

**Université Louis Pasteur de Strasbourg**

**IUP Technologies Avancées des Sciences du Vivant**

---

# **Introduction à la Robotique**

---

**Bernard BAYLE, année 2004–2005**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Représentation des transformations rigides</b>	<b>1</b>
1.1	Notations et définitions . . . . .	1
1.1.1	Points . . . . .	1
1.1.2	Solides . . . . .	1
1.1.3	Transformations rigides . . . . .	2
1.2	Rotations . . . . .	2
1.2.1	Matrice de rotation . . . . .	2
1.2.2	Rotation d'un point appartenant à un solide . . . . .	3
1.2.3	Exemple . . . . .	3
1.2.4	Rotation d'un vecteur . . . . .	4
1.2.5	Propriétés des rotations . . . . .	5
1.2.6	Combinaison de rotations . . . . .	5
1.2.7	Représentation de l'orientation d'un solide dans l'espace . . . . .	7
1.3	Transformations rigides . . . . .	10
1.3.1	Matrices de passage homogènes . . . . .	10
1.3.2	Propriétés des transformations rigides . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Description des bras manipulateurs</b>	<b>13</b>
2.1	Chaîne cinématique d'un bras manipulateur . . . . .	13
2.2	Paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés . . . . .	14
2.3	Relations géométriques . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Modélisation des bras manipulateurs</b>	<b>18</b>
3.1	Configuration et situation d'un bras manipulateur . . . . .	18
3.2	Modèle géométrique direct . . . . .	18
3.2.1	Définition . . . . .	18
3.2.2	Calcul . . . . .	19
3.2.3	Règles pratiques . . . . .	19
3.2.4	Exemple . . . . .	20
3.3	Modèle géométrique inverse . . . . .	22
3.3.1	Définition . . . . .	22
3.3.2	Calcul . . . . .	22
3.3.3	Exemple : voir TD . . . . .	23
3.4	Modèle cinématique direct . . . . .	23
3.4.1	Définition . . . . .	23

---

3.4.2	Calcul . . . . .	23
3.4.3	Intérêt et exemple : voir TP (si le temps le permet) . . . . .	23
<b>A</b>	<b>Modélisation d'un bras manipulateur de type SCARE</b>	<b>24</b>
A.1	Robot de type SCARA : présentation . . . . .	24
A.2	Robot Samsung RSM-5 : modélisation . . . . .	25
A.2.1	Géométrie du robot . . . . .	25
	<b>Bibliographie</b>	<b>29</b>

# Chapitre 1

## Représentation des transformations rigides

Ce chapitre contient des rappels mathématiques sur les transformations rigides et l'orientation des corps dans l'espace [Murray 94, Renaud 86, Craig 89].

### 1.1 Notations et définitions

L'objet de ce paragraphe est de fournir un ensemble de définitions mathématiques précises pour l'étude des mécanismes polyarticulés.

#### 1.1.1 Points

Soit un repère orthonormé cartésien noté  $\mathcal{R} = (O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  selon la convention de Gibbs. La *position d'un point*  $M$  est donnée par un triplet de *coordonnées*. On choisit par commodité de représenter ces coordonnées par un vecteur  $m$  de  $\mathbb{R}^3$ , sous la forme d'une matrice colonne :

$$m = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}.$$

Le *mouvement* du point est la courbe paramétrée  $m(t)$  de  $\mathbb{R}^3$  donnant sa position au cours du temps. Le support du mouvement (la courbe non paramétrée) est la *trajectoire* du point.

#### 1.1.2 Solides

Un *solide*  $\mathcal{S}$  est dit *indéformable* si, pour toute paire de points de ce solide de coordonnées  $m$  et  $n$ ,  $\|m(t) - n(t)\| = \|m(0) - n(0)\| = \text{constante}$  au cours du temps. Par la suite, les solides seront tous considérés comme indéformables.

Le *mouvement rigide* d'un solide  $\mathcal{S}$ , considéré comme un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  est le mouvement de chacun de ses points.

La *situation* d'un solide  $\mathcal{S}$  est donnée par la position et l'orientation dans  $\mathcal{R}$  d'un repère lié à ce solide.

### 1.1.3 Transformations rigides

On appelle *transformation rigide* le résultat d'un mouvement rigide amenant le solide d'une situation initiale à une situation finale. Une transformation rigide est représentée par une application unique qui transforme les coordonnées des points du solide  $\mathcal{S}$  de leur position initiale vers leur position finale.

A l'inverse, une application représentera une transformation rigide si elle conserve à la fois les distances et l'orientation. Cela signifie notamment qu'un repère orthonormé direct reste orthonormé direct par application d'une telle transformation.

## 1.2 Rotations

### 1.2.1 Matrice de rotation

Soit deux repères orthonormés directs  $\mathcal{R} = (O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  et  $\mathcal{R}' = (O, \underline{x}', \underline{y}', \underline{z}')$  partageant la même origine  $O$ . Soit  $x', y', z'$  les coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{R}'$  exprimés dans  $\mathcal{R}$  :

$$x' = \begin{pmatrix} \underline{x}' \cdot \underline{x} \\ \underline{x}' \cdot \underline{y} \\ \underline{x}' \cdot \underline{z} \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} \underline{y}' \cdot \underline{x} \\ \underline{y}' \cdot \underline{y} \\ \underline{y}' \cdot \underline{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z' = \begin{pmatrix} \underline{z}' \cdot \underline{x} \\ \underline{z}' \cdot \underline{y} \\ \underline{z}' \cdot \underline{z} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $R = (x' \ y' \ z')$  de dimension  $3 \times 3$  est appelée *matrice de rotation* (ou encore *matrice de passage* ou *matrice de changement de base*) du repère  $\mathcal{R}$  vers le repère  $\mathcal{R}'$ . Elle peut en effet être vue comme la matrice rendant compte de la rotation d'un solide lié à un repère orthonormé, initialement en  $\mathcal{R}$ , et déplacé en  $\mathcal{R}'$  par la rotation autour de  $O$ , conformément à la figure 1.1.

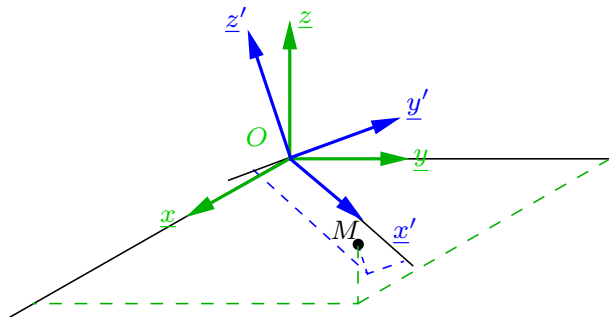


FIG. 1.1 – Changement de base des coordonnées d'un point

### 1.2.2 Rotation d'un point appartenant à un solide

Le repère  $\mathcal{R}$  précédent est un repère fixe cartésien orthonormé. Soient  $m = (m_x \ m_y \ m_z)^T$  et  $m' = (m'_x \ m'_y \ m'_z)^T$  les coordonnées d'un point  $M$  respectivement dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Les coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{R}'$  exprimées dans  $\mathcal{R}$  étant (toujours) notées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , les coordonnées de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  sont données par :

$$m = m'_x x' + m'_y y' + m'_z z'$$

soit encore sous forme matricielle :

$$m = (x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} m'_x \\ m'_y \\ m'_z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$m = Rm'. \quad (1.1)$$

Cette relation rend compte du changement de base des coordonnées d'un point. On peut en faire une analyse en terme de rotation si l'on considère que  $M$  est un point d'un solide  $S$  (en pointillés sur la figure 1.2) ayant effectué, autour de  $O$ , une rotation de matrice  $R$ . Alors  $m'$  représentent les coordonnées initiales de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  et  $m$  ses coordonnées finales, toujours dans  $\mathcal{R}$ , une fois la rotation effectuée.

