers la gauche (vers les t négatifs).

4.2 Puissance

La puissance instantanée $p(t) = u(t)i(t)$ peut s'écrire $p(t) = UI \cos(\alpha - \beta) + UI \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$. La puissance instantanée est donc la somme de deux termes : un terme constant $UI \cos(\phi)$ où $\phi = \alpha - \beta$ est le déphasage de la tension par rapport au courant et un terme sinusoïdal à la pulsation 2ω .

La puissance moyenne est :

$$P = UI \cos(\phi) \quad (4.5)$$

La puissance apparente est :

$$S = UI \quad (4.6)$$

Le facteur de puissance est :

$$F_p = \cos(\phi) \quad (4.7)$$

On définit une nouvelle forme de puissance : la *puissance réactive* Q (unité var pour Vol-Ampère réactif) :

$$Q = UI \sin(\phi) \quad (4.8)$$

On montre simplement que :

$$S^2 = P^2 + Q^2. \quad (4.9)$$

En travaillant dans un repère où l'axe des abscisses est gradué en P et l'axe des ordonnées est gradué en Q , on met en évidence le triangle des puissance dont les sommets sont les points de coordonnées $(0,0)$, $(P,0)$ et (P,Q) où S est l'hypothénuse. Dans ce triangle, ϕ est l'angle entre le coté confondu avec l'axe des abscisses et l'hypothénuse.

Propriété 8 (Conservation de l'énergie active) *L'énergie active totale absorbée par un circuit est égale à la somme des énergies actives absorbées par ses différents constituants.*

En effet, du fait de la périodicité, il n'y a pas de variation d'énergie stockée au bout d'une période.

Propriété 9 (Conservation de l'énergie réactive) *L'énergie réactive totale absorbée par un circuit est égale à la somme des énergies réactives absorbées par ses différents constituants. Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Boucherot.*

Remarque 3 (Pas de conservation de la puissance apparente) *De manière générale, la puissance apparente absorbée par un circuit n'est pas égale à la somme des puissances apparentes absorbées par ses différents composants.*

4.3 Dipôles en régime sinusoïdal

4.3.1 Résistance

Pour une résistance R , la relation tension-courant implique :

$$U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha) = RI\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta) \quad (4.10)$$

Or deux fonctions sinusoïdales de même pulsation sont identiques si et seulement si leur amplitude et leur déphasage à l'origine sont identiques. Ce ne peut être le cas que si :

$$U = RI \quad (4.11)$$

$$\alpha = \beta \quad (4.12)$$

Le déphasage tension-courant est nul et on a : $P = S = RI^2 = U^2/R$, $Q = 0$ et $F_p = 1$. La résistance consomme uniquement de l'énergie active.

4.3.2 Inductance

Pour une inductance L , la relation tension-courant s'écrit :

$$U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha) = L\omega I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}) \quad (4.13)$$

Ce qui donne comme relation :

$$U = L\omega I \quad (4.14)$$

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \quad (4.15)$$

Le déphasage est $\phi = \frac{\pi}{2}$ (la tension est en avance de $\pi/2$ par rapport au courant) et on a : $P = 0$, $Q = S = L\omega I^2 = U^2/(L\omega)$ et $F_p = 0$. L'inductance consomme uniquement de l'énergie réactive.

4.3.3 Condensateur

Pour une capacité C , la relation tension-courant s'écrit :

$$I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta) = C\omega U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \quad (4.16)$$

Ce qui donne comme relation :

$$I = C\omega U \quad (4.17)$$

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad (4.18)$$

Le déphasage est $\phi = -\frac{\pi}{2}$ (le courant est en avance de $\pi/2$ par rapport à la tension) et on a : $P = 0$, $Q = -S = -C\omega U^2 = I^2/(C\omega)$ et $F_p = 0$. L'inductance fournit uniquement de l'énergie réactive.

4.4 Relèvement du facteur de puissance

La plupart des équipements industriels sont de nature inductive et consomment de la puissance réactive, aboutissant parfois à de mauvais facteurs de puissance. Ce facteur de puissance peut-être amélioré en ajoutant des condensateurs qui fournissent l'énergie réactive. Cela permet d'abaisser le courant absorbé par l'installation, diminuant ainsi les pertes et évitant un surdimensionnement de l'installation électrique.

Soit une installation sous une tension U nécessitant pour son fonctionnement une puissance active P . L'installation initiale a un facteur de puissance F_{p1} et consomme une puissance réactive Q_1 . Quelle puissance de condensateur faut-il fournir pour amener le facteur de puissance à $F_{p2} < F_{p1}$?

Soit Q_c l'énergie réactive que va fournir le condensateur et Q_2 l'énergie réactive consommée par l'installation après ajout du condensateur. Le théorème de Boucherot donne $Q_2 = Q_1 - Q_c$. En notant que $Q_1 = P \tan(\phi_1)$ et que $Q_2 = P \tan(\phi_2)$ (la puissance active nécessaire est inchangée), on obtient :

$$Q_c = P(\tan \phi_1 - \tan \phi_2) \quad (4.19)$$

Exercice 19 (Relèvement du facteur de puissance) Une installation monophasée sous une tension de 400 V consomme une puissance de 5 kW avec un facteur de puissance de 0,5.

(1) Déterminez la valeur efficace du courant, la puissance apparente et la

puissance réactive.

(2) *On envisage de mettre un condensateur en parallèle sur l'entrée de l'installation pour amener le facteur de puissance à 0,9. Déterminez la puissance réactive et la capacité du condensateur.*

4.5 Notations de Fresnel

4.5.1 Introduction

En principe, la résolution d'un problème d'électricité en régime sinusoïdal, c'est-à-dire la détermination des tensions et des courants, peut se faire en écrivant les solutions sous une forme sinusoïdale, d'amplitude et de phase inconnue, en remplaçant ensuite les tensions et courants dans les équations par leurs expressions et en cherchant ensuite à résoudre les équations (non-différentielles) obtenues afin de déterminer les amplitudes et déphasages (cf. Exercice 13).

Néanmoins, cette méthode est lourde en temps de calculs et n'est pas employée en pratique, sauf éventuellement pour des circuits élémentaires. En effet, les notations de Fresnel que nous allons introduire permettent de se transformer les équations différentielles en équations simples grâce aux variables imaginaires, permettant de simplifier grandement la résolution du problème.

Définition 8 (Vecteur de Fresnel) *Pour une grandeur sinusoïdale $x(t) = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \delta)$, le vecteur de Fresnel est le nombre imaginaire $\underline{X} = X\exp(j\delta)$.*

L'intérêt de cette notation réside dans le fait que la dérivée $\frac{dx(t)}{dt} = X\omega\sqrt{2}\cos(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2})$ a comme nombre complexe associé $j\omega\underline{X}$ ¹. Il suffit donc de retenir que dériver (en temporel) revient à multiplier par $j\omega$ (en complexe).

4.5.2 Impédance complexe

Pour une résistance, la loi d'Ohm s'écrit : $\underline{U} = R\underline{I}$; pour l'inductance, la loi de comportement est $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$ et pour le condensateur, c'est $\underline{I} = jC\omega\underline{U}$. Les relations différentielles de l'inductance et du courant sont transformées

¹En effet, $\exp(j(\delta + \frac{\pi}{2})) = \exp(j\frac{\pi}{2})\exp(\delta) = j\exp(\delta)$.

en lois d'Ohm généralisées de la forme $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$ ou $\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}$ où \underline{Z} et \underline{Y} sont respectivement l'impédance complexe et l'admittance complexe.

Les lois d'association série et parallèle s'appliquent aux impédances complexes. Ainsi, l'impédance complexe équivalente correspondant à deux dipôles mis en série est la somme des impédances complexes des dipôles. L'admittance complexe équivalente correspondant à deux dipôles mis en parallèles est la somme des complexes complexes des dipôles.

4.5.3 Puissance complexe

Définition

On définit la puissance complexe \underline{S} par :

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* \quad (4.20)$$

où \underline{I}^* représente le conjugué de \underline{I} , c'est-à-dire le nombre imaginaire de même module et d'argument opposé. Dans le cas où $\underline{U} = U \exp(j\alpha)$ et $\underline{I} = I \exp(j\beta)$, on a $\underline{S} = UI \exp j\phi$ avec $\phi = \alpha - \beta$. Ainsi, on obtient les relations suivantes :

$$S = |\underline{S}| \quad (4.21)$$

$$P = \Re(\underline{S}) \quad (4.22)$$

$$Q = \Im(\underline{S}) \quad (4.23)$$

$$\phi = \arg(\underline{S}) \quad (4.24)$$

$$\underline{S} = P + jQ \quad (4.25)$$

$$\underline{S} = S \exp(j\phi) \quad (4.26)$$

Propriété 10 (Conservation de la puissance complexe) *La puissance complexe absorbée par un système est la somme des puissances absorbées par ses différents constituants.*

Cette propriété découle de la conservation des puissances actives et réactives.

Puissance et impédance

Pour une impédance \underline{Z} ($\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$), la puissance complexe s'écrit² :

$$\underline{S} = \underline{Z}\underline{I}\underline{I}^* = \underline{Z}I^2 \quad (4.27)$$

²En se rappelant que $\underline{z}\underline{z}^* = |\underline{z}|^2$.

ce qui donne :

$$S = |\underline{Z}|I^2 = \underline{Z}I^2 \quad (4.28)$$

$$P = \Re(\underline{Z})I^2 \quad (4.29)$$

$$Q = \Im(\underline{Z})I^2 \quad (4.30)$$

$$\phi = \arg(\underline{Z}) \quad (4.31)$$

$$(4.32)$$

Pour une admittance \underline{Y} ($\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}$), la puissance complexe s'écrit :

$$\underline{S} = \underline{Y}^* \underline{U} \underline{U}^* = \underline{Y}^* \underline{U}^2 \quad (4.33)$$

ce qui donne :

$$S = |\underline{Y}|U^2 = \underline{Y}U^2 \quad (4.34)$$

$$P = \Re(\underline{Y})U^2 \quad (4.35)$$

$$Q = -\Im(\underline{Y})U^2 \quad (4.36)$$

$$\phi = -\arg(\underline{Y}) \quad (4.37)$$

$$(4.38)$$

Exercice 20 (Modèle d'une charge) Une charge monophasée sous tension sinusoïdale de 400 V à 50 Hz consomme 4 kW pour un courant sinusoïdal de 13 A de valeur efficace.

(1) On suppose que la charge est inductive ; déterminez les valeurs de la résistance et de l'inductance du modèle RL série.

(2) On suppose que la charge est capacitive ; déterminez les valeurs de la résistance et de la capacité du modèle RC parallèle.

Chapitre 5

Lois des réseaux électriques

Un réseau électrique se compose d'un certain nombre de sources et de charges. Les lois présentées dans cette partie permettent d'en déduire le courant et la tension à différents points.

5.1 Lois de Kirchhoff

5.1.1 Loi des nœuds

La *première loi de Kirchhoff* s'énonce ainsi : la somme des courants se dirigeant vers un nœuds du circuit est nulle à tout instant.

Cette loi permet directement d'étudier la mise en parallèle de dipôles de même nature. Soit un dipôle composé de n dipôles de même nature (résistance, inductance ou condensateur) placés en parallèle. Soit $i(t)$ et $u(t)$ les grandeurs relatives au dipôle complet, en convention récepteur. Soit i_k , $k = 1 \dots n$ le courant traversant chacun des n dipôles, également en convention récepteur par rapport à la tension $u(t)$. La loi de nœuds donne la relation :

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t), \quad \forall t \quad (5.1)$$

Considérons le cas où les dipôles sont des résistances de valeur R_k , $k =$

1... n . Alors, on a $u(t) = R_k i_k(t)$. La loi des nœuds donne :

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) \quad (5.2)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{u(t)}{R_k} \quad (5.3)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right) u(t) \quad (5.4)$$

$$= \frac{1}{R_{eq}} u(t) \quad (5.5)$$

Ainsi, le dipôle résultant est une résistance R_{eq} telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (5.6)$$

Considérons le cas où les dipôles sont des inductances de valeur L_k . Alors, on a $u(t) = L_k \frac{di_k(t)}{dt}$ pour chaque dipôle. La loi des nœuds donne :

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) \quad (5.7)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{di_k(t)}{dt} \quad (5.8)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} u(t) \quad (5.9)$$

$$L_{eq} \frac{di(t)}{dt} = u(t) \quad (5.10)$$

avec

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \quad (5.11)$$

Ainsi, le dipôle résultant est une inductance de valeur L_{eq} .

Considérons le cas où les dipôles sont des capacités de valeur C_k . Alors,

on a $i_k(t) = C_k \frac{du(t)}{dt}$ pour chaque dipôle. La loi des nœuds donne :

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) \quad (5.12)$$

$$= \sum_{k=1}^n C_k \frac{du(t)}{dt} \quad (5.13)$$

$$= C_{eq} \frac{du(t)}{dt} \quad (5.14)$$

avec

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k \quad (5.15)$$

Ainsi, le dipôle résultant est une capacité de valeur C_{eq} .

En parallèle les capacités s'ajoutent alors que ce sont les inverses des résistances et les inductances qui s'ajoutent. En régime sinusoïdal, la loi des nœuds s'applique aux vecteurs de Fresnel et s'écrit alors :

$$\underline{I} = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k. \quad (5.16)$$

Exercice 21 (Loi de comportement d'un générateur de Thévenin)

Soit un dipôle composé d'une source de courant sinusoïdale \underline{J} et d'une admittance \underline{Y} placés en parallèle. On note \underline{U} et \underline{I} respectivement la tension et le courant du dipôle, en convention générateur, \underline{I} étant choisi dans le même sens que \underline{J} . A partir de la loi des mailles, déterminez la loi de comportement du dipôle (c'est-à-dire la relation entre son courant et sa tension). On donne $\underline{J} = J$ et $\underline{Y} = Y \exp(-\frac{\pi}{3})$. Déterminez l'expression de la valeur efficace de la tension U en fonction de la valeur efficace du courant I lorsque le circuit est chargé par une résistance R_{ch} . Représentez graphiquement U en fonction de I .

5.1.2 Loi des mailles

La seconde loi de Kirchhoff s'énonce ainsi : la somme des différences de potentiels obtenus le long d'une maille fermée du circuit est nulle.

La loi des mailles permet d'étudier la mise en série de dipôles de même nature. Soit un dipôle composé de n dipôles de même nature placés en série,

tous parcourus par le courant $i(t)$ et chacun d'entre eux ayant la tension $u_k(t)$ à ses bornes avec la convention récepteur. Soit $u(t)$ la tension aux bornes du dipôle résultant, toujours avec les mêmes conventions. La loi des mailles donne la relation :

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t), \quad \forall t \quad (5.17)$$

Pour des résistances, cette relation s'écrit $u(t) = \sum_{k=1}^n R_k i$, soit $u(t) = R_{eq} i$ avec $R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$. Pour une inductance, la relation devient $u(t) = \sum_{k=1}^n L_k \frac{di(t)}{dt}$, soit $u(t) = L_{eq} \frac{di(t)}{dt}$ avec $L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k$. Pour un condensateur, en dérivant la relation, on obtient $\frac{du(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} i(t)$, soit $C_{eq} \frac{du(t)}{dt} = i(t)$ avec $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$. Ainsi, en série, ce sont les résistances et les inductances qui s'ajoutent alors que ce sont les inverses des capacités qui s'ajoutent. En régime sinusoïdal, la loi des mailles s'applique aux vecteurs de Fresnel et s'écrit alors :

$$\underline{U} = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k. \quad (5.18)$$

Exercice 22 (Loi de comportement d'un générateur de Norton) Soit un dipôle composé d'une source de tension sinusoïdale \underline{E} et d'une impédance \underline{Z} placés en série. On note \underline{U} et \underline{I} respectivement la tension et le courant du dipôle, en convention générateur, \underline{U} étant choisi dans le même sens que \underline{E} . A partir de la loi des mailles, déterminez la loi de comportement du dipôle. On donne $\underline{E} = E$ et $\underline{Z} = Y \exp(\frac{\pi}{6})$. Déterminez l'expression de la valeur efficace de la tension U en fonction de la valeur efficace du courant I lorsque le circuit est chargé par une résistance R_{ch} . Représentez graphiquement U en fonction de I .

