

Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg

# Formation d'Ingénieurs en Partenariat

---

## Automatique

### Systèmes et asservissements à temps continu

---

Bernard BAYLE, année 2008–2009

Site du cours, archives, annales sur la page web de l'enseignant :  
<http://eavr.u-strasbg.fr/~bernard>

Ce document évolue grâce à votre concours.  
Pour l'améliorer, communiquez moi vos remarques ou corrections par mail :  
[bernard@eavr.u-strasbg.fr](mailto:bernard@eavr.u-strasbg.fr)

Bernard Bayle

# Table des matières


<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Systèmes à temps continu</b>	<b>3</b>
1.1 Propriétés des systèmes à temps continu	3
1.1.1 Linéarité	3
1.1.2 Invariance	3
1.1.3 Principe de causalité	4
1.1.4 Linéarité et invariance	4
1.2 Réponses des systèmes à temps continu	4
1.2.1 Formulation générale	4
1.2.2 Réponse impulsionnelle	5
1.2.3 Réponse indicielle	5
1.3 Représentation des systèmes à temps continu	6
1.3.1 Transformée de Laplace	6
1.3.2 Fonction de transfert	7
1.3.3 Réponse harmonique et diagrammes harmoniques	9
1.4 Systèmes à temps continu élémentaires	10
1.4.1 Systèmes du premier ordre	10
1.4.2 Systèmes du second ordre	16
1.5 Simplification de modèles	22
<b>2 Systèmes asservis à temps continu</b>	<b>25</b>
2.1 Notion de système asservi	25
2.1.1 A la douche	25
2.1.2 Cas du moteur à courant continu	26
2.2 Caractéristiques d'un système asservi	27
2.2.1 Schéma d'un système asservi	27
2.2.2 Fonction de transfert d'un système asservi	28
2.2.3 Comportement fréquentiel d'un système asservi	30
2.3 Stabilité	31
2.3.1 Définitions et premier critère de stabilité	31
2.3.2 Critère de Routh-Hurwitz	32
2.3.3 Lieu des racines	33
2.3.4 Marges de stabilité	36
2.4 Précision	37

2.4.1	Expression de l'erreur . . . . .	37
2.4.2	Précision statique et précision dynamique . . . . .	37
2.4.3	Expression générale de l'erreur . . . . .	38
2.4.4	Dualité stabilité-précision . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Commande des systèmes à temps continu</b>	<b>41</b>
3.1	Cahier des charges . . . . .	41
3.2	Correcteurs PID : introduction . . . . .	42
3.3	Adéquation correcteurs/systèmes à asservir . . . . .	43
3.3.1	Correcteur à avance de phase (et correcteur PD) . . . . .	44
3.3.2	Correcteur PI (et correcteur à retard de phase) . . . . .	45
3.4	Méthode du lieu des racines . . . . .	46
3.5	Méthodes harmoniques . . . . .	50
3.5.1	Correction PI . . . . .	50
3.5.2	Correction à avance de phase . . . . .	50
3.6	Méthode de réglage automatique . . . . .	53
3.6.1	Méthodes de Ziegler-Nichols . . . . .	53
3.6.2	Méthode du relais . . . . .	54
	<b>Annexes</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>Correspondance des termes en anglais</b>	<b>63</b>
<b>B</b>	<b>Transformée de Laplace</b>	<b>65</b>
B.1	Définition . . . . .	65
B.2	Propriétés . . . . .	66
B.3	Transformée inverse . . . . .	67
B.4	Table de transformées . . . . .	69
<b>C</b>	<b>Modélisation du moteur à courant continu</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>77</b>

# Introduction

Le mot *système* fait référence étymologiquement à un ensemble organisé. En Automatique, on désigne par *système* un procédé de nature quelconque qui évolue sous l'action de son *entrée*  $u$  ( $\rightarrow$ input<sup>1</sup>) et dont l'évolution est caractérisée par sa *sortie*  $y$  ( $\rightarrow$ output). Si ces deux grandeurs sont des fonctions d'une variable continue  $t$ , on parle de *système à temps continu*, d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$ .