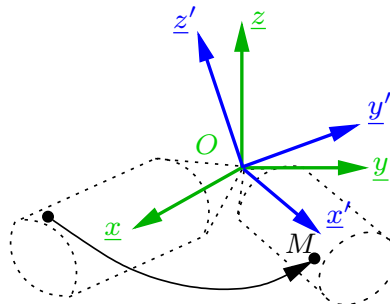


FIG. 1.2 – Rotation d'un solide autour d'un point fixe

### 1.2.3 Exemple

On considère la rotation d'un point  $M$  de coordonnées initiales  $(\sqrt{3} \ 0 \ 1)^T$  dans  $\mathcal{R}$ , comme cela est représenté à la figure 1.3 page suivante. On cherche à déterminer les coordonnées du point transformé par une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ , autour de  $\underline{z}$ . Les coordonnées des vecteurs de base de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$  sont :

$$x' = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

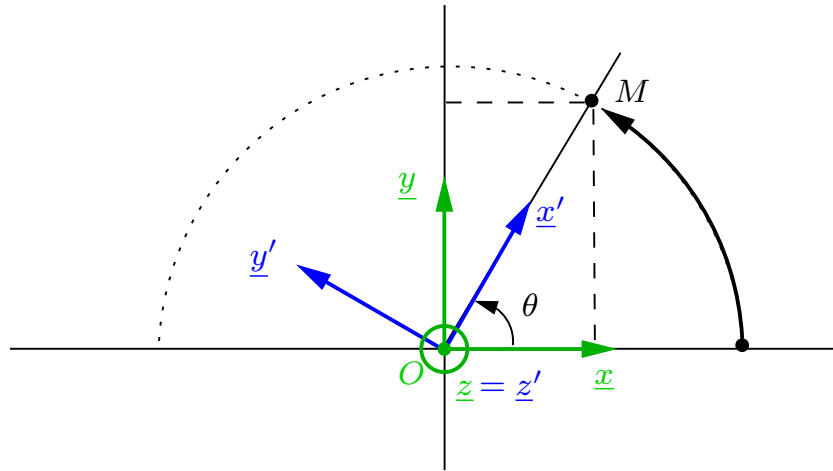


FIG. 1.3 – Exemple de rotation plane

si bien que la matrice de rotation de  $\mathcal{R}$  vers  $\mathcal{R}'$ , notée  $R(\underline{z}, \theta)$ , est :

$$R(\underline{z}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du point  $M$  dans  $\mathcal{R}'$  sont :

$$m' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans  $\mathcal{R}$  ses coordonnées sont :

$$m = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cos \theta \\ \sqrt{3} \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme évoqué précédemment, on peut vérifier qu'il s'agit aussi des coordonnées dans  $\mathcal{R}$  d'un point qui initialement en  $(\sqrt{3} \ 0 \ 1)^T$  se trouverait déplacé en  $M$  sous l'effet de la rotation de  $\mathcal{R}$  vers  $\mathcal{R}'$ . A titre d'exemple, pour  $\theta = \frac{\pi}{3}$  (c'est le cas de la figure 1.3)  $m = (\frac{\sqrt{3}}{2} \ \frac{3}{2} \ 1)^T$ .

### 1.2.4 Rotation d'un vecteur

La rotation s'applique aussi bien évidemment aux vecteurs. Les coordonnées d'un vecteur sont en effet la différence des coordonnées de deux points de  $\mathbb{R}^3$ . On peut ainsi appliquer la rotation à un vecteur de coordonnées  $v = m - n$  dans  $\mathcal{R}$  :

$$m - n = Rm' - Rn' = R(m' - n'),$$

soit, en posant  $v' = m' - n'$  :

$$v = Rv'.$$

### 1.2.5 Propriétés des rotations

La matrice de rotation  $R$ , par définition, est constituée de colonnes orthonormales et donc :

$$R^T R = I.$$

Par ailleurs, on montre que :

$$\det R = 1$$

et que les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. La combinaison de deux rotations  $R_1$  et  $R_2$  est la rotation  $R_1 R_2$ .
2. Il existe un unique élément neutre, qui est la matrice identité d'ordre 3<sup>1</sup>.
3. A une matrice de rotation  $R$  il existe une unique inverse  $R^{-1} = R^T$ , par définition de  $SO(3)$ .

Par ailleurs, une rotation est une transformation rigide car :

1.  $\|Rm - Rn\| = \|m - n\|, \forall m, n \in \mathbb{R}^3$  ;
2.  $R(v \times w) = Rv \times Rw, \forall v, w \in \mathbb{R}^3$ .

### 1.2.6 Combinaison de rotations

Soient deux rotations  $R_1$  et  $R_2$ , alors  $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$  ; ces deux produits ont chacun une signification, que nous allons étudier maintenant.

Deux cas se présentent pour combiner deux rotations :

- soit on effectue la seconde rotation par rapport au repère résultant de la première rotation ;
- soit on effectue les deux rotations par rapport à un unique repère, fixe.

Soit  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  les repères résultant des deux rotations successives du repère fixe  $\mathcal{R}$ . Dans les deux cas évoqués précédemment, le repère  $\mathcal{R}'$  résulte de la rotation  $R_1$  de  $\mathcal{R}$  autour d'un axe lié au repère fixe  $\mathcal{R}$ . Ensuite, les deux cas précédents donnent :

- dans le premier cas  $\mathcal{R}''$  résulte de la rotation de  $\mathcal{R}'$  autour d'un axe lié à  $\mathcal{R}'$  ;
- dans le second cas  $\mathcal{R}''$  résulte de la rotation de  $\mathcal{R}'$  autour d'un axe lié à  $\mathcal{R}$ .

Nous allons maintenant examiner ces deux cas.

**Premier cas** Ce cas peut être analysé comme un problème de changement de base. Soit  $M$  de coordonnées respectives  $m, m', m''$  dans les repères  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$ . Alors :

$$\begin{aligned} m &= R_1 m' \\ m' &= R_2 m'' \end{aligned}$$

et donc :

$$m = R_1 R_2 m''.$$

Comme nous l'avons vu précédemment, les coordonnées  $m$  de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  sont aussi les coordonnées d'un point de coordonnées  $m''$  dans  $\mathcal{R}$  auquel on aurait appliqué les

<sup>1</sup>Les matrices identités, quel que soit leur ordre sont notées  $I$ .



deux rotations successives. Par exemple considérons la combinaison des deux rotations suivantes :

- une première rotation d'un angle  $\frac{\pi}{4}$  autour de  $\underline{z}$ ;
- une seconde rotation d'un angle  $\pi$  autour de l'axe  $\underline{y}'$  résultant de la première rotation.

Ceci correspond à l'illustration de la figure 1.4. On considère le point de coordonnées

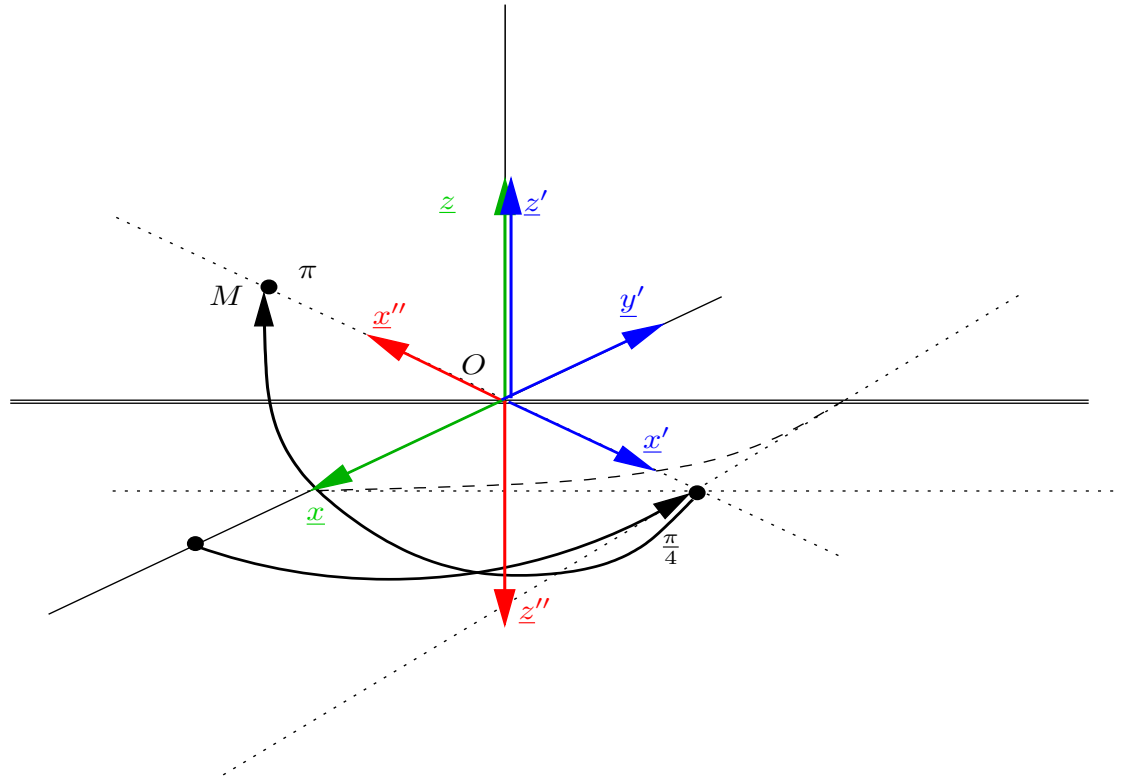


FIG. 1.4 – Rotations successives autour d'axes non fixes

$m'' = (\sqrt{2} \ 0 \ 0)^T$  dans  $\mathcal{R}''$  et on souhaite exprimer ses coordonnées dans  $\mathcal{R}$ . On a donc :

$$m = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci correspond à la combinaison des deux rotations suivantes :

- une première rotation d'un angle  $\frac{\pi}{4}$  autour de  $\underline{z}$ ;
- une seconde rotation d'un angle  $\pi$  autour de l'axe  $\underline{y}'$ .