5.1.3 Théorème de Millmann

Considérons un circuit en étoile en régime sinusoïdal composé de n admittances \underline{Y}_k , $k = 1 \dots n$, chacune étant reliée par une borne au nœuds de différence de potentiel V_0 par rapport à une référence et l'autre borne étant au potentiel V_k , reliée à un autre circuit. On note \underline{I}_k les courants dans chaque branche, notés positivement dans le sens entrant. La loi des nœuds permet d'écrire :

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0. \quad (5.19)$$

La loi d'Ohm généralisée et la loi des mailles donne :

$$\underline{V}_k - \underline{V}_0 = \frac{\underline{I}_k}{\underline{Y}_k}. \quad (5.20)$$

En remplaçant dans (5.19), on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k (\underline{V}_k - \underline{V}_0) = 0. \quad (5.21)$$

Ce qui donne le théorème de Millmann :

$$\underline{V}_0 = \frac{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \underline{V}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k} \quad (5.22)$$

Exercice 23 (Application du théorème de Millmann) *On considère un circuit en étoile constitué comme suit : le nœud est numéroté 0 et a comme tension V_0 par rapport à référence ; la branche n°1 est composée d'une inductance de valeur L qui est connectée à une extrémité à la tension V_1 ; la branche n°2 est composée d'une capacité C et est connectée à la tension V_2 ; la branche n°3 est composée d'une résistance dont une borne est au potentiel de référence. Déterminez V_0 , la tension du nœud.*

5.2 Sources équivalentes

Soit un dipôle constitué d'un certain nombre de sources de tension et de courant sinusoïdales, de résistances, d'inductance et de condensateurs. Il s'agit d'un réseau linéaire puisque la relation entre le courant entrant et la tension à ses bornes est linéaire¹. Ce dipôle peut alors se modéliser par un dipôle plus simple de deux manières différentes.

5.2.1 Modèle de Thevenin

Il s'agit d'un modèle composé d'une force-électromotrice (une source de tension) \underline{E} et d'une impédance \underline{Z}_T . La fem E est déterminée est obtenue par le calcul de la tension à vide du circuit. L'impédance \underline{Z}_T est l'impédance équivalente du circuit où toutes les sources de tension sont cour-circuitées et toutes les sources de courant sont ouvertes.

¹De manière plus rigoureuse, cette relation est affine.

5.2.2 Modèle de Norton

Il s'agit d'un modèle composé d'une source de courant \underline{J} et d'une admittance \underline{Y}_T . Le courant J de la source est le courant de court-circuit. L'admittance \underline{Y}_T est l'admittance équivalente du circuit où chaque source de courant est remplacée par un circuit ouvert et chaque source de tension est remplacée par un court-circuit.

5.3 Théorème de superposition

Lorsque tous les éléments d'un circuit sont linéaires (c'est le cas de l'ensemble des éléments qui ont été abordés jusqu'ici), le théorème de superposition indique que la valeur d'un courant ou d'une tension en un point quelconque du circuit est la somme des valeurs obtenues si une seule source était allumée.

On en déduit la méthode d'étude suivante : on écrit autant de schémas que de sources ; chacun de ces schémas correspondant à une seule source, les autres sources étant éteintes (les sources de tension sont mises à zéro, c'est-à-dire remplacées par un court-circuit ; les sources de courant sont mises à zéro, c'est-à-dire remplacées par un circuit ouvert). On résout ensuite chacun des schémas. Le résultat final est la somme des résultats obtenus à partir des différents schémas.

Bien que le nombre de schémas à étudier augmente, chacun d'entre eux est généralement beaucoup plus simple que le schéma de départ. Ainsi, cette méthode permet une réelle diminution du temps d'étude d'un schéma.

Exercice 24 (Etude d'un réseau) *Représentez un réseau électrique sinusoïdal (pulsation ω), composé d'une source de tension $\underline{E} = E$, d'une source de courant $\underline{J} = J \exp(j\frac{\pi}{2})$, d'une résistance R , d'une inductance L et d'une capacité C .*

- (1) *En utilisant le théorème de superposition, déterminez les tensions et les courants relatifs à chaque dipôle.*
- (2) *Choisissez 2 points (notés A et B) du circuit qui ne sont pas au même potentiel électrique. Déterminez le générateur de Thévenin équivalent.*
- (3) *Déterminez le générateur de Norton équivalent du même dipôle.*
- (4) *Déduisez-en la tension et le courant relatifs à une charge R_{ch} qui est ajoutée au circuit entre les bornes A et B .*

Chapitre 6

Le régime sinusoïdal triphasé équilibré

6.1 Introduction

L'électricité est produite et transportée sous forme triphasée ; c'est-à-dire que trois câbles se partagent la puissance. Parfois, un quatrième câble est utilisé pour transmettre le potentiel du neutre ; on parle alors de triphasé 4 fils. Dans ce chapitre, on se limite à l'étude du cas triphasé sinusoïdal équilibré. Dans le régime sinusoïdal, les grandeurs triphasées sont de la forme :

$$x_a(t) = X_a \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_a) \quad (6.1)$$

$$x_b(t) = X_b \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_b) \quad (6.2)$$

$$x_c(t) = X_c \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_c) \quad (6.3)$$

Pour le régime sinusoïdal équilibré, les amplitudes des trois phases sont identiques et les phases régulièrement espacées de $\frac{2\pi}{3}$. Ainsi, les tensions sont de la forme :

$$v_a(t) = V \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_a) \quad (6.4)$$

$$v_b(t) = V \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_a - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.5)$$

$$v_c(t) = V \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_a - \frac{4\pi}{3}) \quad (6.6)$$

et les courants :

$$i_a(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_a - \phi_k) \quad (6.7)$$

$$i_b(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_a - \phi_k - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.8)$$

$$i_c(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_a - \phi_k - \frac{4\pi}{3}) \quad (6.9)$$

où ϕ_k est le déphasage arrière du courant par rapport à la tension.

Les grandeurs de Fresnel correspondantes sont alors :

$$\underline{V}_a = V \exp(j\alpha_a) \quad (6.10)$$

$$\underline{V}_b = V \exp(j(\alpha_a - \frac{2\pi}{3})) \quad (6.11)$$

$$\underline{V}_c = V \exp(j(\alpha_a - \frac{4\pi}{3})) \quad (6.12)$$

et :

$$\underline{I}_a(t) = I \exp(j(\alpha_a - \phi_k)) \quad (6.13)$$

$$\underline{I}_b(t) = I \exp(j(\alpha_a - \phi_k - \frac{2\pi}{3})) \quad (6.14)$$

$$\underline{I}_c(t) = I \exp(j(\alpha_a - \phi_k - \frac{4\pi}{3})) \quad (6.15)$$

Les vecteurs représentatifs de la tension (respectivement du courant) forment un triangle équilatéral. On parle de triangle des tensions (respectivement des courants).

En régime équilibré, les sources et les charges sont équilibrées (pour les charges, cela signifie qu'elles ont les mêmes impédances). Un déséquilibre peut être dû à la source (on parle d'alimentation déséquilibré) ou à la charge (on parle de charge déséquilibrée).

6.2 Couplage en étoile

Soient trois sources monophasées de tensions :

$$v_a(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t) \quad (6.16)$$

$$v_b(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.17)$$

$$v_c(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \quad (6.18)$$

et de courants :

$$i_a(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi) \quad (6.19)$$

$$i_b(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.20)$$

$$i_c(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}) \quad (6.21)$$

avec des conventions générateur.

Considérons que ces trois sources sont couplées en étoile ; c'est-à-dire que les trois bornes de référence (bases de la flèche de tension) sont reliées entre elles et forment le neutre. Les trois autres bornes sont utilisées pour réaliser une alimentation triphasée. Les tensions du réseau se mesurent entre deux des trois câbles :

$$u_{ab}(t) = v_a(t) - v_b(t) \quad (6.22)$$

$$u_{bc}(t) = v_b(t) - v_c(t) \quad (6.23)$$

$$u_{ca}(t) = v_c(t) - v_a(t) \quad (6.24)$$

on parle de *tensions composées*. En s'appuyant sur la représentation vectorielle (6.12), on peut calculer :

$$\underline{U}_{ab} = U \exp(j\frac{\pi}{6}) \quad (6.25)$$

$$\underline{U}_{bc} = U \exp(-j\frac{\pi}{2}) \quad (6.26)$$

$$\underline{U}_{ca} = U \exp(j\frac{5\pi}{6}) \quad (6.27)$$

avec :

$$U = \sqrt{3}V \quad (6.28)$$

Cette relation indique que les tensions simples sont dans un rapport $\sqrt{3}$ par rapport aux tensions simples.

Exercice 25 (Triangle des tensions) Représentez le triangle des tensions simples \underline{V}_a , \underline{V}_b et \underline{V}_c . En vous appuyant sur ce tracé, tracez le triangle des tensions composées \underline{U}_{ab} , \underline{U}_{bc} et \underline{U}_{ca} . Retrouvez géométriquement les nombres complexes leur correspondant.

Les courants de ligne sont égaux aux courants des générateurs. La puissance transmise par la ligne est la somme des puissances transmises par chacune des trois générateurs, soit :

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) \quad (6.29)$$

$$= 2VI (\cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi)) \quad (6.30)$$

$$+ \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.31)$$

$$+ \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \cos(\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3})) \quad (6.32)$$

$$= VI \left(3 \cos(\phi) + \cos(2\omega t - \phi) + \cos(2\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}) \right) \quad (6.33)$$

$$+ \cos(2\omega t - \phi - \frac{8\pi}{3})) \quad (6.34)$$

$$= VI \left(3 \cos(\phi) + \cos(2\omega t - \phi) + \cos(2\omega t - \phi + \frac{2\pi}{3}) \right) \quad (6.35)$$

$$+ \cos(2\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3})) \quad (6.36)$$

$$= 3VI \cos(\phi) \quad (6.37)$$

$$= \sqrt{3}UI \cos(\phi) \quad (6.38)$$

Remarquons que la puissance instantanée est constante et non pulsée contrairement au cas monophasé ; elle est donc égale à sa puissance moyenne $P = \sqrt{3}UI \cos(\phi)$.

La puissance réactive est $Q = \sqrt{3}UI \sin(\phi)$; la puissance apparente est $S = \sqrt{3}UI$. Le facteur de puissance est, lui, inchangé : $F_p = \cos(\phi)$. Notez bien que le déphasage ϕ intervenant dans les formules correspond au déphasage entre la tension simple et le courant relatifs à une même phase.

6.3 Couplage en triangle

Soient trois sources monophasées de tensions :

$$e_a(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t) \quad (6.39)$$

$$e_b(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.40)$$

$$e_c(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \quad (6.41)$$

et de courants :

$$j_a(t) = J\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi) \quad (6.42)$$

$$j_b(t) = J\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.43)$$

$$j_c(t) = J\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}) \quad (6.44)$$

avec des conventions générateur. Les trois dipôles ont comme bornes respectivement (a, a') , (b, b') et (c, c') et sont orientés de sorte que $e_a(t) = V_a(t) - V_{a'}(t)$, $e_b(t) = V_b(t) - V_{b'}(t)$ et $e_c(t) = V_c(t) - V_{c'}(t)$. On associe ces dipôles en triangle de sorte que les pôles soient connectés par paires : a' avec b , b' avec c et c' avec a . Des bornes a , b et c sont tirés trois câbles formant une ligne triphasée.

Dans ce cas, les tension composées sont identiques aux tensions des générateurs :

$$u_{ab}(t) = e_a(t) \quad (6.45)$$

$$u_{bc}(t) = e_b(t) \quad (6.46)$$

$$u_{ca}(t) = e_c(t) \quad (6.47)$$

Pour déterminer les courants de ligne, il faut écrire une loi de nœud :

$$i_a(t) = j_a(t) - j_c(t) \quad (6.48)$$

$$i_b(t) = j_b(t) - j_a(t) \quad (6.49)$$

$$i_c(t) = j_c(t) - j_b(t) \quad (6.50)$$

$$(6.51)$$

En écrivant le triangle des courants associés correspondant aux vecteurs de courant :

$$\underline{J}_a = J \exp(-j\phi) \quad (6.52)$$

$$\underline{J}_b = J \exp(j(-\phi - \frac{2\pi}{3})) \quad (6.53)$$

$$\underline{J}_c = J \exp(j(-\phi - \frac{4\pi}{3})) \quad (6.54)$$

on peut calculer les courants de ligne :

$$\underline{I}_a = I \exp(j(-\phi + \frac{\pi}{6})) \quad (6.55)$$

$$\underline{I}_b = I \exp(j(-\phi - \frac{\pi}{2})) \quad (6.56)$$

$$\underline{I}_c = I \exp(j(-\phi + \frac{5\pi}{6})) \quad (6.57)$$

avec :

$$I = \sqrt{3}J \quad (6.58)$$

Les courants de ligne forment un système triphasé équilibré d'amplitude $I = \sqrt{3}J$.

La puissance transmise est la somme des puissances transmises par chacun des trois dipôles et s'écrit :

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) \quad (6.59)$$

$$= 2EJ (\cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi)) \quad (6.60)$$

$$+ \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}) \quad (6.61)$$

$$+ \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \cos(\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}) \quad (6.62)$$

$$= 3EJ \cos(\phi) \quad (6.63)$$

$$= \sqrt{3}UI \cos(\phi) \quad (6.64)$$

Ce qui donne les mêmes formules de puissances que dans le cas du couplage étoile. Le déphasage ϕ peut être interprété comme le déphasage relatif au dipôle composant la source (ou la charge) ou comme le déphasage entre un courant et une tension simple de la ligne triphasée.

6.4 Équivalence triangle/étoile

Soit une charge triphasée d'impédance \underline{Z}_Y couplée en étoile. Chaque dipôle consomme la puissance complexe $\underline{Z}_Y I^2$ où I est la valeur efficace du courant de ligne ; la charge consomme donc $\underline{S}_Y = 3\underline{Z}_Y I^2$.

Imaginons maintenant une seconde charge triphasée, cette fois couplée en triangle d'impédance \underline{Z}_Δ . Chaque dipôle consomme la puissance complexe $\underline{Z}_\Delta J^2$ où J est le courant dans un dipôle. La charge consomme donc la puissance complexe $\underline{S}_\Delta = 3\underline{Z}_\Delta J^2 = \underline{Z}_\Delta I^2$.

Les charges sont identiques du point de vue de la ligne si elles absorbent la même puissance complexe, ce qui est le cas si :

$$\underline{Z}_\Delta = 3\underline{Z}_Y \quad (6.65)$$

Par ce moyen, on peut toujours se ramener à un schéma d'étude où toutes les charges sont de même nature, triangle ou étoile, du moins en régime sinusoïdal. C'est également le cas pour les sources comme vous propose de le découvrir l'exercice suivent.

Exercice 26 (Source équivalente) *Soit une source triphasée couplée en triangle comme présentée dans le paragraphe 6.3. Déterminez la source triphasée connectée en triangle qui a les mêmes caractéristiques au niveau de la ligne (on donnera la valeur efficace et les déphasages).*

6.5 Méthode d'étude

Pour étudier le fonctionnement d'un circuit triphasé en régime sinusoïdal équilibré, on peut se ramener à l'étude d'un circuit monophasé. Considérons d'abord le cas d'une source connectée à une charge où les deux éléments sont couplés en étoile. Même si les neutres des deux charges ne sont pas reliés (triphase 3 fils), ils sont néanmoins au même potentiel. On peut ainsi faire comme s'ils étaient connectés et ne s'intéresser qu'à une maille du circuit, par exemple celle ne faisant intervenir que la première phase et le fil fictif du neutre. Une fois résolu ce circuit, les autres phases sont déduites en ajoutant ou retranchant simplement un déphasage de $\frac{2\pi}{3}$.

Pour une source et une charge couplée en triangle, il est possible d'isoler directement une maille comportant un générateur et une charge. Une fois déterminé le courant, l'ensemble des autres courants pourront se déduire facilement.

Pour des circuits mixtes, comportant par exemple une source couplée en étoile et une charge couplée en triangle, on peut transformer les éléments couplés en triangle en éléments fictifs couplés en étoile.

Cette méthode d'étude n'est plus valable dès lors que le fonctionnement est déséquilibré. Des outils spécifiques permettent d'étudier le régime déséquilibré.

Exercice 27 (Circuit étoile/étoile) *Une source triphasée sinusoïdale équilibrée, couplée en étoile, de tension simple $V = 230$ V est connectée à une charge triphasée équilibrée d'impédance $\underline{Z} = 10 \exp(j\frac{\pi}{6})$ couplée en étoile.*

- (1) Déterminez le circuit monophasé permettant de faire l'étude du circuit.
- (2) Déterminez la valeur efficace du courant de ligne et son déphasage par rapport à la tension.
- (3) Déterminez les puissances active et réactives transmises par la source à la charge.