On s'intéresse dans ce cours à une classe restreinte de systèmes réels à temps continu. Il s'agit *des systèmes mono-entrée mono-sortie linéaires invariants*, qui sont décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

 **Exemple : cas du moteur à courant continu** Un moteur à courant continu (MCC) est un dispositif électromécanique qui convertit une énergie électrique d'entrée en énergie mécanique. L'énergie électrique est apportée par un convertisseur de puissance qui alimente le bobinage disposé sur le rotor (induit) grâce à un dispositif adapté de balais et collecteur. Le bobinage rotorique est placé dans un champ magnétique, permanent ou non, dû au stator. Le courant circulant dans les spires de l'induit du moteur, des forces électriques lui sont appliquées et, grâce au dispositif balais/collecteur, ces forces s'additionnent pour participer à la rotation. On peut ainsi considérer le moteur comme un système dont l'entrée est la tension d'induit et la sortie la vitesse de rotation du rotor. La relation entrée-sortie du système est décrite par l'équation différentielle :

$$\omega(t) + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_{em}^2} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{LJ}{Rf + K_{em}^2} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = \frac{K_{em}}{Rf + K_{em}^2} u(t),$$

où  $R$ ,  $L$ ,  $J$ ,  $f$  et  $K_{em}$  sont des coefficients constants positifs représentant les caractéristiques électro-mécaniques du moteur : résistance et inductance d'induit, coefficient d'inertie de l'arbre moteur, coefficient de frottement visqueux de l'arbre et constante de couple du moteur.

Dans ce cours, on considérera plus généralement des systèmes dont le fonctionnement n'est pas linéaire mais dont on peut étudier une *approximation linéaire* autour d'un *point de fonctionnement*. L'objet de ce cours est d'étudier les techniques pratiques de commande des systèmes linéaires invariants à temps continu. L'accent sera mis sur la synthèse des correcteurs PID qui correspondent à la très grande majorité des dispositifs présents dans l'industrie à ce jour.

---

<sup>1</sup>Il est nécessaire, notamment pour utiliser certains logiciels de simulation, de connaître la version anglaise des différents termes. L'ensemble des termes anglais introduits dans ce cours, désignés la suite par le symbole  $\rightarrow$ , sont regroupés à l'annexe A page 63.



# Chapitre 1

## Systemes à temps continu

### 1.1 Propriétés des systèmes à temps continu

#### 1.1.1 Linéarité

**Définition 1.1** Soit  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  les réponses d'un système  $\Sigma$  excité séparément par les entrées  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ . Soit  $\alpha$  un réel quelconque. Le système est linéaire si sa sortie vaut  $\alpha y_1(t) + y_2(t)$  en réponse à l'entrée  $\alpha u_1(t) + u_2(t)$  (voir FIG. 1.1).

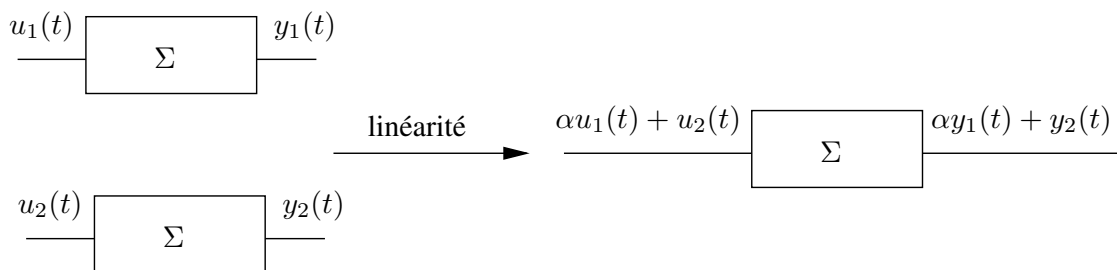


FIG. 1.1 – Linéarité d'un système

Un système linéaire répond donc aux *principes de superposition et de linéarité*.