**Second cas** Ce cas peut être analysé comme un problème de rotations successives d'un point. La transformation d'un point de coordonnées initiales  $m''$  dans  $\mathcal{R}$  donne un point intermédiaire, qui, transformé par la seconde rotation donne un point de coordonnées  $m$  dans  $\mathcal{R}$  par  $R_2$ . Ainsi :

$$m = R_2(R_1 m'').$$

Pour comparer avec le premier cas, vu précédemment, considérons la combinaison des deux rotations suivantes :

- une première rotation d'un angle  $\frac{\pi}{4}$  autour de  $\underline{z}$ ;
- une seconde rotation d'un angle  $\pi$  autour de l'axe  $\underline{y}$  fixe.

Ceci correspond à l'illustration de la figure 1.5. On considère le point de coordonnées

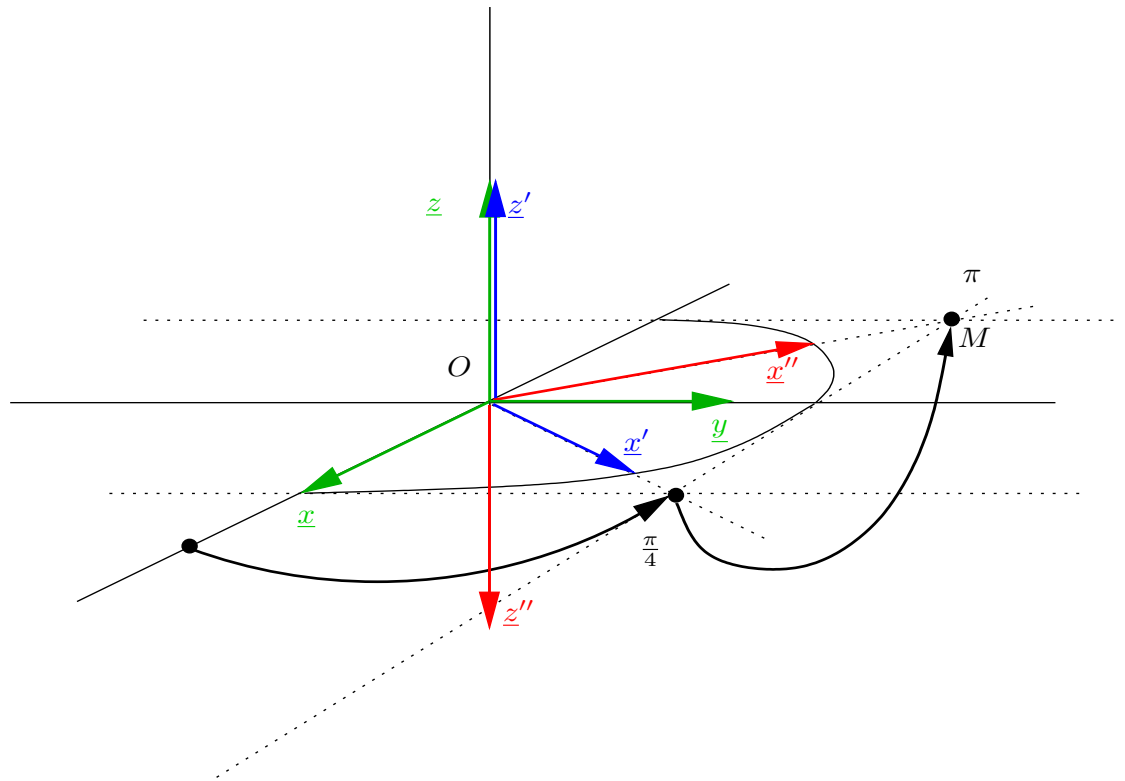


FIG. 1.5 – Rotations successives autour d'axes fixes

initiales  $m'' = (\sqrt{2} \ 0 \ 0)^T$  dans  $\mathcal{R}$  (et donc de coordonnées finales  $m''$  dans  $\mathcal{R}''$ ). On a :

$$m = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.7 Représentation de l'orientation d'un solide dans l'espace

La donnée d'une base attachée à un solide  $\mathcal{S}$  en rotation détermine de manière unique son orientation dans l'espace. Différentes représentations peuvent être utilisées pour cela, avec pour chacune avantages et inconvénients.

### Matrice de rotation et cosinus directeurs

On considère la rotation d'un repère  $\mathcal{R}$  vers un repère  $\mathcal{R}'$ . La matrice de rotation  $R$  est une matrice de dimension  $3 \times 3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

$$R = \begin{pmatrix} x_x & y_x & z_x \\ x_y & y_y & z_y \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix}.$$

Les éléments de cette matrice sont appelés *cosinus directeurs* car ils représentent les coordonnées des trois vecteurs de la base  $\mathcal{R}'$  exprimés dans  $\mathcal{R}$ . Par définition, les colonnes de  $R$  sont orthogonales entre elles et par conséquent la connaissance de deux colonnes suffit. En robotique, on omet ainsi souvent la seconde colonne :

$$R = \begin{pmatrix} x_x & * & z_x \\ x_y & * & z_y \\ x_z & * & z_z \end{pmatrix}.$$

Les six paramètres restant sont appelés *cosinus directeurs incomplets*. Par ailleurs les colonnes de  $R$  formant une base orthonormée :

- les deux colonnes restantes sont orthogonales et donc :

$$x_x z_x + x_y z_y + x_z z_z = 0 ;$$

- les deux colonnes restantes sont de norme unité et donc :

$$\begin{aligned} x_x^2 + x_y^2 + x_z^2 &= 1, \\ z_x^2 + z_y^2 + z_z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Il existe donc six paramètres liés entre eux par trois relations si l'on définit l'orientation d'un solide par une matrice de rotation. Malheureusement, les relations liant les cosinus directeurs incomplets ne permettent pas de fournir trois paramètres uniques, mais une collection de solutions : il faut donc conserver ces six paramètres ou utiliser un autre mode de représentation de l'orientation.

### Angles d'Euler classiques

Les *angles d'Euler classiques* permettent de décrire l'orientation d'un solide par trois rotations successives donnant au solide l'orientation en question. Les rotations successives, conformément à la figure 1.6 page suivante, sont  $R(\underline{z}, \psi)$ ,  $R(\underline{x}_\psi, \theta)$  et enfin  $R(\underline{z}_\theta, \varphi)$  où  $\underline{x}_\psi$  et  $\underline{z}_\theta$  sont déduits des vecteurs du repère de base conformément à la figure 1.6 page suivante. Les angles  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  sont connus respectivement sous les termes de *précession*, *nutation* et *rotation propre*. Chaque nouvelle rotation étant effectuée par rapport à un repère ayant tourné :

$$R = R(\underline{z}, \psi) R(\underline{x}_\psi, \theta) R(\underline{z}_\theta, \varphi).$$

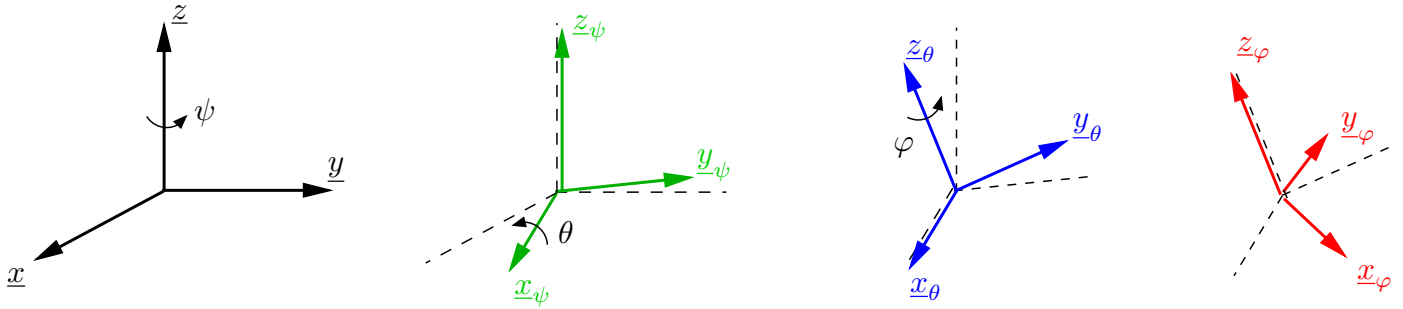


FIG. 1.6 – Rotations successives dans le paramétrage par les angles d’Euler

Sous forme développée :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit finalement :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La transformation inverse permet d’établir les angles d’Euler à partir des cosinus directeurs<sup>2</sup> :

- si  $z_z \neq \pm 1$  :

$$\begin{aligned} \psi &= \text{atan2}(z_x, -z_y), \\ \theta &= \text{acos } z_z, \\ \varphi &= \text{atan2}(x_z, y_z). \end{aligned}$$

- si  $z_z = \pm 1$  :

$$\begin{aligned} \theta &= \pi(1 - z_z)/2, \\ \psi + z_z \varphi &= \text{atan2}(y_x, x_x), \end{aligned}$$

et donc  $\psi$  et  $\varphi$  sont indéterminés.