Exercice 28 (Circuit étoile/triangle) *La source est inchangée par rapport à l'exercice précédent, mais cette fois, la charge est couplée en triangle.*

- (1) *En utilisant une charge étoile équivalente, déterminez le circuit monophasé permettant de faire l'étude du circuit.*
- (2) *Déterminez la valeur efficace du courant de ligne et son déphasage par rapport à la tension.*
- (3) *Déterminez les courants dans la charge couplée en triangle (amplitude et déphasages).*

Exercice 29 (Circuit triangle/triangle) *Cette fois, la source et la charge sont toutes deux couplées en triangle.*

- (1) *En suivant une maille du circuit, déterminez le circuit d'étude.*
- (2) *Déterminez les courants (valeur efficace et déphasages) circulant dans la charge.*
- (3) *Déterminez les courants de ligne.*
- (4) *Déterminez les courants dans la source.*

Chapitre 7

Mesures

7.1 Mesures de tension et de courant

7.1.1 Les différentes technologies de mesure

On distingue de manière générale les appareils numériques des appareils analogiques. Parmi ces derniers, on distingue deux technologies :

Les appareils magnéto-statiques dits aussi à cadre mobile. Ils mesurent la valeur moyenne du signal et sont repérables au dessin représentant un U retourné.

Les appareils ferro-magnétiques. Ils donnent la valeur efficace du signal et sont repérables au symbol représentant un cricuit électrique entourant un circuit magnétique.

Il existe aussi des appareils permettant les mesures des valeurs moyennes et les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales. Ce sont des appareils magnéto-statiques qui utilisent, en position alternatif, un pont redresseur à diodes pour redresser les sigaux alternatifs. Ils sont repérables au symbol de la diode en plus de celui des appareils magnéto-statiques. La mesure de valeur efficace réalisée n'est valable que pour les signaux sinusoïdaux.

7.1.2 Lecture sur un appareil analogique

Pour lire une grandeur sur un appareil de mesure à aiguille, il faut tenir compte du calibre utilisé. Il suffit de considérer que lorsque l'aiguille est à sa déviation maximale, la mesure est égale au calibre. Par une règle de 3,

on en déduit que, pour une déviation de g graduations sur une échelle de g^* graduations et pour un calibre C , la mesure est $\frac{g}{g^*}C$.

7.1.3 Réduction du courant

Lorsque le courant à mesurer est trop important pour les appareils de mesure disponibles, on peut avoir recours à deux types d'appareils :

Le transformateur d'intensité est utilisé comme suit : le circuit secondaire est court-circuité et le circuit primaire est placé en série avec le courant à mesurer. On place un ampèremètre dans le circuit secondaire dont le courant est une fraction du courant primaire.

Le shunt est une résistance de très faible valeur. Placée en série dans le circuit dont il faut mesurer le courant, elle délivre à ses bornes une tension proportionnelle au courant. La mesure du courant se fait alors avec un voltmètre.

La pince de courant est composée d'un circuit magnétique que l'on peut refermer sur le courant à mesurer. Au sein de ce circuit magnétique est placée une sonde à effet Hall¹ qui fournit une tension image du courant à mesurer.

7.1.4 Sondes pour la visualisation

Afin de visualiser un signal de tension (respectivement de courant), on utilise une sonde de tension (ou de courant) qui transforme le signal de départ en une tension d'amplitude compatible avec la gamme d'entrée de l'oscilloscope et qui réalise l'isolation galvanique entre le circuit et l'oscilloscope. Il est nécessaire de bien tenir compte du gain de la sonde et de vérifier qu'elle ne sature pas (que le signal mesuré ne dépasse pas la gamme d'entrée de la sonde).

7.2 Mesures de puissance

Les mesures de puissance active et réactive se font à l'aide d'un seul type d'appareil : le watt-mètre. Il comporte un circuit courant et un circuit tension et donne la valeur moyenne de leur produit.

¹Une sonde à effet Hall parcourue par un certain courant fournit une fem proportionnelle au champ B qui la traverse.

En monophasé, outre la classique mesure de puissance active, on peut effectuer une mesure de puissance réactive en alimentant le circuit tension par la tension composée des deux autres phases. La valeur mesurée est à diviser par $\sqrt{3}$. Par exemple, si la charge monophasée est alimentée entre la phase 1 et le neutre, en branchant le watt-mètre avec $i_1(t)$ dans le circuit courant et $u_{23}(t)$ dans le circuit tension, le watt-mètre donne en régime sinusoïdal équilibré :

$$W = \langle i_1(t).u_{23}(t) \rangle \quad (7.1)$$

$$= I_1 U_{23} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \quad (7.2)$$

$$= \sqrt{3} I U \sin(\phi) \quad (7.3)$$

$$= \sqrt{3} Q \quad (7.4)$$

D'où l'estimation de $Q = \frac{W}{\sqrt{3}}$.

En triphasé équilibré, on peut se contenter l'un seul watt-mètre pour mesurer la puissance active si le neutre est disponible. On peut aussi avoir recours à la méthode des deux watt-mètres.

7.2.1 Méthode des deux watt-mètres

le premier watt-mètre est parcouru par i_1 et connecté à la tension u_{13} alors que le second est parcouru par i_2 et connecté à la tension u_{23} . Notons W_1 et W_2 les deux mesures. On a :

$$W_1 = \langle u_{13}(t)i_1(t) \rangle \quad (7.5)$$

$$W_2 = \langle u_{23}(t)i_2(t) \rangle \quad (7.6)$$

$$(7.7)$$

La puissance active s'obtient à partir de la somme des mesure. En effet :

$$W_1 + W_2 = \langle u_{13}(t)i_1(t) \rangle + \langle u_{23}(t)i_2(t) \rangle \quad (7.8)$$

$$= \langle (v_1(t) - v_3(t))i_1(t) + (v_2(t) - v_3(t))i_2(t) \rangle \quad (7.9)$$

$$= \langle v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) - v_3(t)(i_1(t) + i_2(t)) \rangle \quad (7.10)$$

Si le neutre n'est pas connecté, la loi des mailles donne :

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \quad (7.11)$$

ce qui permet de remplacer $i_1(t) + i_2(t)$ par $-i_3(t)$ et donne ainsi :

$$W_1 + W_2 = \langle v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) + v_3(t)i_3(t) \rangle \quad (7.12)$$

$$= \langle p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) \rangle \quad (7.13)$$

$$= \langle p(t) \rangle \quad (7.14)$$

$$= P \quad (7.15)$$

Ainsi, on la mesure de la puissance active est donnée par : $P = W_1 + W_2$.

La puissance réactive est reliée à la différence des deux mesures :

$$W_1 - W_2 = \langle u_{13}(t)i_1(t) \rangle - \langle u_{23}(t)i_2(t) \rangle \quad (7.16)$$

$$= \langle (u_{12}(t) + u_{23}(t))i_1(t) - (u_{21}(t) + u_{13}(t))i_2(t) \rangle \quad (7.17)$$

$$= \langle u_{23}(t)i_1(t) + u_{31}(t)i_2(t) + u_{12}(t)(i_1(t) + i_2(t)) \rangle \quad (7.18)$$

$$= \langle u_{23}(t)i_1(t) + u_{31}(t)i_2(t) - u_{12}(t)i_3(t) \rangle \quad (7.19)$$

$$= \sqrt{3}(Q_1 + Q_2 - Q_3) \quad (7.20)$$

En régime équilibré, on a $Q_1 = Q_2 = Q_3$ et $Q = 3.Q_1$. Ainsi, on a $W_1 - W_2 = \sqrt{3}.Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{3}}$ et on peut estimer :

$$Q = \sqrt{3}(W_1 + W_2). \quad (7.21)$$

La méthode des deux watt-mètres s'applique lorsque le neutre n'est pas connecté. La mesure de puissance est valable en présence d'harmoniques et même en régime déséquilibré, à condition que le neutre ne soit pas connecté.

Remarquons que certains appareils numériques sont capables de mesurer les puissances active et réactives à partir d'un courant et de la tension composée des deux autres phases (i_1 et u_{23} par exemple). Leur mesure n'est valable qu'en régime sinusoïdal équilibré.

7.3 Incertitudes

Lorsque l'on donne le résultat d'une mesure ou d'un calcul, il est fondamental d'avoir un ordre de grandeur de l'incertitude. On peut distinguer les mesures et les calculs effectuées sur des grandeurs incertaines.

7.3.1 Mesures

On distingue deux types d'incertitudes : l'incertitude de lecture et l'incertitude liée à la précision (ou classe) de l'appareil. L'incertitude peut être écrite sous forme absolue ($I = 2,32 \text{ A} \pm 0,12 \text{ A}$) ou sous forme relative ($I = 2,32 \text{ A} \pm 5\%$).

Incertitude de lecture : pour un appareil analogique à aiguille, elle correspond à la valeur d'une graduation ; pour un appareil numérique à afficheur digital, elle correspond à la valeur du plus petit digit.

Classe : il s'agit de la précision, exprimée en pourcentage, de l'appareil ; l'erreur absolue de précision est alors proportionnelle à la classe et à la grandeur mesurée.

Dans la pratique, on détermine d'abord les deux incertitudes sous la même forme (absolue ou relative) avant de les additionner. Le résultat final est généralement donné sous forme relative.

7.3.2 Calculs

Lorsqu'on fait un calcul à partir de plusieurs grandeurs incertaines, on obtient une nouvelle grandeur incertaine dont il faut savoir déterminer l'incertitude. Voici illustré sur deux exemples simples comment on opère. Supposons que x et y soient deux grandeurs incertaines : $x = x_0 \pm \delta_x$, $y = y_0 \pm \delta_y$ ou δ_x et δ_y sont positifs.

La somme s'écrit $x + y = x_0 + y_0 \pm (\delta_x + \delta_y)$; les incertitudes absolues s'ajoutent.

Le produit de deux grandeurs positives s'écrit $xy = (x \pm \delta_x)(y_0 \pm \delta_y)$. En développant et en négligeant le produit $\delta_x \delta_y$ des incertitudes, on obtient $xy = x_0 y_0 \pm (y_0 \delta_x + x_0 \delta_y)$ ou encore en divisant par $x_0 y_0$: $\frac{xy}{x_0 y_0} = 1 \pm \left(\frac{\delta_x}{x_0} + \frac{\delta_y}{y_0}\right)$. On retiendra alors que les incertitudes relatives s'additionnent.

La fraction s'écrit $\frac{x}{y} = \frac{x_0 \frac{1 \pm \delta_x/x_0}{1 \pm \delta_y/y_0}}$. En faisant l'approximation $\frac{1}{1 \pm \delta_y/y_0} = 1 \mp \frac{\delta_y}{y_0}$, on obtient alors, en développant et en négligeant le produit $\delta_x \delta_y$: $\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} \left(1 \pm \left(\frac{\delta_x}{x_0} + \frac{\delta_y}{y_0}\right)\right)$. On retiendra que, pour le quotient comme pour le produit, les incertitudes relatives s'ajoutent.

7.4 Techniques numériques de mesure

Le numérique peut apparaitre à deux niveaux dans un système de mesure. Certains appareils disposent d'un affichage numérique bien que la mesure se fasse de manière analogique. D'autres appareils sont entièrement numériques. Un capteur transforme la tension et le courant en signaux qui sont échantillonnées à une certaine fréquence f_e et stockées en mémoire. Les calculs des différentes mesures sont ensuite effectuées à partir des échantillons par un calculateur (FPGA, micro-controller ou DSP). Dans ce cas, seules les composantes des signaux à des fréquences inférieures à $f_e/2$ pourront être prises en compte dans la mesure².

²Ce résultat est aussi connu sous le nom de théorème de Shannon et la fréquence $f_e/2$ est appelée fréquence de Shannon.

Chapitre 8

Circuits magnétiques

8.1 Magnétostatique

8.1.1 Généralités

La magnétostatique est la discipline qui étudie les champs magnétiques dans l'hypothèse quasi-statique. Un champ magnétique peut-être produit par un courant. Imaginons que le courant varie instantanément d'une valeur à une autre. Alors, le champ va évoluer pour se stabiliser à une nouvelle valeur. Ce temps d'évolution est très court. Lorsqu'on le néglige, comme c'est le cas en magnétostatique, on suppose que le champ s'impose instantanément. Autrement dit, on néglige les dynamiques d'établissement du champ par rapport aux dynamiques des autres phénomènes et notamment des phénomènes électriques. Les équations de la magnétostatique sont satisfaisantes pour représenter des phénomènes allant jusqu'au Mhz. Au delà, il faut utiliser les équations de Maxwell complètes.

On définit les champs \vec{B} (en Tesla noté T) et \vec{H} (en A/m). Deux types de terminologies existent. Dans la première, \vec{H} est nommé champ magnétique et \vec{B} induction magnétique ; dans la seconde, \vec{H} est nommé champ magnétisant et \vec{B} champ magnétique. Nous utiliserons dans cet ouvrage la première notation.

Les vecteurs \vec{B} et \vec{H} sont définis en tout point de l'espace. On parle de champ de vecteur. Du point de vue mathématique, un champ est une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui à un point de l'espace associe un vecteur à trois composantes. Pour ces champs, on définit la notion de ligne de champ comme

étant une courbe tangente aux vecteurs en chacun de ses points. On définit également la notion de tube de champ comme l'ensemble des lignes de champ passant par une section donnée. On parle de champ uniforme lorsqu'il est le même en tout point de l'espace. On parle de champ constant lorsqu'il ne varie pas en fonction du temps.

Les électrons étant chargés négativement, leur déplacement correspond à une densité de courant notée \vec{j} . Il s'agit également d'un champ de vecteur que l'on considèrera nul partout sauf dans les conducteurs (cuivre et aluminium). Dans ces conducteurs, le courant est défini comme le flux de \vec{j} à travers la section : $i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$ où \vec{dS} est un vecteur représentant un élément de la surface S orienté suivant la normale à la surface.

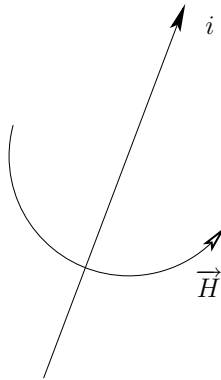
Un conducteur parcouru par un courant i donne naissance à un champ magnétique dont les lignes de champ sont des courbes fermées qui tournent autour du conducteur. Le sens du champ est donné par la règle du tire-bouchon : le tire-bouchon étant placé dans la direction et le sens du courant électrique, on l'enfonce en tournant dans le sens du champ. On retiendra que deux lignes de champ magnétique distinctes ne se rejoignent jamais ni ne peuvent être issues d'un même point¹.

L'utilisation des symétries d'un système est fondamentale pour déterminer l'allure des lignes de champ. Pour illustrer cela, considérons un conducteur rectiligne supposé infini ; il est invariant par rotation et translation selon son axe. Le champ aura également ces symétries. Les lignes de champ seront donc des cercles centrés sur l'axe du conducteur. De plus, l'amplitude du champ ne dépend que de la distance au conducteur.

8.1.2 Théorème d'Ampère

Nous venons de le voir, un courant donne naissance à un champ magnétique. Le théorème d'Ampère permet de quantifier cette relation. Définissons une courbe fermée orientée \mathcal{C} et soit \mathcal{S} une surface finie s'appuyant sur \mathcal{C} . Orientons la courbe et la surface de manière cohérente, c'est-à-dire de sorte qu'une vis tournant dans le sens de la courbe s'enfonce dans le sens de la surface. Alors, le théorème d'Ampère énonce que la circulation du champ magnétique le long de la courbe fermée est égale au flux de la densité de courant à travers

¹C'est une conséquence de la nullité de la divergence du champ, ce qui s'écrit $\text{div} \vec{B} = 0$.

FIG. 8.1 – Champ H enroulant un courant i

la surface.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (8.1)$$

Le 0 ajouté à l'intégrale est là pour rappeler qu'il s'agit d'intégrer sur un contour fermé². Le terme de droite est le courant total traversant la section, compté positivement dans le sens de la surface et négativement dans l'autre sens.

Le plus simple est de choisir un contour qui suit une ligne de champ. Ainsi, les vecteurs \vec{H} et $d\vec{l}$ sont colinéaires et on peut remplacer $\vec{H} \cdot d\vec{l}$ par $H \cdot dl$ où H est la valeur algébrique du champ dans la direction de $d\vec{l}$. Dans le cas où l'amplitude du champ est uniforme, on peut simplifier le terme de gauche en $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \oint_C dl = H \cdot l$ où l est la longueur de la ligne de champ.

Exercice 30 (Champ magnétique produit par un conducteur uniforme)

Un conducteur rectiligne uniforme de rayon R est parcouru par un courant i .

1. Déterminez l'allure des lignes de champ à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur.
2. Déterminez l'amplitude du champ magnétique en tout point de l'espace.

Exercice 31 (Champ magnétique produit par un câble coaxial) Répondez

aux questions 1 et 2 de l'exercice 35.

²Il s'agit de la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$ où les courants de déplacement ont été négligés

8.1.3 Lois de comportement des matériaux

Vide et matériaux amagnétiques

Dans le vide et les matériaux amagnétiques, les champs \vec{B} et \vec{H} sont colinéaires et leurs modules sont dans un rapport μ_0 appelée *perméabilité du vide* ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A) :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (8.2)$$

Matériaux magnétiques doux

Un matériau magnétique doux idéal se distingue du vide uniquement par la valeur élevée de sa perméabilité :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.3)$$

où la perméabilité μ est largement supérieure à celle du vide. On peut noter $\mu = \mu_r \mu_0$ où μ_r est une grandeur adimensionnelle supérieure à 1 appelée *perméabilité relative*. Pour des matériaux fortement magnétiques comme les toles fer-silicium (FeSi) couramment employées, μ_r peut atteindre 10,000 (dix mille).