#### 1.1.2 Invariance

**Définition 1.2** Un système est dit invariant si une même commande, appliquée à deux instants différents produit la même sortie aux instants considérés (voir FIG. 1.2).

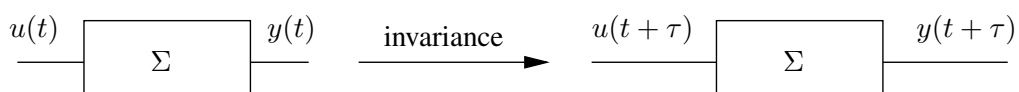


FIG. 1.2 – Invariance d'un système

### 1.1.3 Principe de causalité

**Définition 1.3** Un système d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  est dit causal si,  $\forall t < 0$ ,  $u(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$ .

Cela signifie que la réponse du système ne précède pas son excitation. Qualitativement, on retiendra que tout système physiquement réalisable est causal.

**Définition 1.4** Un signal  $f(t)$  à temps continu est causal si  $f(t) = 0, \forall t < 0$ .

On supposera désormais que tous les signaux et systèmes étudiés sont causaux.

### 1.1.4 Linéarité et invariance

Un système à temps continu à la fois *linéaire et invariant* ( $\rightarrow$ Linear Time Invariant, LTI en abrégé) est décrit par une *équation différentielle* linéaire à coefficients constants :

$$\boxed{\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}} \quad (1.1)$$

où :

- les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes réelles, telles que  $a_c, a_n, b_0$  et  $b_m$  soient non nuls ;
- $n, m$  sont des entiers positifs tels que  $m \leq n$  pour que le système soit causal ;  $n$  est l'*ordre du système* ;
- $c \leq n$  est un entier positif ou nul appelé *classe du système*.

La solution  $y(t)$  de cette équation est connue si  $n$  conditions initiales (CI) sont connues pour la sortie et  $m$  CI sont connues pour l'entrée.

## 1.2 Réponses des systèmes à temps continu

### 1.2.1 Formulation générale

**Théorème 1.1** La réponse d'un système linéaire invariant d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{y(t) = g(t) * u(t)}$$

où  $g(t)$  est appelée *réponse impulsionnelle du système* et où  $*$  désigne le *produit de convolution* défini par :

$$g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

Si le système et son entrée sont causaux, ce qui est notre hypothèse :

$$g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$



### 1.2.2 Réponse impulsionnelle

On appelle *réponse impulsionnelle* d'un système sa réponse à une *impulsion de Dirac*, qui est une distribution (fonction généralisée), définie de la manière suivante.

**Définition 1.5 (Impulsion de Dirac)** Soit  $f(t)$  une fonction continue en 0. Alors l'impulsion de Dirac est la distribution  $\delta(t)$  telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0).$$

### 1.2.3 Réponse indicielle

On appelle *réponse indicielle* (→ step response) d'un système sa réponse à un *échelon unité* :

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On notera que la réponse indicielle d'un système, généralement facile à obtenir expérimentalement, est souvent utilisée pour le caractériser. A la figure 1.3 on a recensé les principales caractéristiques qui permettent de décrire la réponse indicielle d'un système avec CI nulles.