### Angles roulis, tangage et lacet

Pour cette représentation, la littérature donne de nombreuses définitions [Paul 81, Craig 89, Khalil 99, Renaud 86]. Ces angles, très utilisés par les anglo-saxons et donc par les industriels, portent les noms de *roll*, *pitch* et *yaw* en anglais. Il s’agit en fait d’angles d’Euler non classiques en cela que les rotations s’effectuent autour d’axes fixes.

Nous adoptons la définition de [Craig 89] : les rotations successives, conformément à la figure 1.7 page suivante, sont  $R(\underline{x}, \gamma)$ ,  $R(\underline{y}, \beta)$  puis  $R(\underline{z}, \alpha)$ . Les angles  $\gamma$ ,  $\beta$ , et  $\alpha$  sont respectivement désignés sous les noms d’angles de *roulis*, *tangage* et *lacet*. Chaque

<sup>2</sup>Pour cela il faut définir la fonction  $\text{atan2}$ , qui permet d’associer l’unique angle  $-\pi < x \leq \pi$  tel que  $x = \text{atan2}(\sin x, \cos x)$ .

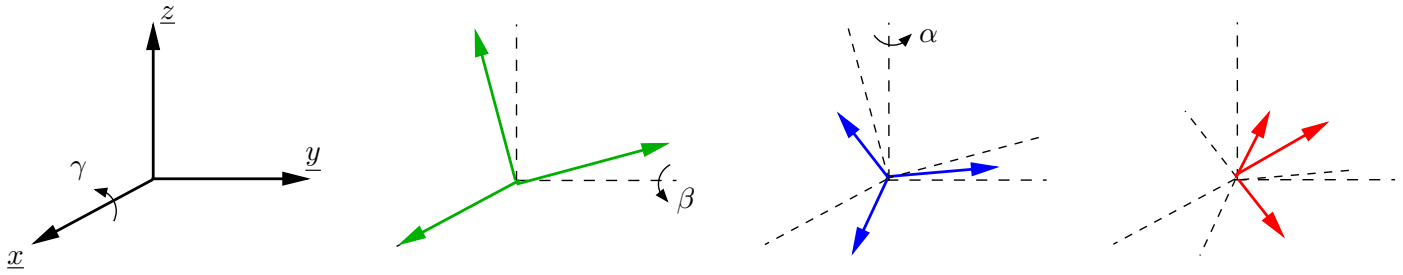


FIG. 1.7 – Rotations successives dans le paramétrage par les angles de roulis, tangage et lacet

nouvelle rotation étant effectuée par rapport à un axe du repère fixe  $\mathcal{R}$  :

$$R = R(\underline{z}, \alpha) R(\underline{y}, \beta) R(\underline{x}, \gamma).$$

Sous forme développée :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

soit finalement :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix}$$

La transformation inverse permet d'établir les angles de roulis, tangage et lacet à partir des cosinus directeurs :

- si  $\beta \neq \pm \frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(x_y, x_x), \\ \beta &= \text{atan2}(-x_z, \sqrt{x_x^2 + x_y^2}), \\ \gamma &= \text{atan2}(y_z, z_z). \end{aligned}$$

- si  $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$  :

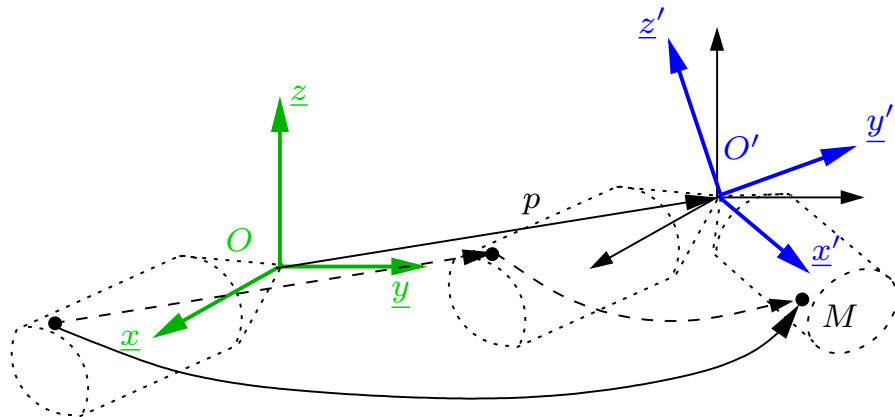
$$\begin{aligned} \alpha - \text{signe}(\beta) \gamma &= \text{atan2}(z_y, z_x), \\ (\text{ou } \alpha - \text{signe}(\beta) \gamma &= -\text{atan2}(y_x, y_y) \text{ équivalent } \dots \text{ normalement}), \end{aligned}$$

et donc  $\alpha$  et  $\gamma$  sont indéterminés.

## 1.3 Transformations rigides

### 1.3.1 Matrices de passage homogènes

Une transformation rigide résulte en général de la combinaison d'une translation et d'une rotation. Elle est définie par la paire  $(p, R)$  avec  $p$  la translation de l'origine du

FIG. 1.8 – Transformation rigide du solide  $S$ 

repère lié au solide  $S$  en mouvement (voir figure 1.8). L'ensemble des transformations rigides :

$$SE(3) = \{(p, R)/p \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3)\} = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

est appelé *groupe spécial euclidien*.

Soient  $m = (m_x \ m_y \ m_z)^T$  et  $m' = (m'_x \ m'_y \ m'_z)^T$  les coordonnées d'un point  $M$  respectivement dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . La transformation rigide résultant de la translation  $p$  du repère  $\mathcal{R}$  puis de la rotation du repère obtenu vers  $\mathcal{R}'$ , il en découle que :

$$m = p + Rm' \quad (1.2)$$

Ceci peut se mettre sous forme linéaire en introduisant les *coordonnées homogènes* du point  $M$  qui sont représentées par un vecteur de dimension  $4 \times 1$  :

$$\bar{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{R} \text{ et } \bar{m}' = \begin{pmatrix} m'_x \\ m'_y \\ m'_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{R}'.$$

On peut alors exprimer la transformation rigide (1.2) par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

que l'on notera :

$$\bar{m} = T\bar{m}'$$

en posant :

$$T = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $T$ , dite *matrice de passage homogène*, décrit ainsi le passage du repère  $\mathcal{R}$  au repère  $\mathcal{R}'$  et donc la transformation rigide  $(p, R)$ .

### 1.3.2 Propriétés des transformations rigides

On montre les propriétés suivantes :

1. Soit deux transformations rigides représentées par leurs matrices homogènes :

$$T_1 = \begin{pmatrix} R_1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} R_2 & p_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$T_1 T_2 = \begin{pmatrix} R_1 R_2 & R_1 p_2 + p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

ce qui implique que la combinaison de deux transformations rigides est bien une transformation rigide.

2. La matrice identité d'ordre 4 est la transformation rigide identité.
3. D'après le produit (1.4) l'inverse d'une transformation rigide  $(p, R)$  est représentée par :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de la transformation rigide  $(-R^T p, R^T)$ .

# Chapitre 2

## Description des bras manipulateurs

On se propose par la suite d'établir les modèles géométriques et cinématiques des bras manipulateurs. Pour cela on définit la forme des chaînes cinématiques qui seront étudiées et le paramétrage usuel de ces structures [Renaud 96]. .

### 2.1 Chaîne cinématique d'un bras manipulateur

On ne considère ici que les systèmes mécaniques composés de chaînes cinématiques polyarticulées ouvertes, appelés *bras manipulateurs* série. La figure 2.1 montre les deux structures les plus répandues dans l'industrie :

- les bras manipulateurs *de type anthropomorphe*, à six liaisons rotoïdes, d'usage général ;
- les bras manipulateurs *de type SCARA*, qui sont fréquemment utilisés dans les cellules de production pour les opérations de palettisation.