En réalité, cette caractéristique $B(H)$ linéaire n'est qu'une approximation. Deux limitations apparaissent en effet. Tout d'abord la *saturation magnétique* qui limite la croissance de B lorsque l'on augmente H . Vient ensuite l'hystérésis (d'un mot grec signifiant retard) qui fait que la trajectoire $B(H)$ lorsque H augmente est légèrement en dessous de celle obtenue lorsque H décroît.

Matériaux magnétiques durs

Les matériaux magnétiques durs se distinguent des matériaux magnétiques doux par la taille de l'hystérésis. Alors qu'il est réduit autant que possible pour les matériaux doux, les bons matériaux durs ont un cycle d'hystérésis le plus grand possible. Une phase d'aimantation consiste à faire croître le module du champ H puis à faire décroître jusqu'à zéro. Le champ B a alors cru et décroît avec un certain retard dû à l'hystérésis. Lorsque le champ H est nul, il reste un champ B non nul appelée *induction rémanente* et noté B_r .

Si on excite alors l'aimant avec un champ H dans la même direction mais en sens contraire, on fait décroître la valeur du champ B . Si cette variation n'est pas trop forte, elle est réversible et on retrouve l'induction rémanente

en annulant à nouveau le champ H . Cette portion de caractéristique, appelée *droite de recul* peut-être approchée par une équation de la forme :

$$B = B_r + \mu H \quad (8.4)$$

où la perméabilité est ici très proche, voire égale, à μ_0 . Dans la pratique, c'est sur cette caractéristique que l'aimant doit être utilisé. Si on augmente trop le champ H en sens inverse, le champ B diminue de manière irréversible et l'aimant est désaimanté (il a perdu une partie de son pouvoir). Le champ H permettant d'annuler le champ B en inverse est appelé *champ coercitif* noté H_c .

On distingue différentes familles d'aimants. Les ferrites sont les aimants les plus bas de gamme. Les terres-rares et les Alnico sont des aimants de meilleure qualité. La qualité d'un aimant est définie par ses valeurs de B_r , H_c et $(BH)_{\max}$. Plus ces valeurs sont élevées, meilleure est la qualité de l'aimant.

Exercice 32 (Champ produit par un aimant) *Un circuit magnétique est constitué d'un aimant de perméabilité μ_0 , de champ rémanent B_r , de section S et de longueur l_a et d'un circuit magnétique de section S et de longueur l_f de perméabilité μ .*

1. *En utilisant le théorème d'Ampère, déterminez l'équation de la droite de charge liant H_a et B_a dans l'aimant, réterminée par le circuit magnétique (cette équation ne fait intervenir que les paramètres du circuit magnétique).*
2. *Déterminez l'équation de la droite de recul de l'aimant.*
3. *Déterminez les valeurs de H et B dans l'aimant et dans le fer en fonction des données μ_0 , B_r , S , l_a et l_f .*

8.1.4 Flux magnétique

Considérons un tube de champ. Notons \mathcal{S} une section orientée de ce tube. On peut alors calculer le flux du champ \vec{B} à travers \mathcal{S} :

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (8.5)$$

Dans le cas où la section est orthogonale au champ \vec{B} en tout point, les vecteurs \vec{B} et $d\vec{S}$ sont colinéaires, et le flux s'écrit :

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} B \cdot dS \quad (8.6)$$

où B est une valeur algébrique, comptée positivement dans le sens de l'orientation de la surface. Dans le cas où le champ est uniforme sur la section, le flux s'écrit :

$$\Phi = B.S \quad (8.7)$$

Le flux magnétique a la propriété de se conserver. C'est-à-dire qu'il est identique sur chacune des sections d'un tube de champ³. Par exemple, en deux sections S_1 et S_2 , les champs B_1 et B_2 vérifient $B_1 S_1 = B_2 S_2$.

Une circuit électrique faisant n spires autour d'un tube de champ traversé par le flux Φ voit le flux $\phi = n\Phi$.

8.1.5 Loi d'Hopkinson

Les différentes lois qui viennent d'être développées (théorème d'Ampère, loi de comportement, conservation du flux) peuvent être récapitulées en une seule loi appelée loi d'Hopkinson. A titre d'exemple, reprenons les cas des circuits simples étudiés dans les exercices 33 et 34. Le théorèmes d'Ampère s'écrit $H.l = n.i$, on a $H = \frac{B}{\mu}$ avec $B = \frac{\Phi}{S}$. Cette relation s'écrit $\frac{l}{\mu S}\phi = n.i$ et se met sous la forme :

$$\mathcal{R}\Phi = \mathcal{E} \quad (8.8)$$

où $\mathcal{E} = n.i$ est appelé *force magnéto-motrice* (fmm) et $\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$ est la réluctance. Alors que les fmm ne sont liées qu'au circuit électrique, la réluctance ne dépend que du circuit magnétique (de sa géométrie et du matériau employé). La loi d'Hopkinson est analogue à une loi d'Ohm où les fmm remplacent les fem, le flux remplace le courant et la réluctance remplace la résistance.

Pour des circuits plus complexes composés de différentes parties et de différents matériaux, on calcule la réluctance des différentes parties à partir de leur perméabilité, section et longueur, puis on calcule la réluctance équivalente du circuit avec des règles d'associations identiques à celles du calcul de la résistance équivalente : on ajoute les réluctances des portions des circuits en série et on calcule la conductance (l'inverse de la réluctance) équivalente de parties en parallèle en ajoutant les conductances de chacun des éléments.

³Il s'agit d'une conséquence de l'équation locale $\text{div}\vec{B} = 0$.

8.1.6 Induction électromagnétique

La *loi de Lenz* énonce qu'un circuit électrique traversé par un flux magnétique et qui voit ce flux varier réagit en donnant naissance à une force électromotrice qui tend à s'opposer à la variation du champ.

La *loi de Faraday* précise quantitativement cette relation : la force électromotrice produite par la variation de flux dans un circuit est égale à la dérivée du flux⁴.

$$e = \pm \frac{d\phi}{dt} \quad (8.9)$$

A titre d'illustration, considérons un circuit électrique et notons i le courant le traversant et u la tension à ses bornes en convention générateur. Notons ϕ le flux magnétique traversant le circuit avec la convention qu'un courant i positif donne un flux ϕ également positif. Imaginons maintenant que le circuit n'est pas alimenté de l'extérieur mais qu'il subit des variations de son flux ϕ imposées de l'extérieur. En cas de diminution du flux ($\frac{d\phi}{dt} < 0$), le circuit réagira en cherchant à faire circuler un courant positif de manière à compenser la diminution de flux. Si le circuit est fermé par une résistance permettant la circulation du courant et imposant la relation $u = Ri$ à ses bornes⁵, la fem permettant de faire passer un courant positif est elle-même positive. Avec les conventions établies, il faut donc écrire :

$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} \quad (8.10)$$

Pour un circuit en convention récepteur, au contraire, la relation s'écrit :

$$e(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (8.11)$$

Exercice 33 (Etude d'une bobine à noyau de fer) *Un matériau magnétique doux en forme de tore de section S et de longueur moyenne l a pour perméabilité μ . Ce circuit magnétique est couplé à un circuit électrique formé de n spires enroulées autour du tore et parcouru par un courant $i(t)$.*

1. Déterminez les champs $H(t)$ et $B(t)$ dans le circuit magnétique.
2. Déterminez le flux dans le circuit magnétique et le flux vu par le circuit électrique.

⁴L'équation locale correspondant est l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

⁵La résistance est bien en convention récepteur puisque le circuit est en convention générateur.

3. Montrez que le flux traversant le circuit électrique est proportionnel au courant ; déterminez le coefficient de proportionnalité L , appelé inductance.
4. Déterminez l'équation courant-tension du dipôle électrique en convention récepteur et en convention générateur.
5. Le circuit magnétique a une résistance interne R . Déterminez les équations courant-tension du dipôle pour les deux conventions.

Exercice 34 (Circuit à entrefer) *Un circuit magnétique de section uniforme S est composé d'un matériau magnétique doux constituant la majeure partie du circuit et d'un entrefer de taille e petite devant la longueur totale du circuit magnétique. Ce circuit magnétique en couplé à un circuit électrique formé de n spires enroulées autour du tore et parcouru par un courant $i(t)$. On supposera dans la suite que le matériau magnétique est de perméabilité infinie.*

1. Déterminez les champs $H(t)$ et $B(t)$ dans les deux portions du circuit magnétique.
2. Calculez l'inductance de la bobine.

Exercice 35 (Champ magnétique produit par un câble coaxial) *Un câble coaxial a une symétrie axiale. Le conducteur aller, placé dans l'âme, est un cylindre de rayon R_1 . Une couche d'isolant d'épaisseur $R_2 - R_1$ recouvre l'âme. Le conducteur retour constitue une troisième couche d'épaisseur $R_3 - R_2$. Un isolant recouvre ensuite le tout jusqu'au rayon R_4 .*

1. Déterminez l'allure des lignes de champ dans les différentes parties de l'espace.
2. Déterminez l'amplitude du champ magnétique en tout point de l'espace.
3. Déterminez le flux magnétique produit par 1 m de câble. Déduisez-en l'inductance linéïque.

8.1.7 Forces et couples électromécaniques

Energie magnétique

Un matériau parcouru par un champ magnétique stocke de l'énergie. La densité spatiale d'énergie étant $\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$, cette énergie peut s'écrire :

$$W_m = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} d\mathcal{V} \quad (8.12)$$

où $d\mathcal{V}$ est un élément du volume \mathcal{V} .

Expression générale

Soit un système électromécanique disposant d'un degré de liberté mécanique en translation défini par une position z (en m). Ce système reçoit de l'énergie électrique par l'intermédiaire d'un circuit électrique de tension v et de courant i en convention récepteur. Il fournit de l'énergie mécanique à une charge mécanique en imposant une force F grâce à son degré de liberté en translation. Le système stocke de l'énergie magnétique notée W_m . La puissance électrique reçue est $v.i$. La puissance mécanique fournie est $F.\dot{z}$ où $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$. Le bilan de puissance donne :

$$v.i = \frac{dW_m}{dt} + F.\dot{z} \quad (8.13)$$

ce qui s'écrit encore :

$$dW_m = v.i.dt - F.\dot{z}.dt \quad (8.14)$$

En écrivant la loi de Lenz sous la forme $v.dt = d\phi$, on obtient :

$$dW_m = i.d\phi - F.dz \quad (8.15)$$

De cette relation, il ressort que l'énergie magnétique est une fonction d'état qui s'écrit en fonction des variables d'état ϕ et z , soit $W_m = W_m(\phi, z)$. On en déduit aussi :

$$\frac{\partial W_m(\phi, z)}{\partial \phi} = i \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial W_m(\phi, z)}{\partial z} = -F \quad (8.17)$$

La première de ces deux relations signifie que, pour une position z constante, l'énergie magnétique peut s'écrire en intégrant le courant :

$$W_m(\phi, z) = \int_0^\phi i(\phi, z).d\phi \quad (8.18)$$

à condition de connaître l'expression $i(\phi, z)$ du courant en fonction du flux et de la position⁶. La seconde relation signifie que la force exercée par le système électromécanique sur sa charge est la dérivée de l'énergie magnétique par rapport à la position à flux constant.

⁶On vérifie que cette définition est bien équivalente à celle de la relation 8.12 car $d\phi = n.B.dS$ et $i = \frac{l.H}{n}$.

Pour un système présentant un degré de liberté mécanique en rotation, on obtient des résustats équivalents en remplaçant la position linéaire z par la position angulaire θ et la force F par le couple C . L'énergie s'écrit alors $W_m(\phi, \theta)$ et le couple s'écrit :

$$C = -\frac{\partial W_m(\phi, \theta)}{\partial \theta}. \quad (8.19)$$

Cas d'un système non saturé

Pour un système linéaire (absence de saturation magnétique), le flux est proportionnel au courant, donnant une relation $\phi = L.i$ où L est l'inductance. Pour un système électromécanique articulé, l'inductance dépend de la configuration et s'écrit $L(z)$, ce qui donne $\phi = L(z).i$. La relation 8.18 permet de calculer l'énergie magnétique avec $i(\phi, z) = \frac{\phi}{L(z)}$:

$$W_m(\phi, z) = \int_0^\phi \frac{\phi}{L(z)}.d\phi \quad (8.20)$$

$$= \frac{1}{L(z)} \int_0^\phi \phi.d\phi \quad (8.21)$$

$$= \frac{\phi^2}{2L(z)} \quad (8.22)$$

L'équation 8.18 donne alors l'expression de la force :

$$F = \frac{\partial W_m(\phi, z)}{\partial z} \quad (8.23)$$

$$= -\frac{\phi^2}{2L^2(z)} \frac{dL(z)}{dz} \quad (8.24)$$

$$= -i^2 \frac{dL(z)}{dz} \quad (8.25)$$

Une force apparait en présence de courant dans le mesure où l'inductance depend de la position.

Force produite par un aimant

Soit un aimant de section S attirant une pièce métallique ferreuse située à une distance z de l'aimant. Supposons que le champ situé entre l'aimant et la

pièce soit uniforme de module B . La densité d'énergie magnétique contenue dans l'air entre la pièce et l'aimant est $\frac{1}{2}B.H$ avec $B = \mu_0.H$. L'énergie magnétique contenue dans l'espace de volume $S.z$ entre l'aimant et la pièce est donc $W_m = \frac{B^2 S z}{2\mu_0}$. En notant le flux $\phi = B.S$, on peut écrire l'énergie en fonction du flux et de la distance : $W_m(\phi, z) = \frac{1}{2\mu_0 S} \phi^2 . z$. La force s'écrit alors selon l'équation 8.17 :

$$F = -\frac{\phi^2}{2\mu_0 S} \quad (8.26)$$

où encore :

$$F = -\frac{B^2 S}{2\mu_0} \quad (8.27)$$

Le signe négatif de la force exprime qu'il s'agit d'une force qui s'exerce dans la direction opposée à celle de l'axe z ; il s'agit donc bien d'une force attractive.

8.2 Transformateur

8.2.1 Constitution

Un transformateur est constitué d'un circuit magnétique sur lequel sont enroulés deux circuits électriques ; l'un est appelé primaire, l'autre secondaire. Notons \mathcal{R} la réluctance du circuit magnétique, n_1 le nombre de spires du primaire et n_2 le nombre de spires du secondaire. Notons v_1, v_2, i_1 et i_2 les tensions et courants respectivement au primaire et au secondaire. Considérons le cas où les fmm primaires et secondaires s'ajoutent ($\mathcal{E} = n_1 i_1 + n_2 i_2$). Choisissons la convention récepteur au primaire et au secondaire.

8.2.2 Equations du transformateur

Notons Φ le flux magnétique circulant dans le circuit magnétique. La loi d'Hopkinson donne :

$$\mathcal{R}\Phi = n_1 i_1 + n_2 i_2. \quad (8.28)$$

Le flux Φ coupe n_1 fois le circuit électrique primaire et n_2 fois le circuit électrique secondaire. Notons $\phi_1 = n_1 . \Phi$ le flux vu par le circuit primaire et

$\phi_2 = n_2 \Phi$ le flux vu par le circuit électrique secondaire. On a :

$$\phi_1 = \frac{n_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}} i_2 \quad (8.29)$$

$$\phi_2 = \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{n_2^2}{\mathcal{R}} i_2 \quad (8.30)$$

ce qui s'écrit :

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad (8.31)$$

$$\phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \quad (8.32)$$

où L_1 et L_2 sont les inductances propres respectivement du primaire et du secondaire (en Henry, H) et M est la mutuelle inductance primaire/secondaire. En convention récepteur, les équations aux tensions s'écrivent :

$$v_1(t) = \frac{d\phi_1(t)}{dt} = n_1 \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (8.33)$$

$$v_2(t) = \frac{d\phi_2(t)}{dt} = n_2 \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (8.34)$$

Ces équations de flux et de tensions peuvent être présentée sous la forme du schéma de la figure 8.2 où les deux points indiquent les bornes pour lesquelles un courant entrant produit une fmm positive.

Les tensions primaires et secondaires sont proportionnelles :

$$v_2(t) = m \cdot v_1(t) \quad (8.35)$$

où $m = \frac{n_2}{n_1}$ est le *rapport de transformation*.