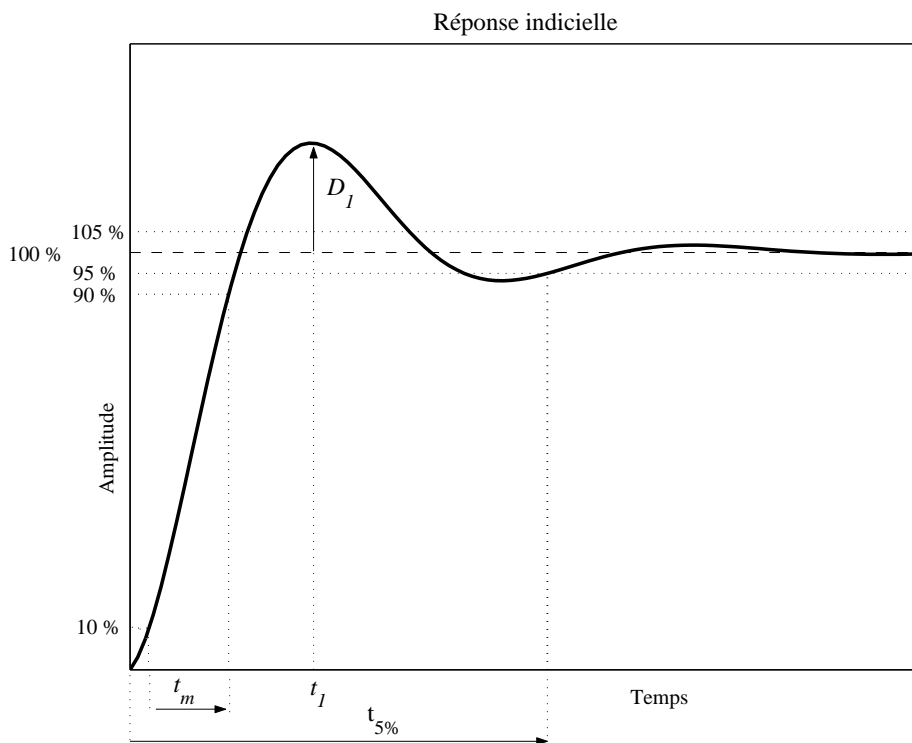


FIG. 1.3 – Caractéristiques de la réponse indicielle d'un système

On peut décrire cette réponse indicielle à l'aide d'un certain nombre d'éléments caractéristiques. Le *temps de réponse à n %*, noté  $t_{n\%}$ , correspond au temps nécessaire à la réponse indicielle pour atteindre sa *valeur finale* à  $\pm n\%$  près. On notera que la valeur de 5% est la plus communément retenue (du moins en France). Le *temps de montée*, noté  $t_m$ , désigne lui le temps que met la réponse indicielle pour passer de 10 à 90% de sa valeur finale. Dans le cas où apparaît un *dépassement*, c'est-à-dire si la réponse indicielle dépasse sa valeur finale, on repère le *dépassement maximal*  $D_1$  par rapport à la valeur finale et l'instant de ce dépassement, noté  $t_1$ . Le dépassement est souvent rapporté à la valeur finale ; on parle alors de dépassement pour cent, que l'on note  $D_1\%$ . Enfin, la pente à l'origine de la réponse indicielle peut compléter les informations précédentes. Temps de réponse se traduit en anglais par  $\rightarrow$ settling time, temps de montée par  $\rightarrow$ rise time et dépassement par  $\rightarrow$ overshoot.

Comme on le verra par la suite, notamment dans la section 1.4, la réponse indicielle donne des renseignements sur la nature même du système. Cela peut permettre d'en identifier un modèle lorsque la modélisation physique est imparfaite ou inconnue.


## 1.3 Représentation des systèmes à temps continu

### 1.3.1 Transformée de Laplace

La *transformée de Laplace*, qui a été vue en cours de Mathématiques, est très utile pour l'étude des systèmes à temps continu<sup>1</sup>. On rappelle que la transformée de Laplace d'un signal à temps continu  $f(t)$  est définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

L'intérêt cette transformée réside dans la possibilité de transformer les équations différentielles décrivant l'évolution dynamique du système en équations algébriques. Celles-ci sont plus faciles à manipuler et on peut prévoir l'allure des réponses temporelles sans les calculer explicitement.