FIG. 2.1 – Bras manipulateurs de type anthropomorphe et SCARA

On supposera par la suite les bras manipulateurs constitués de  $n$  corps mobiles, supposés parfaitement rigides, reliés entre eux par  $n$  liaisons rotoïdes et/ou prismatiques formant une structure de chaîne simple (voir figure 2.2 page suivante). Pour identifier la



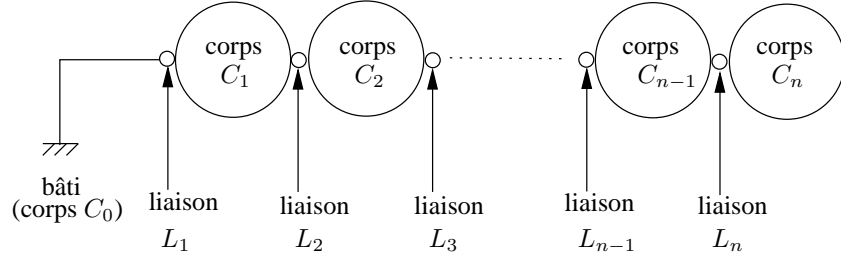


FIG. 2.2 – Chaîne cinématique d'un bras manipulateur série

nature de la  $i$ -ème liaison du bras manipulateur, on définit le paramètre :

$$\sigma_i = \begin{cases} 0, & \text{pour une liaison rotoïde,} \\ 1, & \text{pour une liaison prismatique.} \end{cases}$$

On désigne fréquemment les bras manipulateurs en accolant les lettres  $R$  (pour rotoïde) et  $P$  (pour prismatique) pour décrire la succession des liaisons. Par exemple un bras manipulateur de type anthropomorphe sera désigné par le sigle  $6R$  alors qu'un bras manipulateur de type SCARA sera de type  $RRP$  ou  $RRPR$  (il existe plusieurs variantes).

## 2.2 Paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés

La technique la plus répandue pour décrire la géométrie d'un bras manipulateur<sup>1</sup> consiste à utiliser les *paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés* [Khalil 86]. On associe au  $i$ -ème corps le repère  $\mathcal{R}_i = (O_i, \underline{x}_i, \underline{y}_i, \underline{z}_i)$ , avec  $i = 0, 1, \dots, n$ . Pour placer les repères  $\mathcal{R}_1$  à  $\mathcal{R}_{n-1}$  selon la règle des paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés, il convient de suivre les règles suivantes (voir figure 2.3 page suivante), pour  $i = 2, 3, \dots, n$  :

- $O_{i-1}$  est le pied de la perpendiculaire commune aux axes des liaisons  $L_{i-1}$  et  $L_i$ , situé sur  $L_{i-1}$ . Si les axes des liaisons sont parallèles, il faut choisir arbitrairement une perpendiculaire commune ;
- $\underline{x}_{i-1}$  est le vecteur unitaire de cette perpendiculaire commune, orienté de  $L_{i-1}$  vers  $L_i$ . Si les axes des deux liaisons sont concourants ou confondus, l'orientation est arbitraire (règle avant, droite, haut) ;
- $\underline{z}_{i-1}$  est un vecteur unitaire de l'axe de la liaison  $L_{i-1}$ , librement orienté. On privilégie généralement les débattements positifs pour les liaisons prismatiques et on symétrise généralement par rapport à 0 le débattement des liaisons rotoïdes ;
- $\underline{y}_{i-1}$  est tel que le repère  $\mathcal{R}_{i-1}$  soit orthonormé direct.

Ensuite, le repère  $\mathcal{R}_0$  est défini librement en suivant des considérations de simplicité. De même, le point  $O_n$  est choisi de façon à annuler un maximum de paramètres. Un point  $O_{n+1}$  est associé à l'OT du bras manipulateur, selon des critères opérationnels : typiquement, si le bras manipulateur est équipé d'une pince, le point  $O_{n+1}$  représentera

<sup>1</sup> A la fois celle à laquelle on attribue la plus grande généralité [Gorla 01] et la plus intuitive en pratique.

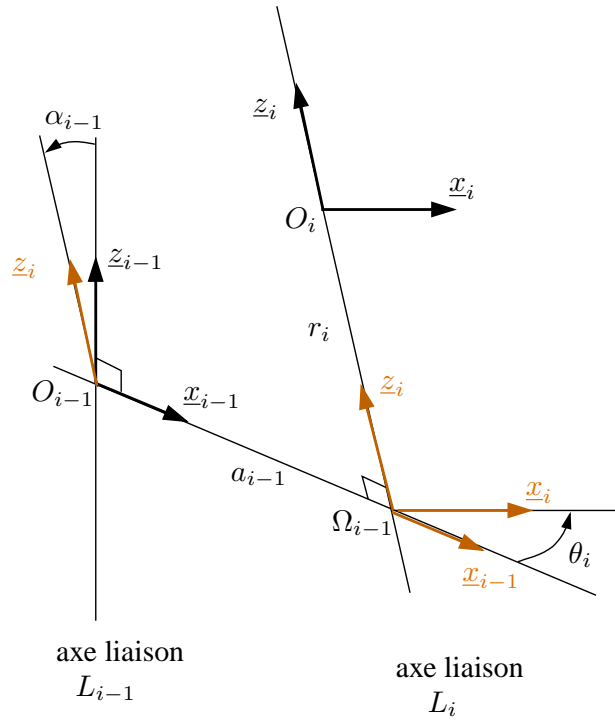


FIG. 2.3 – Paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés

le centre de ses mors. On choisit alors enfin  $\mathcal{R}_n$  de sorte que le point  $O_{n+1}$  se situe dans le plan  $\mathcal{R}_i = (O_n, \underline{x}_n, \underline{z}_n)$ , conformément à la figure 2.4.

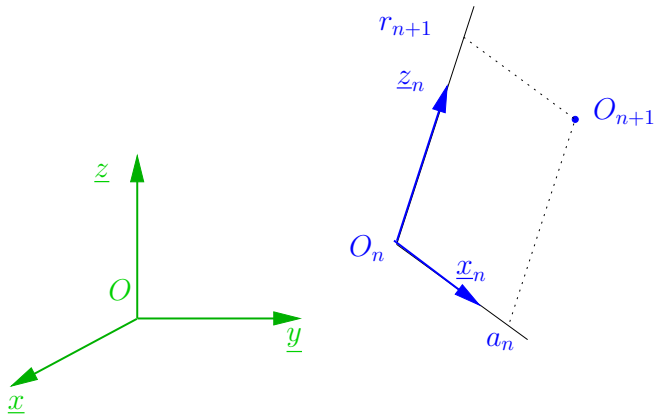


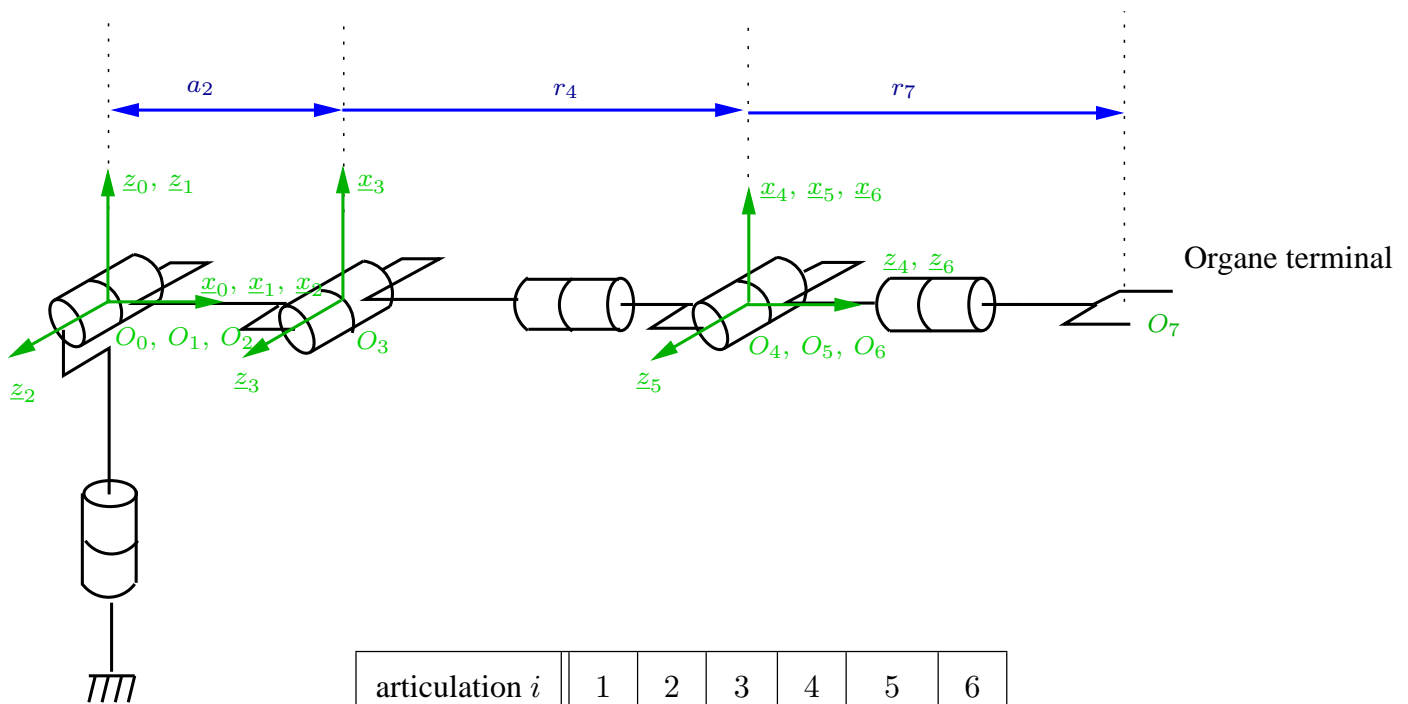
FIG. 2.4 – Placements respectifs des repères  $\mathcal{R}_n$  et du point  $O_{n+1}$