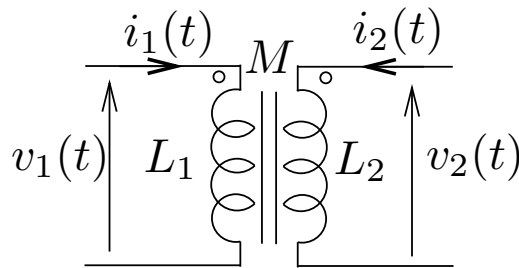


FIG. 8.2 – Modèle du transformateur à trois inductances

8.2.3 Modèle du transformateur idéal

Dans le cas où la reluctance du circuit magnétique est très faible et que l'on peut négliger le terme $\mathcal{R}\Phi$ dans l'équation 8.28, on obtient la relation $n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$, soit

$$i_1(t) = -m \cdot i_2(t) \quad (8.36)$$

Dans ce cas, les courants sont proportionnels. Cette propriété est utilisée dans des transformateurs particuliers appelés *transformateur de courant* et utilisés pour réduire un courant que l'on cherche à mesurer. Dans tous les modèles de transformateur, on trouvera ce quadripôle, représenté sur la figure 8.3 et on le qualifiera de *transformateur idéal*.

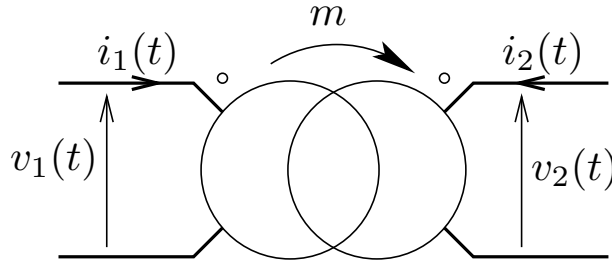


FIG. 8.3 – Transformateur idéal

8.2.4 Prise en compte de l'énergie magnétique

Pour les transformateurs usuels, le terme $\mathcal{R}\Phi$ apparaissant dans l'équation 8.28 n'est pas négligeable. cette relation peut s'écrire :

$$i_1(t) + m \cdot i_2(t) = \frac{\mathcal{R}}{n_1} \Phi(t) \quad (8.37)$$

$$= \frac{\mathcal{R}}{n_1^2} \phi_1(t) \quad (8.38)$$

$$= \frac{\phi_1(t)}{L_1} \quad (8.39)$$

$$(8.40)$$

Notons $i_m(t) = i_1(t) + m \cdot i_2(t)$ ce courant vérifiant donc $\phi_1 = L_1 i_m(t)$. Partant du primaire, le modèle représenté sur la figure 8.4 est donc composé d'une loi

de nœud $i_m(t) = i_1(t) + i'_2(t)$ où $i'_2(t) = m.i_2(t)$. La branche $i_m(t)$ part ensuite à travers l'inductance L_1 . Le courant $i'_2(t)$ part ensuite dans un transformateur idéal où il ressort en i_2 . Le modèle du transformateur comprend donc un transformateur idéal et une inductance appelée *inductance magnétisante* modélisant l'énergie magnétique $\frac{1}{2}L_1(i_1 + m.i_2)^2$ stockée. Le modèle initial de la figure 8.2 reste valable avec $M = m.L_1$ et $L_2 = m^2.L_1$.

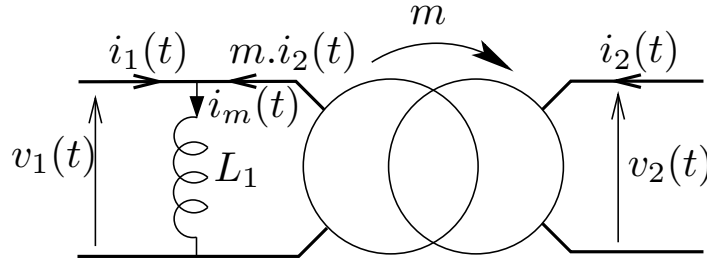


FIG. 8.4 – Transformateur parfait avec son inductance magnétisante

8.2.5 Prise en compte des fuites magnétiques

Dans la pratique, tout le flux produit au primaire n'atteint pas le secondaire (et vis-versa). Certaines lignes de champ entourent les spires du primaire mais n'atteignent pas le secondaire, formant un flux de fuite primaire ϕ_{f1} . Le flux principal est alors retranché d'une partie du flux selon la relation $n_1.\Phi = \phi_1 - \phi_{f1}$. De même au secondaire avec un flux de fuite ϕ_{f2} , on a $n_2.\Phi = \phi_2 - \phi_{f2}$. La flux de fuite du primaire ne concernant que la bobine primaire, on a donc $\phi_{f1} = N_1 i_1$ en absence de saturation où N_1 est l'inductance de fuite du primaire ; de même au secondaire avec $\phi_{f2} = N_2 i_2$.

$$\phi_1(t) = N_1 i_1(t) + n_1 \Phi(t) \quad (8.41)$$

$$\phi_2(t) = N_2 i_2(t) + n_2 \Phi(t) \quad (8.42)$$

En reprenant l'expression $\Phi(t) = \frac{n_1}{\mathcal{R}} i_1(t) + \frac{n_2}{\mathcal{R}} i_2(t)$ tirée de 8.28, les flux s'écrivent :

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad (8.43)$$

$$\phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \quad (8.44)$$

avec $L_1 = N_1 + \frac{n_1^2}{\mathcal{R}}$, $L_2 = N_2 + \frac{n_2^2}{\mathcal{R}}$ et $M = \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}}$; le modèle de la figure ?? reste valable. On définit alors $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$ appelé *coefficient de dispersion* un nombre caractéristique de l'importance relative des fuites. Ce coefficient est nul en absence de fuite et croît avec leur augmentation. Il est généralement de l'ordre de quelques pourcents. Le modèle du transformateur peut alors se mettre sous la forme de la figure 8.2.

Dans le cas présent, le rapport m entre les tensions primaires et secondaires n'est plus assuré qu'à vide ($i_2(t) = 0$). On peut néanmoins partir sur la même idée que dans le paragraphe précédent et définir le courant magnétisant $i_m(t)$ et l'inductance magnétisante L_m tels que $\phi_1(t) = L_m i_m(t)$. Avec l'équation 8.43, on obtient $i_m(t) = i_1(t) + m.i_2(t)$ avec $m = \frac{M}{L_1}$. En éliminant $i_1(t)$ dans les équations 8.43 et 8.44, on obtient :

$$\phi_2(t) = m.\phi_1(t) + N_s.i_2(t) \quad (8.45)$$

où $N_s = L_2 - \frac{M^2}{L_1}$ est l'inductance des fuites totalisées au secondaire.

Le modèle correspondant s'obtient à partir du modèle précédent en ajoutant l'inductance N_s en série avec la partie secondaire du transformateur. A cause de cette inductance supplémentaire, on n'a plus la relation $v_2(t) = m.v_1(t)$ à moins d'avoir $i_2(t) = 0$. Remarquons que les fuites magnétiques ne font apparaître aucun terme résistif et n'occasionnent donc pas directement de pertes.

8.2.6 Pertes Joule

Les circuits électriques du primaire et du secondaire présentent une certaine résistance au passage du courant. Notons R_1 et R_2 ces résistances qui peuvent se déduire de la longueur l_k du conducteur, de sa section S_k et de sa résistivité ρ_k par la formule : $R_k = \frac{l_k \rho_k}{S_k}$. Pour les conventions choisies, les équations des tensions s'écrivent alors :

$$v_1(t) = R_1.i_1(t) + \frac{d\phi_1(t)}{dt} \quad (8.46)$$

$$v_2(t) = R_2.i_2(t) + \frac{d\phi_2(t)}{dt} \quad (8.47)$$

Le modèle s'écrit en ajoutant au modèle précédent les résistances R_1 et R_2 en série respectivement au primaire et au secondaire du schéma précédent.

Les pertes Joule totales sont en moyenne égales à $R_1.I_1^2 + R_2.I_2^2$ où I_1 et I_2 sont les valeurs efficaces respectives de $i_1(t)$ et de $i_2(t)$. On parle aussi de pertes cuivre même si les conducteurs sont parfois en aluminium.

8.2.7 Pertes fer

Les pertes dans le matériau magnétique, appelées pertes fer, ont deux origines.

Les pertes par hystérésis correspondent au cycle d'hystérésis de la caractéristique $B(H)$ du matériau magnétique. Pour un matériau magnétique de volume \mathcal{V} occupé par un champ uniforme, l'énergie magnétique qu'il faut lui fournir pour atteindre un état magnétique donné s'écrit :

$$W_m = \mathcal{V} \int_0^B H.dB \quad (8.48)$$

Considérons un régime périodique de période $T = \frac{1}{f}$. Au bout d'une période, le système revient au même état énergétique défini par des valeurs de B et H et n'a donc pas accumulé d'énergie. Pourtant la quantité d'énergie fournie au matériau $\mathcal{V} \int_t^{t+T} H.dB$ n'est pas nulle puisqu'elle est proportionnelle à la surface du cycle d'hystérésis de la caractéristique du matériau. Cette énergie correspond donc à des pertes.

La surface du cycle d'hystérésis est d'autant plus grande que la valeur maximale B_m de B est grande. On peut approcher cette surface par une fonction quadratique de la forme λB_m^2 . Les pertes magnétiques pendant une période T sont alors $\lambda B_m^2 \mathcal{V}$ et la puissance de pertes est $\lambda_H B_m^2 \mathcal{V} f$.

Les pertes par courant de Foucault sont dues aux courants induits dans le matériau magnétique par les variations de champ. En effet, comme tout conducteur⁷, ils réagissent aux variations du champ magnétique par la présence de champ électrique donnant à son tour naissance à des courants induits. La résistivité du circuit magnétique entraîne alors des pertes Joule dues aux courants induits. L'amplitude du courant induit est liée à l'amplitude de la dérivée du champ et donc à $B.f$. La densité des pertes est $\rho.j^2$ où

⁷Les matériaux magnétiques comme les tôles FeSi couramment employés sont choisis pour leur perméabilité magnétique élevée; il ne sont pas de très bons conducteurs du courant magnétique mais sont loin d'être des isolants électriques.

ρ est la résistivité et j la densité de courant, les pertes en régime alternatif de fréquence f , sont de la forme $\lambda_F B_m^2 \mathcal{V} f^2$. Les circuits magnétiques sont généralement feuilletés afin de limiter l'amplitude des courants induits et de réduire ainsi ces pertes.

Les pertes totales s'écrivent $B_m^2 \cdot f^2 \cdot \mathcal{V} \cdot (\lambda_F + \frac{\lambda_H}{f})$. En régime sinusoïdal, les amplitudes sont égales aux valeurs efficaces multipliées par $\sqrt{2}$ et on a $U = \omega \cdot \Phi_{\text{eff}}$ où $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ est la pulsation. On peut alors écrire $B_m = \sqrt{2} \frac{U}{\omega \cdot S}$ où S est la section du matériau. Les pertes fer s'écrivent alors :

$$P_f = \frac{U^2}{R_f} \quad (8.49)$$

où $R_f = \frac{2 \cdot \pi}{\mathcal{V} \cdot (\lambda_F + \lambda_H / f)}$ est un paramètre du modèle appelé résistance des pertes fer qu'il faut ajouter en parallèle sur l'inductance magnétisante.

8.2.8 Modèles simplifiés

Le modèle obtenu maintenant dépend de 6 paramètres (le rapport de transformation m , l'inductance magnétisante L_1 , l'inductance des fuites N_s , les résistances primaire R_1 et secondaire R_2). Dans la pratique, on opère un certain nombre d'opérations permettant d'aboutir à un modèle simplifié dépendant de 5 paramètres.

L'hypothèse de Kapp est une approximation permettant de transformer un quadripôle composé d'une impédance \underline{Z}_1 en série et d'une impédance en parallèle \underline{Z}_2 où $Z_1 \ll Z_2$ en un quadripôle où la place de \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 sont échangées. De cette manière, la résistance R_1 est ramenée à l'entrée du transformateur idéal et les paramètres L_m et R_f relatifs au circuit magnétiques sont ramenés en tête du primaire.

Le passage du primaire au secondaire du transformateur idéal d'une impédance peut-être fait sans approximation à condition de multiplier l'impédance par m^2 . Ainsi, la résistance du primaire peut être placée au secondaire du transformateur idéal, transformée alors par $m^2 \cdot R_1$.

Exercice 36 (Passage du primaire au secondaire) Soit deux quadripôles, le premier composé d'un transformateur idéal de rapport m et d'une impédance

\underline{Z}_1 en série avec le primaire; le second composé du même transformateur idéal de rapport m et d'une impédance \underline{Z}_2 en série avec le secondaire.

1. Déterminez la transmittance T_1 du premier quadripôle définie par $[\underline{V}_1 \ \underline{I}_1]^T = T_1 \cdot [\underline{V}_2 \ \underline{I}_2]^T$.

2. Déterminez la transmittance T_2 du second quadripôle définie par $[\underline{V}_1 \ \underline{I}_1]^T = T_2 \cdot [\underline{V}_2 \ \underline{I}_2]^T$.

3. Montrez que, moyennant une certaine condition que vous explicitez, les deux quadripôles sont totalement équivalents.

Exercice 37 (Passage du primaire au secondaire, impédance en parallèle)

Même exercice que le 36 en considérant cette fois des impédances en parallèle et non en série.

Le modèle résultant est obtenu en échangeant les places des impédances séries N_s et $m^2.R_1$. On peut ensuite combiner les pertes Joule en une seule résistance $R_s = m^2.R_1 + R_2$, aboutissant au modèle de la figure 8.5. Les 6 paramètres sont alors m , L_1 , R_f , N_s , R_s .

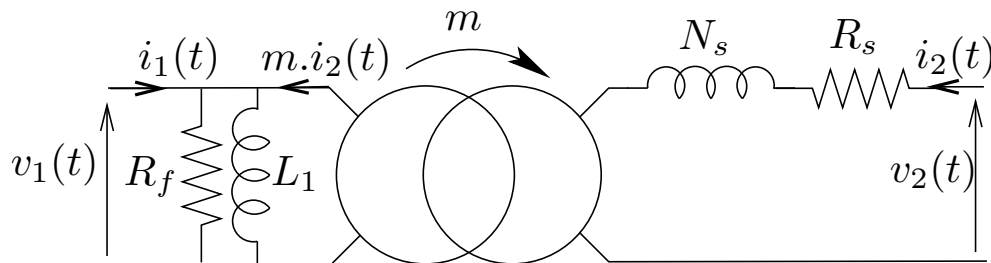


FIG. 8.5 – Modèle utilisé en pratique du transformateur

8.2.9 Estimation des paramètres

Les valeurs numériques des paramètres du modèle d'un transformateur peuvent être estimées à partir d'un certain nombre de mesures.

Estimation des résistances des enroulements

Les résistances respectives du primaire et du secondaire peuvent-être estimées par des mesures volt-ampèremétriques en courant continu. En effet, en

courant continu, il n'y a plus de variation de flux et les équations de tension se simplifient en⁸ :

$$v_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) \quad (8.50)$$

$$v_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) \quad (8.51)$$

Après avoir alimenté le circuit primaire en continu sous courant nominal⁹, on mesure les valeurs moyennes V_1 de $v_1(t)$ et I_1 de $i_1(t)$. On estime $R_1 = \frac{V_1}{I_1}$. On fait ensuite la même opération avec le circuit du secondaire.

Essai à vide

Dans cet essai, on alimente le primaire sous tension alternative sinusoïdale et on laisse le secondaire ouvert. Au primaire, on mesure les valeurs efficaces V_1 de la tension et I_{1v} du courant ainsi que la puissance P_{1v} . Au secondaire, on mesure la valeur efficace V_{2v} de la tension.

A vide, la tension dans la branche série du rotor, composée de la résistance R_s et de l'inductance N_s , est nulle puisqu'aucun courant n'y circule. Alors, on a : $V_{2v} = m \cdot V_{1v}$, ce qui permet d'estimer le rapport de transformation m .

La puissance active absorbée est égale à $\frac{V_1^2}{R_f}$, ce qui permet d'estimer $R_f = \frac{V_1^2}{P_{1v}}$.

La puissance active absorbée Q_{1v} est égale à $\frac{V_1^2}{L_m \cdot \omega}$ et peut-être estimée par $P_{1v}^2 + Q_{1v}^2 = (V_1 \cdot I_{1v})^2$, ce qui permet d'estimer $L_m = \frac{V_1^2}{Q_{1v} \cdot \omega}$.

Une fois connu le rapport de transformation m , on peut aussi estimer la résistance $R_s = m^2 \cdot R_1 + R_2$.

Essai en court circuit

Dans cet essai, on court-circuite le secondaire du transformateur et on alimente le primaire sous tension alternative sinusoïdale réduite¹⁰. On mesure au primaire les valeurs efficaces V_{1cc} de la tension et I_{1cc} du courant ainsi que la puissance P_{1cc} . Au secondaire, on mesure la valeur efficace I_{2cc} du courant.

⁸Remarquons que les équations suivantes sont valables sur les valeurs moyennes des signaux même si les tensions et courant ne sont pas constants.