 **Exemple : cas du moteur à courant continu** L'annexe C page 71 décrit en détail la modélisation d'un moteur à courant continu à excitation séparée. On considère que le moteur est commandé par sa tension d'induit (entrée du système) et que l'on s'intéresse à la vitesse de rotation de son rotor (sortie du système), comme expliqué dans l'introduction de ce cours. La dynamique du moteur est alors décrite par l'une ou l'autre des équations (C.9) ou (C.10), établies à l'annexe C page 71. La transformée de Laplace de ces équations, si l'on suppose les CI nulles, est facile à obtenir : la variable de Laplace  $s$  est simplement substituée à toute dérivation par rapport au temps dans l'équation différentielle. On obtient, d'après (C.10) :

$$\left(1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_{em}^2} s + \frac{LJ}{Rf + K_{em}^2} s^2\right) \Omega(s) = \frac{K_{em}}{Rf + K_{em}^2} U(s), \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Des éléments concernant les définitions, propriétés et le calcul de la transformée de Laplace sont proposés en annexe B page 65.

où  $\Omega(s)$  et  $U(s)$  représentent respectivement les transformées de Laplace de la vitesse de rotation du rotor et de la tension aux bornes de l'induit. Ceci peut aussi s'écrire, d'après (C.9) :

$$\left( s^2 + \frac{RJ + Lf}{LJ} s + \frac{Rf + K_{em}^2}{LJ} \right) \Omega(s) = \frac{K_{em}}{LJ} U(s).$$

On met ici en avant le terme de plus haut degré en  $s$ .

### 1.3.2 Fonction de transfert

Soit un système linéaire invariant d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$ . On a vu à la section 1.2 que la réponse du système peut s'écrire  $y(t) = g(t) * u(t)$  avec  $g(t)$  la réponse impulsionnelle du système. En appliquant la transformée de Laplace à cette équation on obtient  $Y(s) = G(s)U(s)$ . En variable de Laplace la relation entrée-sortie n'est donc plus un produit de convolution, mais un simple produit, ce qui rejoint les remarques faites au paragraphe précédent.

On appelle *fonction de transfert* du système la transformée de Laplace  $G(s)$  de la réponse impulsionnelle :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

qui est le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée, à CI nulles. Le terme de *transmittance*, synonyme de fonction de transfert est souvent utilisé.

Dans le cas des systèmes linéaires invariants *sans retard* la fonction de transfert prend la forme d'une fraction rationnelle :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=c}^n a_i s^i} \quad (1.3)$$

qui résulte de la transformation de l'équation différentielle (1.1). Les racines du numérateur  $N(s)$  de la fonction de transfert, au nombre de  $m$ , sont appelées les *zéros* du système. Les racines du dénominateur  $D(s)$ , au nombre de  $n$ , sont appelées les *pôles* du système. Tout comme la variable de Laplace  $s$ , les zéros et les pôles sont complexes, dans le cas général.

Si l'on développe l'équation (1.3), il vient :

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_c s^c + a_{c+1} s^{c+1} + \dots + a_n s^n},$$

qui s'écrit encore :

$$G(s) = \frac{K}{s^c} \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} s + \dots + \frac{b_m}{b_0} s^m}{1 + \frac{a_{c+1}}{a_c} s + \dots + \frac{a_n}{a_c} s^{n-c}},$$

où  $K = \frac{b_0}{a_c}$  est le *gain statique* du système, dont nous verrons l'intérêt en étudiant la précision des systèmes asservis, à la section 2.4.

Si, au contraire, on factorise le numérateur  $N(s)$  et le dénominateur  $D(s)$  de la fonction de transfert (1.3), on obtient :

$$G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (1.4)$$

où les  $z_i$  et les  $p_i$  sont respectivement les zéros et les pôles du système. Le coefficient  $\frac{b_m}{a_n}$  est parfois appelé *coefficient de gain*. On aura soin de ne pas le confondre avec le gain statique défini précédemment. Cette autre forme de la fonction de transfert est utile, notamment pour étudier la stabilité du système, comme nous le verrons à la section 2.3.