Les repères étant choisis, la situation du repère d'un corps respectivement à celle du repère du corps suivant peut être définie conformément à la figure 2.3. Les paramètres  $\alpha_{i-1}$ ,  $a_{i-1}$ ,  $\theta_i$  et  $r_i$ , avec  $i = 1, 2, \dots, n$ , placés sur cette figure sont appelés paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés. Textuellement, on peut les définir comme suit :

- $\alpha_{i-1}$  : angle algébrique entre  $\underline{z}_{i-1}$  et  $\underline{z}_i$ , mesuré autour de  $\underline{x}_{i-1}$  ;
- $a_{i-1}$  : distance arithmétique de la perpendiculaire commune aux axes des liaisons  $L_{i-1}$  et  $L_i$  mesurée le long de  $\underline{x}_{i-1}$  ;

- $\theta_i$  : angle algébrique entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$ , mesuré autour de  $z_i$  ;
- $r_i$  : distance algébrique du point  $O_i$  à la perpendiculaire, mesurée le long de  $z_i$ .

Les paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés permettent de déterminer de manière unique la configuration des corps et donc la géométrie du bras manipulateur. Lorsque l'on modélise un bras manipulateur, il est souhaitable de représenter celui-ci dans une configuration particulière, pour visualiser plus facilement les paramètres et annuler certains paramètres constants. On obtient alors les paramètres constants  $\alpha_{i-1}$ ,  $a_{i-1}$ ,  $\theta_i$  et  $r_i$  et la configuration des liaisons décrite par les paramètres  $\theta_i$  et  $r_i$  variables. A la figure 2.5, on a explicité un exemple de paramétrage dans le cas d'un bras manipulateur de type 6R.



articulation $i$	1	2	3	4	5	6
$\sigma_i$	0	0	0	0	0	0
$\alpha_{i-1}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$a_{i-1}$	0	0	$a_2$	0	0	0
$\theta_i$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
$r_i$	0	0	0	$r_4$	0	0

FIG. 2.5 – Repérage et paramétrage d'un bras manipulateur de type 6R selon la méthode des paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés

## 2.3 Relations géométriques

Conformément au paramétrage de Denavit Hartenberg modifié, la matrice de rotation entre les corps  $C_{i-1}$  et  $C_i$  est donc :

$$T_{i-1, i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(\underline{x}_{i-1}, \alpha_{i-1})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translation de } a_{i-1}\underline{x}_{i-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(\underline{z}_i, \theta_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translation de } r_i\underline{z}_i}$$

soit :

$$T_{i-1, i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \cos \alpha_{i-1} \sin \theta_i & \cos \alpha_{i-1} \cos \theta_i & -\sin \alpha_{i-1} & -r_i \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \alpha_{i-1} \sin \theta_i & \sin \alpha_{i-1} \cos \theta_i & \cos \alpha_{i-1} & r_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

qui prend la forme :

$$T_{i-1, i} = \begin{pmatrix} R_{i-1, i} & p_{i-1, i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $R_{i-1, i}$  représente la rotation entre les repères  $\mathcal{R}_{i-1}$  et  $\mathcal{R}_i$  et  $p_{i-1, i}$  la translation entre ces mêmes repères.

# Chapitre 3

## Modélisation des bras manipulateurs

### 3.1 Configuration et situation d'un bras manipulateur

De manière classique, la *configuration* d'un système mécanique est connue quand la position de tous ses points dans  $\mathcal{R}_0$  est connue [Neimark 72]. Pour un bras manipulateur, elle est définie par un vecteur  $q$  de  $n$  coordonnées indépendantes appelées *coordonnées généralisées*. La configuration est alors naturellement définie sur un espace  $\mathcal{N}$  dont la dimension  $n$  est appelée *indice de mobilité*.  $\mathcal{N}$  est appelé *espace des configurations*. Les coordonnées généralisées correspondent aux grandeurs caractéristiques des différentes articulations : angles de rotation pour les liaisons rotoïdes, translations pour les liaisons prismatiques. On note  $q = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)^T$ .

La *situation*  $x$  de l'OT du bras manipulateur est alors définie par  $m$  coordonnées indépendantes dites *coordonnées opérationnelles*, qui donnent la position et l'orientation de l'OT dans  $\mathcal{R}_0$ . On définira généralement la situation en fonction de la tâche à accomplir : par exemple on pourra ne considérer que la position de l'OT et non plus son orientation. Dans tous les cas, la situation de l'OT est définie sur un espace  $\mathcal{M}$ , de dimension  $m \leq 6$ , appelé *espace opérationnel* [Khatib 86]. On note  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)^T$ . Le choix le plus commun pour les paramètres de position est celui des coordonnées cartésiennes. L'expression de l'orientation de l'OT dépend du choix des paramètres angulaires (voir section 1.2.7).

### 3.2 Modèle géométrique direct

#### 3.2.1 Définition

Le *modèle géométrique direct* (MGD) d'un bras manipulateur exprime la situation de son OT en fonction de sa configuration<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ q &\longmapsto x = f(q). \end{aligned} \tag{3.1}$$

---

<sup>1</sup>Autrement dit ses coordonnées opérationnelles en fonction de ses coordonnées généralisées.

### 3.2.2 Calcul

Le calcul du MGD consiste donc à exprimer la position du point  $O_{n+1}$  et l'orientation du repère  $\mathcal{R}_n$  lié à l'OT, en fonction de sa configuration. Il faut pour cela multiplier les matrices de passage homogènes successives reliant le repère  $\mathcal{R}_0$  lié au bâti au repère  $\mathcal{R}_n$  lié à l'OT :

$$T_{0,n}(q) = T_{0,1}(q_1) T_{1,2}(q_2) \dots T_{n-1,n}(q_n). \quad (3.2)$$

La matrice :

$$T_{0,n} = \begin{pmatrix} R_{0,n} & p_{0,n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

permet donc de connaître l'orientation de l'OT dans le repère de base et la position  $p_{0,n} = (p_x \ p_y \ p_z)^T$  du point  $O_n$ . Comme précédemment, on note :

$$R_{0,n} = \begin{pmatrix} x_x & y_x & z_x \\ x_y & y_y & z_y \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix}$$

et l'on rappelle qu'il suffit de connaître les première et troisième colonne de cette matrice pour définir de manière unique l'orientation du repère terminal. La position  $(x_1 \ x_2 \ x_3)^T$  du point  $O_{n+1}$  se déduit alors facilement, compte tenu des coordonnées  $(a_n \ 0 \ r_{n+1})^T$  de  $O_{n+1}$  dans  $\mathcal{R}_n$  :

$$\begin{aligned} x_1 &= p_x + a_n x_x + r_{n+1} z_x, \\ x_2 &= p_y + a_n x_y + r_{n+1} z_y, \\ x_3 &= p_z + a_n x_z + r_{n+1} z_z. \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.2.3 Règles pratiques

Les règles précédentes permettent de programmer aisément le calcul numérique du MGD. Le calcul analytique permet de diminuer de manière conséquente le nombre d'opérations. Pour cela la connaissance de certaines règles et propriétés permet de simplifier le calcul :

- les notations étant généralement lourdes, on adopte un certain nombre de conventions. On note, pour  $i, j, \dots$  compris entre 1 et  $n$  :

$$\begin{aligned} S_i &= \sin q_i \\ C_i &= \cos q_i \\ S_{i+j} &= \sin (q_i + q_j) \\ C_{i+j} &= \cos (q_i + q_j) \\ &\dots \end{aligned}$$

Par ailleurs à chaque nouvelle opération effectuée on définit une variable intermédiaire qui permet de n'effectuer qu'une fois un produit ou une addition survenant à de nombreuses reprises ;

- si l'on mène le calcul en effectuant le produit (3.2) à rebours (de droite à gauche) on peut s'abstenir de calculer la seconde colonne des différentes matrices. En effet, si l'on considère le produit de deux matrices de passage homogènes  $A$  et  $B$ , avec  $B$  possédant une seconde colonne indéterminée donne :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & * & b_{13} & 0 \\ b_{21} & * & b_{23} & 0 \\ b_{31} & * & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & * & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & * & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} & 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & * & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- si deux transformations se composent aisément on effectue tout d'abord leur produit : c'est le cas en particulier de la transformation due à deux rotations successives d'axes parallèles. Par exemple si l'on considère deux rotations pures successives de  $-q_1$  et  $-q_2$  autour d'un même axe  $\underline{y}_1 = \underline{y}_2$  :