⁹On fait bien attention dans ce genre d'essais à alimenter le circuit sous une tension réduite; en effet, en absence de fem, le courant croit très rapidement.

¹⁰Pour cet essai également, il s'agit de faire varier la tension du primaire de manière très progressive car le courant augmente de manière très rapide.

Dans cet essai, il est classique de négliger les puissances active et réactive absorbées par le circuit magnétique (L_m et R_f) devant celles absorbées par les impédances en série (R_s et N_s). Bien que déjà connue, la résistance R_s peut à nouveau être estimée par un bilan d'énergie active : $P_{1cc} = R_s \cdot I_{2cc}^2$. L'inductance N_s peut-être estimée par un bilan d'énergie réactive $Q_{1cc} = N_s \cdot \omega \cdot I_{2cc}^2$ en calculant Q_{1cc} à partir de $P_{1cc}^2 + Q_{1cc}^2 = (V_{1cc} \cdot I_{1cc})^2$.

Chapitre 9

Les moteurs électriques

9.1 Généralités

9.1.1 Terminologie

Un moteur électrique est constitué de deux parties distinctes. L'une, appelée *stator*, est fixe. L'autre, appelée *rotor*, peut se déplacer en rotation autour d'un axe. Généralement, le rotor est placé à l'intérieur du stator mais ce n'est pas obligatoire. Il existe en effet des moteurs inversés où le rotor est placé à l'extérieur.

Pour désigner les moteurs, on parle souvent d'actionneurs, terme plus général qui met l'accent sur le fait que le moteur produit une action. Le terme d'actionneur n'est pas limité au domaine électrique et on parle par exemple d'actionneur pneumatique ou hydraulique. Les actionneurs électriques les plus répandus sont les actionneurs rotatifs; il existe également des actionneurs électriques linéaires où le rotor suit un mouvement de translation.

Un moteur est également qualifié de convertisseur électromécanique car il transforme l'énergie électrique que lui fournit son alimentation en énergie mécanique permettant d'entraîner une charge. Depuis la fin du XIX^{ème} siècle, on sait que ce principe de conversion électro-mécanique est réversible. Ainsi, dans certaines configurations, le transfert de l'énergie s'inverse et le moteur se retrouve à fournir de l'énergie électrique à sa source à partir de l'énergie mécanique. Ce type de fonctionnement en mode générateur est utilisé pour la production d'énergie électrique notamment par les alternateurs. Quant on s'intéresse à un convertisseur électromécanique sans parti-pris de convention (moteur ou générateur), on parle alors de *machine électrique*,

terme qui regroupe les deux fonctionnements de moteur et de générateur.

Tout comme l'énergie électrique elle-même, on distingue deux grands types de moteurs : les moteurs à courant continu (*DC motors* en anglais) et les moteurs à courant alternatif (*AC motors*). Parmi cette dernière famille, on distingue les *moteurs synchrones* dont la vitesse de rotation est rigidement liée à la pulsation des courants des *moteurs asynchrones*.

9.1.2 Principe général de la conversion électromécanique

Cas général

Soit un circuit magnétique comportant un stator et un rotor. Ce système, parcouru par le flux Φ et stockant l'énergie magnétique W_m reçoit de l'énergie électrique par l'intermédiaire d'un circuit électrique comportant n spires, parcouru par un courant i et alimenté par une tension u . Notons $\phi = n\Phi$ le flux total coupant le circuit électrique. Le rotor du circuit magnétique est connecté mécaniquement à une charge à laquelle il fournit le couple mécanique C ; l'ensemble des parties mécaniques tournant à la vitesse Ω . On note θ la position angulaire du rotor et on a $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$.

La variation de l'énergie interne du système est la somme des puissances absorbées soit :

$$\frac{dW_m}{dt} = ui - C\Omega \quad (9.1)$$

En négligeant la résistance du circuit électrique, on peut écrire la loi de Lenz : $u = \frac{d\phi}{dt}$, ce qui donne :

$$\frac{dW_m}{dt} = i \frac{d\phi}{dt} - C \frac{d\Omega}{dt} \quad (9.2)$$

Si on considère que l'énergie interne peut s'écrire comme une fonction du flux et de la position, soit $W_m(\phi, \theta)$, sa dérivée totale par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dW_m(\phi, \theta)}{dt} = \frac{\partial W_m}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}. \quad (9.3)$$

En identifiant les deux dernières équations, on obtient alors :

$$\frac{\partial W_m}{\partial \phi} = i \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial W_m}{\partial \theta} = -C \quad (9.5)$$

La première de ces deux équations permet d'écrire l'énergie magnétique pour une position θ donnée :

$$W_m(\phi, \theta) = \int_{x=0}^{x=\phi} i(x, \theta) dx \quad (9.6)$$

où $i(x, \theta)$ est la valeur du courant correspondant au flux $\phi = x$ et à la position θ . La seconde équation donne l'expression du couple :

$$C = -\frac{\partial W_m(\phi, \theta)}{\partial \theta} \quad (9.7)$$

ce qui signifie que le couple est lié aux variations de l'énergie en fonction de la position à flux constant (et non à courant constant).

Système non saturé

En l'absence de saturation magnétique, le flux est proportionnel au courant et on peut écrire $\phi = L(\theta)i$. L'équation 9.6 s'écrit alors :

$$W_m(\phi, \theta) = \int_{x=0}^{x=\phi} \frac{x}{L(\theta)} dx \quad (9.8)$$

et donne $W_m(\phi, \theta) = \frac{\phi^2}{2L(\theta)}$. Le couple s'écrit alors grâce à la relation 9.7 :

$$C = \frac{\phi^2}{2L^2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (9.9)$$

L'inductance est une fonction périodique de θ . On peut alors imaginer le moteur fonctionnant comme suit : lorsque $\frac{dL}{d\theta}$ est positif, on fait passer un courant $i(t) = I > 0$ de manière à imposer un couple positif. Lorsque $\frac{dL}{d\theta}$ est négatif, on annule le courant pour annuler le couple, permettant ainsi au système de continuer à tourner avec son inertie jusqu'à ce qu'à nouveau la dérivée devienne positive.

9.1.3 Principe de fonctionnement

Hypothèses générales

L'espace séparant le stator du rotor est généralement occupé par de l'air ; on le nomme *entrefer*. Sa largeur est généralement inférieure au mm. On suppose que le champ est radial dans l'entrefer et ne dépend que de la position angulaire ξ . Il s'écrit donc $\vec{B}(\xi) = B(\xi)\vec{u}_r$ où $B(\xi)$ est sa composante radiale.

Supposons que le stator produise dans l'entrefer un champ de la forme :

$$B_s(\xi) = B_s^{\max} \cos(p\xi - \alpha_s) \quad (9.10)$$

Il s'agit d'un champ à $2p$ pôles (p pôles nord et p pôles sud) à répartition spatiale sinusoïdale calé sur l'axe $\xi = \alpha_s$.

Supposons que le rotor produise un champ de même nature :

$$B_r(\xi) = B_r^{\max} \cos(p\xi - \alpha_r) \quad (9.11)$$

Les deux champs opèrent comme deux aimants et cherchent à se rapprocher. On peut facilement imaginer que le couple qu'appliquera le stator au rotor est de la forme :

$$C = C^{\max} \sin(\alpha_s - \alpha_r) \quad (9.12)$$

En effet, ce couple est nul dès lors que les champs du rotor et du stator sont en phase ; il est maximum pour un décalage d'un quart de période. Lorsque c'est possible, on s'arrangera pour avoir $\alpha_s - \alpha_r = \pm \frac{\pi}{2}$ afin d'utiliser le moteur au maximum de son efficacité. Le couple pourra être réglé avec les amplitudes des champs B_s^{\max} et B_r^{\max} .

9.2 Moteur à courant continu

Le champ dans une machine à courant continu a la propriété d'être statique avec par exemple $\alpha_s = 0$ et $\alpha_r = -\frac{\pi}{2}$. Le champ du rotor est réalisé soit par des aimants permanents (pour les puissances inférieures au kW environ) soit par un bobinage dans lequel circule un courant appelé *courant d'excitation*.

9.2.1 Principe et équations

Imaginons que le stator impose un champ constant sortant par un pôle nord et entrant par un pôle sud, l'axe du champ étant dans la direction $\alpha_s = 0$. Notons Φ le flux de ce champ et S la surface sous un pôle.

Considérons que le rotor est formé d'une seule spire de section S parcourue par un courant i_s et ayant une tension u_s à ses bornes. On adoptera la convention récepteur. Soit L_s l'inductance propre de cette inductance. C'est-à-dire que le champ reçu par la bobine en absence de flux d'excitation ($\Phi = 0$) est $\phi = L_s i_s$. Soit θ la position angulaire du rotor. Considérons le flux que voit

la spire en l'absence de courant ($i_s = 0$). Suivant la position de θ , le flux peut être positif, nul ou négatif. Il s'agit d'une fonction périodique alternative de la position. En supposant que cette fonction soit sinusoïdale et que le flux soit maximal pour $\theta = 0$; on a donc $\phi = \Phi_e \cos(\theta) + Li_s$. L'énergie magnétique qui s'écrit comme l'intégrale de $i.d\phi$ est alors $W_m = i_s \Phi \cos(\theta) + \frac{1}{2} Li_s^2$. On peut déterminer le couple en calculant la dérivée de l'énergie magnétique à flux constant ce qui donne $C = -i_s \Phi \sin(\theta)$. La tension s'écrit par la loi de Lenz $u = \frac{d\phi}{dt}$ soit $u = -\Phi \sin(\theta)\Omega + L \frac{di_s}{dt}$. On peut distinguer la force-électromotrice induite par le champ du stator $e_s = -\Phi \sin(\theta)\Omega$. En tenant compte de la résistance interne R_s de la spire, cela donne $u_s(t) = e_s(t) + L_s \frac{di_s(t)}{dt} + R_s i_s(t)$.

Si le courant i_s était constant, le moteur ne tournerait pas longtemps et s'immobiliserait dans la position de conjonction des champs du rotor et du stator $\theta = 0$. Pour maintenir un couple positif, il faut être capable d'imposer un courant $i_s(t)$ qui est en permanence du signe opposé à $\sin(\theta)$. Le système mécanique qui réalise cette fonction se nomme le *collecteur*¹. Cette pièce relie le courant d'alimentation continu à la spire par un contact glissant entre des lames de cuivre connectées à la spire et deux charbons par lesquels arrivent le courant d'alimentation $i(t)$. Les équations s'écrivent alors $C = i\Phi |\sin(\theta)|$ et $e = \Phi |\sin(\theta)|\Omega$.

Dans la pratique, le rotor est équipé de nombreuses spires ce qui permet de lisser le couple et la force électromotrice. On conçoit toutefois la dépendance linéaire de la fem en fonction de la vitesse Ω et du couple en fonction du courant. Les équations de l'*induit*² s'écrivent alors³ :

$$e(t) = k\Phi\Omega(t) \quad (9.13)$$

$$C(t) = k\Phi i(t) \quad (9.14)$$

$$u(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad (9.15)$$

où k est un coefficient sans unité dépendant du bobinage du rotor, R est la résistance de l'induit; L est son inductance. On notera que les deux premières équations lient les grandeurs électriques, magnétiques et mécaniques alors que

¹Le collecteur est une pièce d'usure et les balais doivent être changés au bout d'un certain temps. De plus le contact glissant entre un balais et les lames du collecteur produit des étincelles. De ce fait, les moteurs à courants continus sont exclus de certaines applications.

²Par opposition au stator qui a le rôle d'inducteur ou encore d'excitation, le rotor d'un moteur à courant continu est qualifié d'induit.

³Ces équations sont valables quelque soit le nombre de paires de pôles de la machine.

la troisième équation, qui est une équation différentielle, ne concerne que les grandeurs électriques.

L'évolution de la vitesse est déterminée par la relation fondamentale de la dynamique :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C - C_r \quad (9.16)$$

où J est l'inertie du moteur et de l'ensemble des parties mobiles qui lui sont connectées (en Kg.m²), C_r est la somme des couples résistants (en N.m) qui freinent le moteur en s'opposant au couple moteur.

9.2.2 Différents types de moteurs

Moteur à aimants permanents

Le type de moteur à courant continu le plus répandu et notamment pour les petites puissances (< 1 kW) possède un stator équipé d'aimants permanents. Dans ce cas, le flux Φ est constant et on peut réécrire les équations de la fem et du couple en faisant apparaître la constante $K = k\Phi$:

$$e(t) = K\Omega(t) \quad (9.17)$$

$$C(t) = Ki(t) \quad (9.18)$$

Il apparaît que la fem est rigidement liée à la vitesse et que le couple est lié au courant.

Moteur à rotor bobiné

Pour les puissances plus importantes où pour des applications particulières, on utilise des rotors bobinés. L'excitation est alors réalisée par un électro-aimant parcouru par un courant d'excitation i_e .

Intéressons nous aux variations du flux en fonction du courant d'excitation. A défaut de mesurer le flux, on peut estimer $k\Phi$ de la manière suivante : on entraîne la machine à courant continu grâce à une autre machine à une vitesse Ω . L'induit est maintenu ouvert de sorte d'avoir $i(t) = 0$, ce qui fait que la tension est égale à la fem : $u(t) = e(t)$. En mesurant la tension et la vitesse, on peut déterminer $k\Phi = \frac{u}{\Omega}$. A titre d'exemple, une allure typique est donnée sur la figure 9.1. Cette caractéristique a la même allure que la courbe B(H) d'un matériau magnétique. On observe une zone linéaire pour

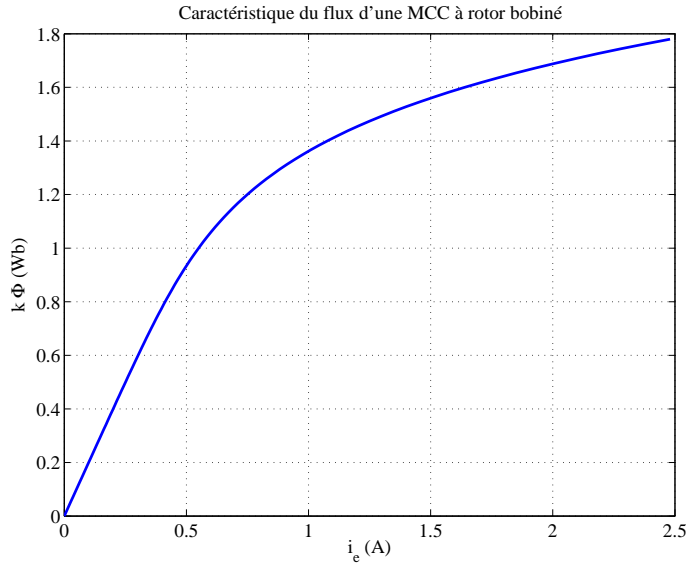


FIG. 9.1 – Caractéristique du flux d'une MCC

les faibles valeurs du courant où on peut écrire $k\Phi = L_e i_e$. Le coude de saturation apparaît dans cet exemple aux alentours de 0,75 A.

En tenant compte de la résistance R_e du circuit d'excitation, l'équation de la tension s'écrit : $u_e(t) = R_e i_e(t) + \frac{d\Phi}{dt}$ où $u_e(t)$ est la tension d'alimentation de l'inducteur. En régime permanent, le courant se stabilise à $i_e = \frac{u_e}{R_e}$. En régime linéaire, le régime transitoire peut aussi s'écrire : $u_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di(t)}{dt}$.

Les moteurs à rotor bobiné offrent différentes possibilités quant à l'alimentation du circuit d'excitation. On peut utiliser une alimentation indépendante permettant alors de régler le flux de manière arbitraire. Si on ne dispose pas d'alimentation supplémentaire à dédier à l'excitation, il faut alors utiliser la même alimentation que pour l'induit en le couplant soit en série, soit en parallèle.

Moteur universel

Considérons le cas du moteur à excitation série non saturé. Avec $i_e(t) = i(t)$, son couple s'écrit alors : $C(t) = L_e i^2(t)$. Ainsi, on observe que le couple est positif quelque soit le signe du courant. Il s'agit donc d'un moteur capable

de fonctionner aussi bien sous alimentation continue qu'alternative. Pour cette raison, on le nomme *moteur universel*. Ces moteurs sont utilisées pour des applications bas coût de faible puissance comme les perceuses électriques.

9.3 Moteur synchrone

On considère la machine synchrone à pôles lisses, à entrefer uniforme et en régime linéaire (absence de saturation magnétique). Le champ dans l'entrefer est considéré comme radial à tout instant et s'écrit $\vec{B}(\xi) = B(\xi)\vec{u}_r$ en un point situé à un angle ξ par rapport au repère du stator.