✍ **Exemple : cas du moteur à courant continu** D'après l'équation (1.2), la fonction de transfert du moteur à courant continu s'écrit :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_{em}}{LJ}}{s^2 + \frac{RJ+Lf}{LJ}s + \frac{Rf+K_{em}^2}{LJ}}. \quad (1.5)$$

donc :

$$N(s) = \frac{K_{em}}{LJ}$$

$$\text{et } D(s) = s^2 + \frac{RJ + Lf}{LJ}s + \frac{Rf + K_{em}^2}{LJ}.$$

Le système ne possède pas de zéro car  $N(s)$  ne s'annule jamais. En résolvant l'équation :  $D(s) = 0$  on détermine les pôles du système. L'expression analytique de ces pôles n'est pas simple si l'on ne fait pas d'hypothèse sur les différentes grandeurs caractéristiques du moteur. On montre (voir annexe C page 71) que l'on peut obtenir la fonction de transfert sous la forme factorisée (1.4) :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{\tau_{el}\tau_{em}}}{\left(s + \frac{1}{\tau_{el}}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)},$$

avec :

$$\tau_{el} = \frac{L}{R},$$

$$\tau_{em} = \frac{RJ}{Rf + K_{em}^2},$$

$$\text{et } K = \frac{K_{em}}{Rf + K_{em}^2}.$$

Le système possède donc deux pôles :

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_{el}}$$

$$\text{et } p_2 = -\frac{1}{\tau_{em}}.$$

### Exercice

On considère un moteur à courant continu Maxon F2260 bobinage 885 (voir documentation C.1 page 75).

1. Déterminer les caractéristiques du moteur nécessaires pour établir l'expression numérique du modèle du moteur sous la forme (1.5).
2. Etablir l'expression numérique de la fonction de transfert définie par l'équation (1.5).

### 1.3.3 Réponse harmonique et diagrammes harmoniques

On se place dans le cas d'un système linéaire invariant de fonction de transfert  $G(s)$ , en régime permanent sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . On appelle *réponse harmonique* du système la fonction  $G(s = j\omega)$ . On montre que la réponse du système à une entrée sinusoïdale  $u(t) = A \sin \omega t$  est :

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}\{G(j\omega)\}).$$

La connaissance de  $G(j\omega)$  permet donc de déduire le comportement fréquentiel du système. Cela s'applique au-delà du simple cas des signaux sinusoïdaux puisque tout signal périodique est décomposable en série de Fourier. L'*analyse harmonique*, c'est-à-dire l'étude de la fonction  $G(j\omega)$ , donne donc des informations sur le comportement du système excité par des signaux d'entrée périodiques quelconques.

La réponse harmonique étant un nombre complexe, fonction de la variable complexe  $j\omega$ , on l'illustre le plus souvent par des diagrammes mettant en correspondance le module et l'argument de  $G(j\omega)$ .

#### Diagramme de Bode

Le *diagramme de Bode* est constitué de deux courbes. La première donne le module en décibels ( $dB$ ) :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

et la seconde l'argument, généralement exprimée en degrés ( $deg$ ) :

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}\{G(j\omega)\}$$

quand la pulsation  $\omega$  varie. On utilise traditionnellement les termes de *gain* et de *phase*, plutôt que les termes module et argument.

L'intérêt du diagramme de Bode provient du fait que le module d'un produit de nombres complexes est le produit de leurs modules. Par conséquent le module en  $dB$  d'un produit de nombres complexes est la somme de leurs modules en  $dB$ . L'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments. On peut donc tracer aisément un diagramme de Bode de tout système à l'aide de la forme factorisée de sa réponse harmonique en sous-systèmes d'ordre un et deux. Par ailleurs l'échelle en abscisse du diagramme de Bode est logarithmique, pour mettre en évidence des propriétés caractéristiques.