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1+2} & 0 & -S_{1+2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_{1+2} & 0 & C_{1+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.2.4 Exemple

On traite ici le cas du bras manipulateur de type  $6R$  dont le paramétrage a été établi précédemment à la figure 2.5 page 16. On calcule tout d'abord les matrices de passage homogènes successives. D'après ( 2.1 page 17), on obtient :

$$\begin{aligned} T_{0,1} &= \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & T_{1,2} &= \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T_{2,3} &= \begin{pmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & T_{3,4} &= \begin{pmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -r_4 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T_{4,5} &= \begin{pmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_5 & -C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & T_{5,6} &= \begin{pmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La multiplication des matrices, selon les règles précédemment énoncées fait apparaître les variables auxiliaires suivantes :

$$\begin{aligned}
D_1 &= a_2 C_2 \\
D_2 &= a_2 S_2 \\
D_3 &= C_5 C_6 \\
D_4 &= -S_5 C_6 \\
D_5 &= C_4 D_3 - S_4 S_6 \\
D_6 &= C_4 S_5 \\
D_7 &= S_4 D_3 + C_4 S_6 \\
D_8 &= S_4 S_5 \\
D_9 &= C_{2+3} D_5 + S_{2+3} D_4 \\
D_{10} &= C_{2+3} D_6 + S_{2+3} C_5 \\
D_{11} &= r_4 S_{2+3} + D_1 \\
p_x &= C_1 D_{11} \\
p_y &= S_1 D_{11} \\
p_z &= -r_4 C_{2+3} + D_2 \\
x_x &= C_1 D_9 + S_1 D_7 \\
x_y &= S_1 D_9 - C_1 D_7 \\
x_z &= S_{2+3} D_5 - C_{2+3} D_4 \\
z_x &= C_1 D_{10} + S_1 D_8 \\
z_y &= S_1 D_{10} - C_1 D_8 \\
z_z &= S_{2+3} D_6 - C_{2+3} C_5 \\
y_x &= z_y x_z - z_z x_y \\
y_z &= z_x x_y - z_y x_x \\
x_1 &= p_x + r_7 z_x \\
x_2 &= p_y + r_7 z_y \\
x_3 &= p_z + r_7 z_z
\end{aligned}$$

La situation est alors donnée par :

– position dans  $R_0$  :

$$\begin{aligned}
x_1 &= p_x + r_7 z_x \\
x_2 &= p_y + r_7 z_y \\
x_3 &= p_z + r_7 z_z
\end{aligned}$$

– orientation dans  $R_0$ , avec les cosinus directeurs incomplets :

$$\begin{aligned}
x_4 &= x_x \\
x_5 &= x_y \\
x_6 &= x_z \\
x_7 &= z_x \\
x_8 &= z_y \\
x_9 &= z_z
\end{aligned}$$

– orientation dans  $R_0$ , avec les angles d'Euler :



- si  $z_z \neq \pm 1$  :

$$\begin{aligned} x_4 = \psi &= \text{atan2}(x_z, -y_z) \\ x_5 = \theta &= \text{acos } z_z \\ x_6 = \varphi &= \text{atan2}(x_z, z_y) \end{aligned}$$

- si  $z_z = 1$  :

$$\begin{aligned} x_5 &= \pi(1 - z_z)/2 \\ x_6 + z_z x_6 &= \text{atan2}(y_x, x_x) \end{aligned}$$

### 3.3 Modèle géométrique inverse

#### 3.3.1 Définition

Le *modèle géométrique inverse* (MGI) d'un bras manipulateur permet d'obtenir la ou les configurations correspondant à une situation de l'OT donnée. Un MGI est donc tel que :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{N} \\ x &\longmapsto q = f^{-1}(x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

La résolubilité du MGI, c'est-à-dire l'existence d'un nombre fini de solutions est fondamentale en matière de conception. Supposons que la situation  $x$  d'un bras manipulateur à  $n$  liaisons soit exprimée par un nombre  $m$  minimal de paramètres (voir section 1.2.7). Supposons par ailleurs que  $x$  soit une situation accessible par le bras manipulateur, c'est-à-dire que la situation appartient à l'*espace de travail*<sup>2</sup>. Alors (dans la majorité des cas) :

- si  $n < m$ , il n'existe pas de solution au MGI ;
- si  $n = m$ , il existe un nombre fini de solutions en dehors de certaines configurations, appelées *configurations singulières* ;
- si  $n > m$ , il existe une infinité de solutions.

On sait que dans les cas où  $n < 6$  les bras manipulateurs sont tous *solubles*, c'est-à-dire qu'il existe une solution connue au MGI. C'est aussi le cas de la plupart des structures à six liaisons, notamment celles possédant un *poignet sphérique* (trois dernières liaisons rotoïdes concourantes). Enfin, seul le calcul du MGI permet de connaître le nombre de solutions.

#### 3.3.2 Calcul

Il n'existe pas de méthode analytique systématique pour calculer le MGI. Le mieux est de reprendre les équations du MGD, préalablement calculé et de mener le calcul à l'envers. Le calcul se fait alors au cas par cas. Il est généralement aisé pour un bras manipulateur à moins de six axes, comme les bras manipulateur de type SCARA. Dans

<sup>2</sup>Il n'est pas toujours facile de savoir si c'est le cas.

le cas où  $n = 6$ , l'existence d'un poignet sphérique permet de débiter la résolution par l'inversion du système 3.3, soit :

$$\begin{aligned} p_x &= x_1 - a_n x_x - r_{n+1} z_x, \\ p_y &= x_2 - a_n x_y - r_{n+1} z_y, \\ p_z &= x_3 - a_n x_z - r_{n+1} z_z. \end{aligned}$$

On résout ensuite le système d'équations non-linéaires que constitue le MGD, pour exprimer les  $q_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$  en fonction de  $p_x, p_y, p_z$  et des cosinus directeurs.

### 3.3.3 Exemple : voir TD

## 3.4 Modèle cinématique direct

### 3.4.1 Définition

Le *modèle cinématique direct* (MCD) du bras manipulateur donne la relation entre les *vitesses opérationnelles*  $\dot{x}$  et les *vitesses généralisées*  $\dot{q}$  du bras manipulateur :

$$\dot{x} = J\dot{q}, \quad (3.5)$$

où  $J = J(q)$  est la *matrice jacobienne* de la fonction  $f$ , de dimension  $m \times n$  :

$$\begin{aligned} J : T_q \mathcal{N} &\longrightarrow T_x \mathcal{M} \\ \dot{q} &\longmapsto \dot{x} = J\dot{q}, \text{ où } J = \frac{\partial f}{\partial q}. \end{aligned}$$

La matrice jacobienne représente l'application linéaire  $df$  entre les espaces  $T_q \mathcal{N}$  et  $T_x \mathcal{M}$ , respectivement tangents à  $\mathcal{N}$  en  $q$  et à  $\mathcal{M}$  en  $x = f(q)$ .

On peut alternativement définir le *modèle différentiel direct* (MDD) qui donne l'accroissement infinitésimal  $dx$  de la situation en fonction d'un accroissement  $dq$  de la configuration :

$$dx = Jdq.$$

### 3.4.2 Calcul

Le calcul du MCD, dans le cadre générique, ne sera pas vu dans ce cours. On remarquera simplement que pour des structures simples le MCD peut être obtenu par simple dérivation du MGD. Ceci n'est évidemment plus valable pour des structures possédant plus de quatre liaisons.

### 3.4.3 Intérêt et exemple : voir TP (si le temps le permet)

# Annexe A

## Modélisation d'un bras manipulateur de type SCARA

### A.1 Robot de type SCARA : présentation

On désigne communément sous l'appellation de *robots de type SCARA* des robots à quatre axes dont la chaîne cinématique est  $RRPR$ . La figure A.1 représente deux modèles industriels de robots de type SCARA. Le second de ces robots, le Samsung RSM-5, sera l'objet de notre étude.



(a) Robot EPSON EL-653M



(b) Robot Samsung RSM-5

FIG. A.1 – Exemples de robots de type SCARA

A cause de leur cinématique, ces robots sont bien adaptés à tous les travaux de manipulation de palettes, de boîtes ou de cartouches, ou plus généralement d'objets devant être saisis et déplacés soit parallèlement, soit perpendiculairement à l'horizontale. On les rencontre notamment sur des chaînes de production (voir figure A.2).

## A.2 Robot Samsung RSM-5 : modélisation

Les caractéristiques principales du robot Samsung RSM-5 sont données à la figure A.3. Le schéma A.3(a) permet notamment de comprendre la cinématique de ce robot.