9.3.1 Stator des machines à courant alternatif

Le stator des machines synchrones et asynchrones sont identiques. Pour une machine triphasée, il est constitué d'un ensemble de trois bobinages à $2p$ pôles, placés dans des encoches, noté 'a', 'b' et 'c', régulièrement espacés et orientés dans les directions $\xi = 0$, $\xi = \frac{2\pi}{3p}$ et $\xi = \frac{4\pi}{3p}$, et respectivement parcourus par les courants $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$. Sous l'hypothèse du premier harmonique (hypothèse de la répartition spatiale sinusoïdale des champs), ils produisent respectivement dans l'entrefer trois champs de la forme :

$$B_a(\xi) = \lambda_s i_a(t) \cos(p\xi) \quad (9.19)$$

$$B_b(\xi) = \lambda_s i_b(t) \cos\left(p\xi - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (9.20)$$

$$B_c(\xi) = \lambda_s i_c(t) \cos\left(p\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (9.21)$$

En absence de saturation (régime linéaire), le champ résultant est la somme des trois champs :

$$B_s(\xi, t) = \lambda_s \left(i_a(t) \cos(p\xi) + i_b(t) \cos\left(p\xi - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \cos\left(p\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \right). \quad (9.22)$$

Dans le cas d'une alimentation sinusoïdale avec :

$$i_a(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (9.23)$$

$$i_b(t) = I_m \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (9.24)$$

$$i_c(t) = I_m \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (9.25)$$

le champ résultant s'écrit alors :

$$B_s(\xi, t) = \frac{3}{2} \lambda_s I_m \cos(p\xi - \omega t - \alpha). \quad (9.26)$$

Il s'agit d'un champ tournant, de même nature que celui produit par le rotor d'un moteur synchrone. Sa vitesse de rotation $\frac{\omega}{p}$ est rigidement liée à la pulsation ω des courants. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Ferraris*. Par rapport au principe général de fonctionnement exposé au paragraphe 9.2.1, on a $\alpha_s = \frac{\omega t + \alpha}{p}$.

9.3.2 Constitution du rotor

Le rotor est constitué d'une roue polaire à $2p$ pôles alternativement nord et sud. En notant θ l'angle que fait un pôle nord du rotor avec le stator et sous l'hypothèse de la répartition sinusoïdale, le champ produit dans l'entrefer s'écrit :

$$B_r(\xi, t) = B_r^{\max} \cos(p\xi - p\theta). \quad (9.27)$$

Il s'agit d'un *champ tournant*; sa vitesse de rotation est $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$. Par rapport au principe général de fonctionnement exposé au paragraphe 9.2.1, on a $\alpha_r = \theta$. Ce champ peut-être produit par des aimants permanents et dans ce cas, l'amplitude du champ est fixée. Il peut également être produit par un bobinage alimenté par un courant continu I_r ; dans ce cas, l'amplitude du champ est variable et réglable à travers⁴ I_r . Dans le cas linéaire, on pourra écrire $B_r^{\max} = \lambda_r I_r$.

En fonctionnement normal, les champs du stator et du rotor tournent à la même vitesse, ce qui donne la relation suivante :

$$\Omega = \frac{\omega}{p}. \quad (9.28)$$

On dit qu'ils sont synchrones, d'où le nom de la machine. Par la suite, on supposera que les champs sont synchrones et que $\theta(t) = \Omega t + \theta_0$. En moteur l'obligation d'avoir des courants statoriques en phase avec la position du rotor donne lieu au principe de l'*autopilotage*. C'est-à-dire que pour maintenir un couple constant dans la machine, il faut alimenter la stator avec des courants

⁴La problématique est la même que, pour l'excitation du moteur à courant continu; La caractéristique du flux en fonction du courant d'excitation donnée dans la figure 9.1 reste d'actualité.

dont la phase est déterminée par la position du rotor. Ainsi, c'est la machine elle-même qui pilote ses courants d'où le terme d'autopilote.⁵

9.3.3 Force-électromotrice induite

Soit une spire placée au stator et orientée selon l'angle mécanique β constituée d'un conducteur aller placé à l'angle $\beta - \frac{\pi}{2p}$ et d'un conducteur retour placé à l'angle $\beta + \frac{\pi}{2p}$. Le champ étant radial, il est pratique de considérer comme surface une portion de cylindre délimitée par la spire, donnant ainsi $\vec{dS} = dS\vec{u}_r$ et $\vec{B}d\vec{S} = B \times dS$. Le champ étant uniforme selon la longueur de la machine, on peut donc considérer des éléments de surface qui sont des portions de cylindre d'angle $d\xi$, de longueur L et de surface $RLd\xi$ où R est le rayon moyen de l'entrefer. Calculons le flux produit par le champ du rotor dans cette spire :

$$\phi_{r\beta}(t) = \int_{\xi=\beta-\frac{\pi}{2p}}^{\xi=\beta+\frac{\pi}{2p}} B_r(\xi, t)RLd\xi \quad (9.29)$$

$$= RLB_r^{\max} \int_{\xi=\beta-\frac{\pi}{2p}}^{\xi=\beta+\frac{\pi}{2p}} \cos(p\xi - p\theta)d\xi \quad (9.30)$$

$$= \frac{2RLB_r^{\max}}{p} \cos(p\theta - p\beta) \quad (9.31)$$

De manière analogue, le flux produit par le champ du stator s'écrit :

$$\phi_{s\beta}(t) = \frac{2RLB_s^{\max}}{p} \cos(\omega t + \alpha - p\beta) \quad (9.32)$$

Pour obtenir le flux dans les trois phases du stator, il suffit de considérer respectivement $p\beta = 0$ pour la phase 'a', $p\beta = \frac{2\pi}{3}$ pour la phase 'b' et $p\beta = -\frac{2\pi}{3}$ pour la phase 'c', donnant ainsi un système triphasé équilibré de flux. Si on s'intéresse désormais à la phase 'a', on peut noter :

$$\underline{\phi}_{ra} = \phi_r^{\max} \exp(jp\theta) \quad (9.33)$$

ce qui signifie que le vecteur de Fresnel représentatif du flux tourne avec la position du rotor et pour le flux produit par le stator :

$$\underline{\phi}_{sa} = \phi_s^{\max} \exp(j(\omega t + \alpha)). \quad (9.34)$$

⁵Le terme commercial le plus courant pour désigner le moteur synchrone autopiloté est celui de *DC brushless*, c'est-à-dire de moteur à courant continu sans balais. En effet, l'ensemble moteur synchrone et électronique de commande est alimenté en continu.

On remarque que le flux produit par le stator est en phase avec son propre courant. De plus, en régime linéaire (en absence de saturation magnétique), on peut considérer que l'amplitude du flux est proportionnelle à l'amplitude I_m du courant et écrire $\phi_s^{\max} = L_s I_m$, d'où :

$$\underline{\phi}_{sa} = L_s \underline{I}_a. \quad (9.35)$$

où \underline{I}_a est le vecteur de Fresnel représentatif de $i_a(t)$.

Le flux résultant $\underline{\phi}_a$ est la somme des flux produits par le stator et le rotor ($\underline{\phi}_a = \underline{\phi}_{ra} + \underline{\phi}_{sa}$). La force-électromotrice totale $e_a(t)$ s'écrit en convention générateur $e_a = -\frac{d\phi_a}{dt}$, soit en vecteurs :

$$\underline{E}_a = -j\omega \underline{\phi}_a \quad (9.36)$$

$$= -j\omega (\underline{\phi}_{ra} + \underline{\phi}_{sa}) \quad (9.37)$$

$$= \underline{E}_{0a} - jL_s \omega \underline{I}_a \quad (9.38)$$

où \underline{E}_{0a} est la force-électromotrice à vide de la phase 'a'.

9.3.4 Modèle de Behn-Eschenburg

En tenant compte du flux de fuites $\underline{\phi}_{fa} = L_{fa} \underline{I}_a$ et de la chute de tension résistive $R_s \underline{I}_a$ où L_{fa} et R_s sont respectivement l'inductance des fuites et la résistance d'induit du stator, on obtient :

$$\underline{V}_{sa} = \underline{E}_a - jL_s \omega \underline{I}_a - R_s \underline{I}_a. \quad (9.39)$$

En notant $X_s = (L_s + L_{fs})\omega$ la réactance synchrone, on obtient le modèle de Behn-Eschenburg permettant de modéliser les machines synchrones à pôles lisses en régime non-saturé :

$$\underline{V}_{sa} = \underline{E}_{0a} - jX_s \underline{I}_a - R_s \underline{I}_a. \quad (9.40)$$

Dans ce modèle, on considère la vitesse et la fréquence comme constantes ; la force électromotrice dépend donc uniquement du courant d'excitation : $E_{0a} = E_0(I_r)$ où I_r est le courant d'excitation pour un rotor bobiné. Dans le cas d'un moteur à aimants, E_{0a} est constant égal à E_0 .

Naturellement, cette étude faite pour la phase 'a' reste valable pour les autres phases. Il faudra donc considérer que chacune des phases de la machine synchrone est modélisée par la mise en série d'une f.e.m. sinusoïdale, d'une

réactance synchrone et d'une résistance. Afin de simplifier les équations, on pourra être amené à négliger la résistance de l'induit. On ne négligera cependant jamais la réactance synchrone qui est un paramètre essentiel de la machine; en effet, il représente la réaction magnétique d'induit, c'est-à-dire l'effet des courants d'induit sur le champ dans l'entrefer, phénomène fondamental dans les machines tournantes. Remarquons d'ailleurs que cette RMI n'est pas compensable alors que c'était le cas pour le moteur à courant continu.

9.4 Moteur asynchrone

On parle également de *moteur à induction*.

9.4.1 Constitution

Le stator d'un moteur asynchrone est identique à celui d'une machine synchrone. Il est donc constitué d'un enroulement triphasé à $2p$ pôles qui, lorsqu'il est parcouru par des courants à la pulsation ω , crée un champ tournant à la vitesse $\frac{\omega}{p}$.

Le rotor d'une machine asynchrone est une structure purement passive. Différentes technologies sont disponibles.

Rotor à cage

C'est la technologie de loin la plus répandue. Le rotor est constitué d'un ensemble de barres conductrices le plus souvent en aluminium et parfois en cuivre qui sont reliées entre elles à chaque extrémité par un anneau de court-circuit. Ce système de conducteurs de courant est coulé dans un empilage de tolles magnétiques qui favoriseront le passage du champ magnétique entre les conducteurs, permettant ainsi la création de courants par induction magnétique.

Rotor bobiné

Le rotor peut-être constitué d'une structure identique à celle du stator; c'est-à-dire un système polyphasé de conducteurs à $2p$ pôles. En utilisation courante, ces conducteurs sont court-circuités.

9.4.2 Principe de fonctionnement

Afin d'expliquer plus simplement le fonctionnement, considérons le cas d'un rotor bobiné. Les structures sont donc identiques au stator et au rotor ; on sait que la vitesse du champ produit par les courants est rigidement liée à leur pulsation.

Imaginons que le rotor tourne à la vitesse Ω . En se plaçant dans un référentiel lié au rotor, on voit le champ tournant circuler à la vitesse $\frac{\omega}{p} - \Omega$. Ce champ tournant donne donc naissance au rotor à des fem et à des courants à la pulsation ω_r où $\frac{\omega_r}{p} = \frac{\omega}{p} - \Omega$. Notons $\omega_r = g\omega$ où g est appelé *glissement*. On peut alors écrire $\Omega = (1 - g)\frac{\omega}{p}$. Un glissement unitaire correspond à l'arrêt ; un glissement nul correspond à une vitesse de rotation égale à la vitesse du champ tournant.

Les courants induits obéissent à la loi de Lenz, c'est-à-dire qu'il s'opposent aux variations de champ. Dans quelle situation le rotor ne voit-il pas de variation de champ ? Uniquement lorsqu'il tourne à la même vitesse que le champ tournant, c'est-à-dire pour un glissement nul. Dans ce cas précis, il n'y a pas de courant induit et donc pas de couple. Si la vitesse du rotor ralentit, devenant ainsi inférieure à celle du champ tournant, les courants induits agissent de sorte de ramener le rotor à la vitesse de synchronisme. Ils vont ainsi produire un couple positif. Au contraire, si la vitesse est supérieure à la vitesse du champ tournant, le couple produit par les courants induits est négatif. On peut donc postuler que le couple est de même signe que le glissement.

9.4.3 Modélisation

Modèle du transformateur tournant

La machine asynchrone peut-être considérée comme un transformateur particulier dans lequel les grandeurs du rotor sont à la pulsation $g\omega$. En notant \underline{V}_s et \underline{V}_r les tensions d'une phase du stator et du rotor ; \underline{I}_s et \underline{I}_r les courants ; R_s et R_r les résistances ; L_s et L_r les inductances propres et M la mutuelle inductance, les équations s'écrivent :

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j\omega \underline{\phi}_s \quad (9.41)$$

$$\underline{V}_r = R_r \underline{I}_r + jg\omega \underline{\phi}_r \quad (9.42)$$

où les flux s'écrivent :

$$\underline{\phi}_s = L_s \underline{I}_s + M \underline{I}_r \quad (9.43)$$

$$\underline{\phi}_r = M \underline{I}_s + L_r \underline{I}_r \quad (9.44)$$

Le rotor étant court-circuité ($\underline{V}_r = 0$), l'équation de la tension du rotor s'écrit alors en divisant par g :

$$0 = \frac{R_r}{g} \underline{I}_r + j\omega \underline{\phi}_r \quad (9.45)$$

Les équations 9.41 et 9.43 à 9.45 sont celles d'un transformateur court-circuité au secondaire dont la résistance du secondaire serait $\frac{R_2}{g}$.

Les différents modèles du transformateur développés dans la partie 8.2 sont valables. En ramenant l'ensemble des grandeurs au primaire du transformateur idéal, on obtient le schéma équivalent représenté sur la figure 9.2 où L_m est l'inductance magnétisante ; R_f est la résistance des pertes fer ; N_2 est l'inductance totale des fuites ramenées au stator ; R_2 est la résistance du rotor ramenée au stator ($R_2 = R_r/m^2$ où m est le rapport de transformation). On a $\underline{I}_2 = m \underline{I}_r$. Chaque phase du moteur est donc équivalent à une impédance $\underline{Z}(g)$ dépendant du glissement.

$$\underline{Z}(g) = R_s + \frac{1}{\frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{jN_2\omega + \frac{R_2}{g}}} \quad (9.46)$$

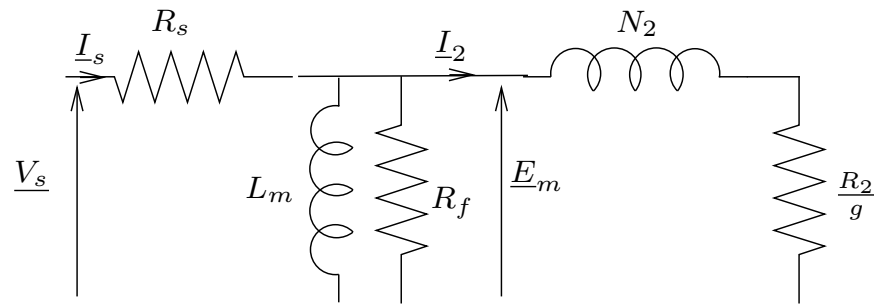


FIG. 9.2 – Modèle du moteur asynchrone

Diagramme du cercle

Si on néglige la résistance du stator, le modèle s'écrit sous la forme d'une admittance $\underline{Y}(g) = \frac{1}{\underline{Z}(g)}$:

$$\underline{Y}(g) = \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{jN_2\omega + \frac{R_2}{g}} \quad (9.47)$$

Pour une tension \underline{V}_s donnée, le lieu du courant lorsque g varie est $\underline{I}_s = \underline{V}_s \underline{Y}(g)$. En prenant $\underline{V}_s = V_s$ comme référence, cela donne $\underline{I}_s = V_s \underline{Y}(g)$.

Cherchons maintenant à déterminer ce lieu. Le lieu de $\frac{R_2}{g}$ est l'axe réel. Le lieu de $jN_2\omega + \frac{R_2}{g}$ est une droite parallèle à l'axe réel et de partie imaginaire constante égale à $jN_2\omega$. Le lieu de $\frac{1}{jN_2\omega + \frac{R_2}{g}}$ est un cercle passant par l'origine et le point d'affixe $-j/(N_2\omega)$ qui est symétrique par rapport à l'axe imaginaire. Le lieu de $\underline{Y}(g)$ est un cercle de même taille que le cercle précédent mais translaté de $1/R_f - j/(L_m\omega)$. Le lieu du courant est alors obtenu par une dilatation de coefficient V_s . Sur ce cercle, on repère facilement les points correspondant aux glissements $g = 0$ et $g = \infty$ qui sont diamétralement opposés.