1. On rappelle que le robot est de type  $RRPR$ , les deux dernières articulations concernant la montée–descente et la rotation de l’organe terminal autour de son axe. Dessiner le schéma cinématique de ce robot.

### A.2.1 Géométrie du robot

#### Espace de travail

On s’intéresse tout d’abord à l’espace de travail du robot. En l’absence d’obstacles particuliers, le premier axe vertical, les butées articulaires du robot et bien évidemment la longueur des différents axes constituent les seules limitations de l’espace de travail du robot.

1. Relever les valeurs des butées articulaires du robot.
2. Le robot étant symétrique, ses butées ont été placées en respectant cette symétrie. Représenter en vue de dessus (et en grand) les positions limites du robot, lorsque celui-ci est en butée sur les articulations 1 et 2. Il est conseillé de respecter une échelle cohérente.
3. Sur cette même figure, dessiner l’enveloppe de l’espace de travail, dans un plan horizontal donné (les articulations 3 et 4 ne sont pas actionnées). Cela se fera aisément à l’aide d’un compas et d’un rapporteur (à défaut, essayer d’être réaliste).
4. Donner les points particuliers de cette enveloppe.
5. Quelle est la dimension de l’espace opérationnel du robot ? Toutes les articulations influent-elles de manière identique sur la position de l’organe terminal ? D’après ces remarques, représenter sur un schéma en perspective l’allure du volume de travail du robot, pour une orientation quelconque de son organe terminal.
6. Pour éviter la collision de l’organe terminal avec le premier corps vertical, l’organe terminal ne peut s’approcher à moins de  $155\text{ mm}$  cet de l’axe de ce corps. Vérifier que cette condition est remplie. On se remémorera pour cela l’antique théorème d’Al Kashi.

*On souhaite maintenant établir le modèle géométrique direct du robot.*

#### Paramétrage

1. Quelle précaution concernant la configuration du robot est préconisée dans le cours pour placer les repères selon la convention de Denavit-Hartenberg ? Si nécessaire refaire un schéma cinématique du robot dans une configuration adaptée.

2. Placer les repères  $\mathcal{R}_0$  à  $\mathcal{R}_5$  sur le schéma, en respectant les conventions de paramétrage vues en cours (paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés).
3. Rassembler dans un tableau les paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés :  $a_{i-1}$ ,  $\alpha_{i-1}$ ,  $r_i$ ,  $\theta_i$ , dont on rappellera brièvement la définition. On ajoutera à ce tableau une ligne donnant la valeur des paramètres de configuration, notés  $q_i$ , dans la configuration du schéma cinématique.
4. Relever les valeurs numériques de ces paramètres. On continuera néanmoins les calculs en conservant les notations symboliques. Les valeurs numériques seront utilisés à des fins de vérification.

### Modèle géométrique direct

1. Rappeler la définition du modèle géométrique direct. On notera  $q$  la configuration du robot et  $x$  sa situation. Quelle sont les dimensions respectives de  $q$  et  $x$ ? Quel est le degré de liberté de l'organe terminal du robot?
2. Rappeler la formulation générale de la matrice de passage  $T_{i-1, i}$  d'un repère  $\mathcal{R}_{i-1}$  à un repère  $\mathcal{R}_i$ , dans le cas où l'on respecte la convention des paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés.
3. Calculer les matrices de passage successives du robot  $T_{i-1, i}$ , pour  $i = 0, 1, \dots, 5$ . On notera  $C_i = \cos q_i$ ,  $S_i = \sin q_i$ ,  $C_{i+j} = \cos q_{i+j}$  et  $S_{i+j} = \sin q_{i+j}$ , ...
4. Multiplier les matrices de passage entre elles (dans le bon ordre) pour obtenir le modèle géométrique direct du robot. On prendra là encore soin de respecter les recommandations du cours concernant la méthode de calcul. En particulier, on introduira des variables intermédiaires notées  $D_1, D_2, \dots$ , à chaque nouvelle addition ou multiplication entre variables déjà définies.
5. Vérifier le modèle obtenu dans au moins deux configurations : la configuration du schéma cinématique et une configuration plus quelconque, par exemple correspondant à un des points particuliers relevés sur l'enveloppe de l'espace de travail.
6. Donner l'orientation de l'organe terminal exprimée par les angles d'Euler. Est-ce la représentation de l'orientation de l'organe terminal adaptée au robot étudié? Proposer une alternative.

### Modèle géométrique inverse

1. Rappeler la définition du modèle géométrique inverse. D'après la première question de la section A.2.1, que peut-on dire sur le nombre de solutions admises par ce modèle?
2. Calculer le modèle géométrique inverse du robot.

### Modèle cinématique direct

1. Rappeler la définition du modèle cinématique direct du robot et de sa matrice jacobienne, notée  $J(q)$ .

2. Si l'on représente l'orientation de l'organe terminal du robot par l'angle de lacet  $\alpha = x_4$ , on a :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_z \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}.$$

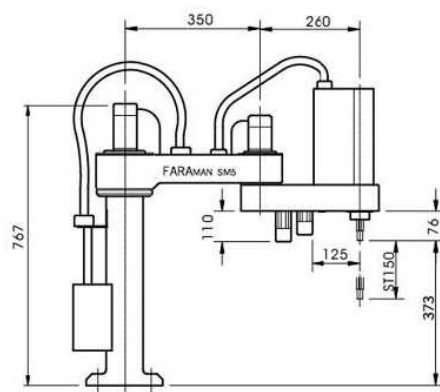
Calculer la matrice jacobienne  $J(q)$  en dérivant les équations du modèle géométrique direct.

3. Le rang de la matrice jacobienne, c'est-à-dire le nombre maximum de lignes ou de colonnes indépendantes, donne le degré de liberté de l'organe terminal. En effet, celui-ci correspond à la valeur maximale du rang de  $J(q)$ , lorsque  $q$  balaie l'espace des configurations. Pour le robot étudié,  $J(q)$  est de dimension  $4 \times 4$  et de rang maximum égal à 4. On en déduit que le rang de  $J(q)$  n'est plus maximal lorsque son déterminant s'annule.

Calculer l'expression du déterminant de  $J(q)$ . Pour quelles configurations ce déterminant s'annule-t-il (on appelle ces valeurs les *configurations singulières* du robot) ? Commenter.



FIG. A.2 – Exemples d'utilisation du robot Samsung RSM-5



(a) Schéma et dimensions

Specifications		
Item	Specifications	
Degrees of Freedom	4 Axis	
WORK ENVELOPE	1 Axis(° /mm)	240° /350
	2 Axis(° /mm)	290° /260
	Z Axis	150mm(100,200)
	R Axis	±180°
CYCLE TIME	Coarse	0.7 sec
	Fine	1.2 sec
	Z AXIS	600mm/sec
Max. Speed	R AXIS	1020° /sec
	1+2 AXIS	5.4m/sec
	PAYLOAD	2.5kgf
Specifications		
Item	Specifications	
REPEATABILITY	XYZ AXIS	±0.03mm
	R AXIS	±0.05°
Motor Specification	1 AXIS	400W
	2 AXIS	200W
	Z AXIS	50W (Max. 100W)
	R AXIS	50W (Max. 100W)
WEIGHT(BODY)	40kgf	
Position detection method	AC Servo Incremental type	
Utility	Air	-
	User I/C	-
CONTROLLER TYPE	SRC Series	

(b) Spécifications constructeur

FIG. A.3 – Caractéristiques du robot Samsung RSM-5

# Bibliographie

- [Craig 89] J. J. Craig. Introduction to robotics : Mechanics and control. Addison-Wesley, 1989.
- [Gorla 01] B. Gorla et M. Renaud. Modelling of robot manipulators. Control and applications. Communication personnelle, 2001.
- [Khalil 86] W. Khalil et J. Kleinfinger. *A New Geometric Notation for Open and Closed Loop Robots*. ICRA'86, pages 75–79, avril 1986.
- [Khalil 99] W. Khalil et E. Dombre. Modélisation, identification et commande des robots. Hermès, 1999.
- [Khatib 86] O. Khatib. *Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots*. International Journal of Robotic Research, vol. 5, no. 1, pages 90–98, 1986.
- [Murray 94] R. Murray, Z. Li et S. Sastry. A mathematical introduction to robotic manipulation. CRC Press, 1994.
- [Neimark 72] J. Neimark et N. Fufaev. Dynamics of nonholonomic systems, volume 33. Translations of Mathematical Monographs, 1972.
- [Paul 81] R. Paul. Robot manipulators : Mathematics, programming, and control. MIT press, Cambridge, Londres, Royaume-Uni, 1981.
- [Renaud 86] M. Renaud. *Comment définir l'orientation d'un corps ?* Rapport technique 86159, LAAS–CNRS, 1986.
- [Renaud 96] M. Renaud. *Calcul analytique itératif des modèles d'un robot manipulateur*. Rapport technique 86159, LAAS–CNRS, 1996.