Exercice 38 (Diagramme du cercle) *En négligeant la résistance du stator, montrez que le lieu du vecteur de Fresnel du courant statorique est un cercle. Vous prenez le soin de dessiner tous les ensembles intermédiaires vous permettant d'arriver à ce résultat. Précisez les points correspondant à $g = 0$ et $g = \infty$.*

9.4.4 Bilan de puissance

Puissance électromécanique

La résistance $\frac{R_2}{g}$ ne correspond pas uniquement à des pertes. En effet, elle inclut également la puissance électromagnétique qui est la puissance convertie. En décomposant $\frac{R_2}{g} = R_2 + \frac{1-g}{g}R_2$, on observe que la puissance dissipée dans $\frac{R_r}{g}$ se décompose en pertes Joule rotorique $P_{jr} = 3R_2I_2^2 = 3R_rI_r^2$ et puissance électro-mécanique $P_{em} = 3\frac{1-g}{g}R_2I_2^2$. Avec $P_{em} = C_{em}\Omega$ et $\Omega = (1-g)\frac{\omega}{p}$, on obtient :

$$C_{em} = \frac{3p}{\omega} \frac{R_2}{g} I_2^2 \quad (9.48)$$

qui est bien de même signe que le glissement.

La proportion entre les pertes Joule du rotor et la puissance électromécanique dépend du glissement : $P_{em} = \frac{1-g}{g}P_{jr}$. Si on note $P_2 = P_{em} + P_{jr}$ la puissance échangée entre le stator et le rotor, on a $P_{jr} = gP_2$ et $P_{em} = (1-g)P_2$.

Fonctionnement moteur

Le fonctionnement moteur correspond à $g \geq 0$. Le moteur absorbe l'énergie électrique au stator $P_a = 3V_s I_s \cos(\phi_s)$ et fournit l'énergie mécanique $P_u = C_{em}\Omega$ (on négligera les pertes mécaniques). Les pertes sont :

- les pertes Joule au stator $P_{js} = 3R_s I_s^2$,
- les pertes fer $P_f = 3\frac{E_m^2}{R_f}$,
- les pertes Joule au rotor $P_{jr} = 3R_r I_r^2$.

Le rendement est $\eta = \frac{P_u}{P_a}$. La conservation de l'énergie permet d'écrire $P_a = P_u + P_{js} + P_f + P_{jr}$. Si on ne tient compte que des pertes Joule au rotor, on obtient $\eta = \frac{P_{em}}{P_2} = 1 - g$. Il s'agit d'un rendement idéalisé ; on a donc en pratique $\eta \leq 1 - g$.

Fonctionnement en génératrice

Le fonctionnement en génératrice correspond à $g \leq 0$. La génératrice absorbe l'énergie mécanique $P_a = C_{em}\Omega$ et fournit l'énergie électrique $P_u = 3V_s I_s \cos(\phi_s)$. Les pertes sont inchangées et le rendement s'écrit toujours $\eta = \frac{P_u}{P_a}$ avec $P_a = P_u + P_{js} + P_f + P_{jr}$. Dans le cas où ne tient compte que des pertes Joule au rotor, on a $P_u = P_2$ et $P_a = P_{em}$ d'où $\eta = \frac{1}{1-g}$. Dans la pratique, on a $\eta \leq \frac{1}{1-g}$.

9.4.5 Expression du couple

Nous avons vu que le couple est de même signe que le glissement. Cherchons désormais à déterminer une expression analytique du couple. Pour cela, nous allons négliger les pertes Joule du stator ($R_s = 0$) afin de simplifier les calculs. Le module du courant \underline{I}_2 est déterminé par :

$$I_2^2 = \frac{V_s^2}{\left(\frac{R_r}{g}\right)^2 + (N_r\omega)^2} \quad (9.49)$$

En remplaçant dans l'équation 9.48, et en réarrangeant l'expression, on obtient :

$$C_{em} = \frac{2C_m}{\frac{g}{g_m} + \frac{g_m}{g}}. \quad (9.50)$$

où $g_m = \frac{R_2}{N_2\omega}$ et $C_m = \frac{3pV_s^2}{2N_2\omega^2}$. Il s'agit d'une fonction impaire qui présente un maximum pour $(g, C_{em}) = (g_m, C_m)$ et un minimum en $(g, C_{em}) = (-g_m, -C_m)$.

Sur la figure 9.3 est représentée l'allure du couple pour une machine à une paire de pôles d'une puissance nominale de 1,5 kW. On observe que le couple à l'arrêt ($g = 0$) est relativement faible par rapport au couple maximal. Dans la pratique, la machine est utilisée sur une plage de glissement relativement faible entre $-g_m$ et g_m . En dehors de cette palge, le rendement n'est plus acceptable.

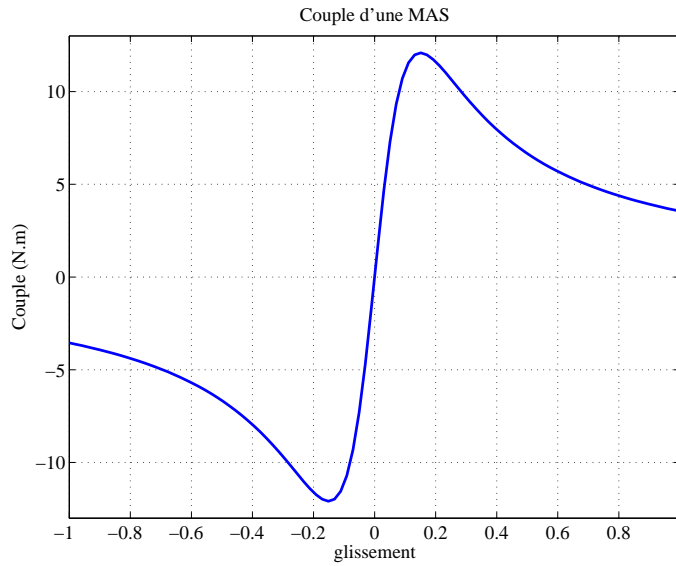


FIG. 9.3 – Couple d'une machine asynchrone

Exercice 39 (Expression du couple de la machine asynchrone) *A partir du schéma équivalent d'une phase de la machine asynchrone représenté sur la figure 9.2, montrez que si on néglige la résistance du stator, on peut écrire le couple sous la forme $C_{em} = 2C_m / (\frac{g}{g_m} + \frac{g_m}{g})$. Donnez les expressions*

de C_m et g_m en fonction des paramètres du modèle, de la tension d'alimentation et de la pulsation.

9.4.6 Identification des paramètres

La méthode la plus classique pour déterminer les valeurs des paramètres de ce modèle comporte deux essais :

- un essai à vide (sans couple de charge) sous tension nominale,
- un essai à rotor bloqué⁶ ($g = 1$) sous tension réduite où à un glissement particulier g_1 .

On peut au préalable estimer la résistance des pertes Joule du stator mais on peut également négliger sa valeur.

Mesure de la résistance du stator

La résistance R_s d'un enroulement du stator est le seul paramètres qui peut être mesuré de manière indépendante des autres paramètres. Il suffit en effet d'alimenter une phase du moteur avec un courant continu, de relever les valeurs moyennes des tensions et courant et de déterminer R_s comme étant le rapport de la tension et du courant.

Les valeurs des résistance étant sensibles aux variations de températures, il est recommandé d'amener préalablement la machine à sa température classique de fonctionnement avant d'effectuer cette mesure.

Essai à vide

L'essai à vide est fait sous tension nominale sans charger la machine du point de vue mécanique. Notons V_0 la tension stator, I_0 le courant stator et P_0 la puissance totale absorbée par la machine.

⁶L'essai à rotor bloqué présente deux inconvénients. Tout d'abord, il suppose que l'on soit capable de bloquer mécaniquement l'axe de la machine alors que celui-ci est généralement protégé pour des raisons de sécurité. De plus, à rotor bloqué, les courants du rotor sont à la pulsation du stator ω , pulsation très élevée par rapport à leur plage de fonctionnement habituelle. Dans ce cas, des effets de fréquence peuvent apparaître entraînant des variations significatives des paramètres et notamment des fuites. Ce phénomène est très significatif pour les rotor à encoches profondes où cet effet est utilisé pour faciliter le démarrage. Si on souhaite identifier un modèle valable pour le fonctionnement nominal, il est préférable de se limiter à des mesures pour ce régime.

On peut considérer que la vitesse à vide est égale à la vitesse de synchronisme, ce qui correspond à un glissement nul. La branche du rotor du modèle est alors ouverte et il est possible d'estimer les paramètres du circuit magnétique à partir des mesures à vide. En retranchant les pertes Joule du stator à la puissance absorbée ($P_{01} = P_0 - 3R_s I_0^2$) et en calculant la tension E_m aux bornes de L_m :

$$E_m = \sqrt{V_0^2 - R_s I_0 \cos(\phi_0) V_0 + (R_s I_0)^2} \quad (9.51)$$

où ϕ_0 est le déphasage de la tension par rapport au courant à vide. A partir d'un bilan d'énergie active et réactive, on détermine alors :

$$\begin{cases} R_f &= \frac{3E_m^2}{P_{10}} \\ X_m &= \frac{3E_m^2}{Q_0} \end{cases} \quad (9.52)$$

avec $Q_0 = \sqrt{(3V_0 I_0)^2 - P_0^2}$. Remarquons que ces développements sont simplifiés si on néglie la résistance du stator car on a alors $E_m = V_0$.

Essai à glissement nominal où à rotor bloqué

Soient g_1 , V_1 , I_1 et P_1 les mesures correspondant à cet essai. Pour l'essai à rotor bloqué ($g_1 = 1$) sous tension réduite, il est courant de négliger le courant parcourant l'inductance magnétisante et les pertes fer. On peut alors écrire les puissance actives et réactives :

$$\begin{cases} P_b &= 3(R_s + R_2)I_b^2 \\ Q_b &= 3X_r I_b^2 \end{cases} \quad (9.53)$$

avec $Q_b = \sqrt{(3V_b I_b)^2 - P_b^2}$. Les paramètres inconnus sont alors déterminés par :

$$\begin{cases} R_2 &= \frac{P_b}{3I_b^2} - R_s \\ X_r &= \frac{Q_b}{3I_b^2} \end{cases} \quad (9.54)$$

On peut se passer de l'hypothèse précédente correspondant à négliger les effets du circuit magnétique au prix de calculs légèrement plus compliqués. Cela s'avère nécessaire pour tenir compte d'une mesure à glissement nominal. Une manière élégante d'écrire les résultats consiste à écrire les calculs en

complexe. Soit \underline{Z}_1 l'impédance équivalente déterminée à partir des mesures. Le modèle s'écrit :

$$\underline{Z}_1 = R_s + \frac{1}{\frac{1}{jX_m} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_2/g_1 + jX_r}} \quad (9.55)$$

ce qui donne :

$$\frac{R_2}{g_1} + jX_r = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1 - R_s} - \frac{1}{jX_m} - \frac{1}{R_f}} \quad (9.56)$$

Après avoir calculé le terme de droite, il suffit alors de prendre les parties réelle et imaginaire pour isoler respectivement R_2 et X_r . Pour la détermination de \underline{Z}_1 , on peut utiliser les relations $V_1 = Z_1 I_1$ pour déterminer le module et $P = 3V_1 I_1 \cos(\phi_1)$ avec $\phi_1 = \arg(\underline{Z}_1)$ pour déterminer l'argument.

Annexe A

Historique de l'électricité

- André-Marie AMPERE, Lyon 1775, Marseille 1836. Fondateur de la théorie de l'électromagnétisme. Un des premiers à utiliser la notion de tension et de courant. Inventeur, avec Arago, de l'électroaimant. On lui doit la règle d'orientation du champ magnétique connue sous le nom du *bonhomme d'Ampère*.
- Peter BARLOW, Norwich 1776, Woolwich 1862. Inventeur de la roue de Barlow, prototype du moteur à courant, en 1828.
- Augustin FRESNEL, Chambras (aujourd'hui Broglie) 1788, Villes d'Avray 1827. Travaux en optiques appliqués par la suite à l'électromagnétisme.
- Georg Simon OHM, Erlangen 1789, Munich 1854. A enoncé la loi qui porte son nom (loi d'Ohm) en 1827, permettant ainsi une réunion de deux domaines jusqu'alors distincts : celui des courants (ou de la magnétostatique) et celui des tensions (ou de l'électrostatique).
- Michael FARADAY, Newington, Surrey (aujourd'hui Southwark) 1791, Hampton Court 1867. Il découvrit le principe de production de travail à partir de courant électrique et de champ magnétique, à la base des moteurs électriques. Il découvrit en 1831 le principe de l'induction magnétique.
- Heinrich Friedrich Emil LENZ (Dorpat, aujourd'hui Tartu, Estonie 1804-Rome 1865). Il enonça la loi qui porte son nom en 1834 selon laquelle les courants induits d'opposent à la cause qui leur donne naissance.
- Léon FOUCAULT (1819-1868) est connu pour ses travaux sur la vitesse de la lumière, le gyroscope et les télescopes. On a retenu de lui son célèbre pendule. On lui doit la *machine d'induction* qui porte son nom

en 1855 et qui est l'ancêtre du frein à courant de Foucault. En France, on qualifie les courants induits de courants de Foucault.

- James Prescott JOULE, Salford (GB) 1818, Sale (GB) 1889. Il imagine un moteur électrique en 1838. En 1840, il met en évidence le phénomène de saturation magnétique. En 1841, il énonce la loi qui porte son nom qui exprime la puissance dissipée comme le produit de la résistance par le carré du courant.
- Werner VON SIEMENS, Lenthe 1816, Hanovre 1892. Il est le premier à avoir inventé des solutions pour la commande à vitesse variable des moteurs à courant continu, technologie appliquée, par exemple, dans un assenseur qu'il a proposé en 1880. En 1866, il donne le principe de la dynamo.
- Gustav Robert KIRCHHOFF, Königsberg 1824, Berlin 1887. Énonciateur des lois qui portent son nom : loi des nœuds et loi des mailles.
- James Clerk MAXWELL, Edimbourg 1831, Cambridge 1879. Père de la théorie générale du champ électromagnétique en 1864 connue sous le nom d'*équations de Maxwell*. Il identifia la lumière à une onde électromagnétique.
- Nikolas TESLA, Smiljan 1856, New-York 1943. Il conçut le premier moteur asynchrone (1888). Il effectua le premier transport d'énergie électrique en courant triphasé (175 km, 1891). Il proposa la technique du couplage en étoile.

Annexe B

Bibliographie

B.1 Ouvrages

- Electrotechnique (2ème édition). Jean-Paul Bouchard, Guy Olivier. Presses internationales polytechniques, 1999. Ouvrage complet dépassant le programme de seconde année de licence, mais où vous pouvez trouver des informations sur les bases (circuits électriques et magnétiques) ainsi que sur les moteurs. Contient des exercices dont les solutions sont fournies.
- Génie électrotechnique. R. Mérat, R. Moreau, L. Allay, J.P. Dubois, J. Lafargue, R. le Goff. Collection Etapes, Nathan, 1997. Ouvrage complet et simple correspondant bien au programme et contenant de nombreux exercices corrigés.
- Introduction à l'électrotechnique. F. de Coulomb, M. Jufer. Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique, Presses polytechniques romandes, 1984. Ouvrage général présentant notamment l'étude des circuits électriques et des circuits magnétiques. Contient un chapitre sur les nombres complexes. Attention, comme pour tous les ouvrages suisses, les tensions sont notées avec des flèches inversées par rapport aux conventions françaises.
- Physique appliquée Terminale STI. R. le Goff, J. Lafargue, T. Lecourieux. Nathan Technique, 1998. Ouvrage de niveau élémentaire mais complet et contenant des exercices résolus. N'hésitez pas à le consulter en cas de difficultés où pour vous rappeler les bases.
- Electronique Electrotechnique - Exercices avec solutions. M. Bornand.

Vuibert 1973. Recueil complet d'exercices corrigés, notamment sur les circuits électriques, les circuits magnétiques et les machines électriques.

B.2 Sites Internet

N'hésitez pas à utiliser votre moteur de recherche préféré pour trouver sur internet les nombreuses ressources que des enseignants ou autres professionnels ont mises en ligne. A titre indicatif, voici un certain nombre d'adresses.

- Centre de ressources en électrotechnique. <http://www.iufmrese.cict.fr/index.htm>. Contient des contributions de différents auteurs.
- Site personnel de Xavier Cotton. <http://www.multimania.com/xcotton/electron/coursetdocs.htm>. contient de nombreux liens vers des cours, des exercices, des animations.
- Ken Berringer, de Motorola. <http://mot-sps.com/motor/tutorial/>. contient des animations expliquant le principe des moteurs électriques (en anglais).
- Electrotechcity. <http://www.multimania.com/electrotechcity/>. site consacré à l'électrotechnique, contient des cours.
- Page de vote enseignant contenant des examens des années précédentes avec éléments de correction sur <http://eavr.u-strasbg.fr/perso/edouard/Student/>