### Diagramme de Nyquist

Le *diagramme de Nyquist* est le lieu de  $G(j\omega)$  dans le plan complexe, lorsque  $\omega$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Ce diagramme est donc orienté selon les  $\omega$  croissants. En général on choisit l'échelle du diagramme de Nyquist de sorte que le point complexe d'abscisse  $-1$ , dit *point critique* apparaisse et puisse être situé par rapport au lieu de  $G(j\omega)$ .

### Diagramme de Black

Le *diagramme de Black* est le lieu orienté des points de coordonnées  $(\varphi(\omega), G_{dB}(\omega))$  lorsque  $\omega$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . On tache aussi de faire apparaître le point critique de coordonnées  $(-180, 0)$  sur ce lieu.

## 1.4 Systèmes à temps continu élémentaires

Une bonne connaissance des *systèmes du premier et du second ordre* est fondamentale en Automatique. On peut en effet fréquemment assimiler un système réel à un système équivalent d'ordre un ou deux, en choisissant une plage de fonctionnement et des hypothèses de modélisation raisonnables. Ceci est intéressant car ces systèmes sont les seuls dont les propriétés soient à la fois bien connues et en nombre limité.

### 1.4.1 Systèmes du premier ordre

Un système linéaire invariant à temps continu d'ordre un est décrit par une équation différentielle d'ordre un à coefficients constants reliant son entrée  $u(t)$  et sa sortie  $y(t)$  :

$$\boxed{y(t) + \tau \frac{dy(t)}{dt} = Ku(t)} \quad (1.6)$$

où  $\tau$  et  $K$  sont des constantes réelles non nulles ;  $\tau$  est la *constante de temps* du système et  $K$  son gain statique.

#### Réponse indicielle

Traditionnellement, on caractérise le comportement temporel du système par sa réponse indicielle. La solution de l'équation (1.6) pour  $u(t) = \mathcal{U}(t)$  s'écrit :

$$y(t) = \alpha + \beta e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.7)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux constantes réelles dépendant des CI. A l'instant  $t = 0$ , l'équation (1.7) donne :

$$y(0) = \alpha + \beta. \quad (1.8)$$

On n'étudie que le cas où  $\tau > 0$ , de sorte que le système se stabilise pour  $t$  tendant vers l'infini<sup>2</sup>. Lorsque le système a atteint sa valeur finale  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ , ce que l'on peut

<sup>2</sup>Le cas  $\tau \leq 0$  décrivant une réponse tendant vers l'infini serait celui d'un système instable.

supposer vrai pour  $t$  tendant vers l'infini. Alors, d'après (1.6) et (1.7) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \alpha.$$

Il en résulte que  $\alpha = K$ , puis, en utilisant (1.8), que  $\beta = y(0) - K$ . Finalement :

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + y(0)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Cette réponse comporte :

- un terme constant : le gain statique  $K$ , qui représente le *régime permanent* de la sortie (→ steady state) ;
- une partie variable :  $(y(0) - K) e^{-\frac{t}{\tau}}$ , qui représente le *régime transitoire* (→ transient response).

**Exemple** A la figure 1.4, on a représenté la réponse d'un système du premier ordre de constante de temps  $\tau = 0,01$  s et de gain statique  $K = 10$ . Trois courbes sont représentées : la courbe en trait continu représente la réponse du système à CI nulles ; les courbes en pointillés représentent les réponses du système pour  $y(0) = 8$  et  $y(0) = 15$ .

Pour un système du premier ordre, les temps de réponse à 5 et 37% sont bien connus dans le cas de CI nulles (voir figure 1.5 page suivante). La sortie d'un système du premier ordre atteint en effet 63% de sa valeur finale au bout de  $\tau$  et 95% au bout de  $3\tau$ . La pente à l'origine de la réponse indicielle vaut quant à elle  $\frac{K}{\tau}$ .

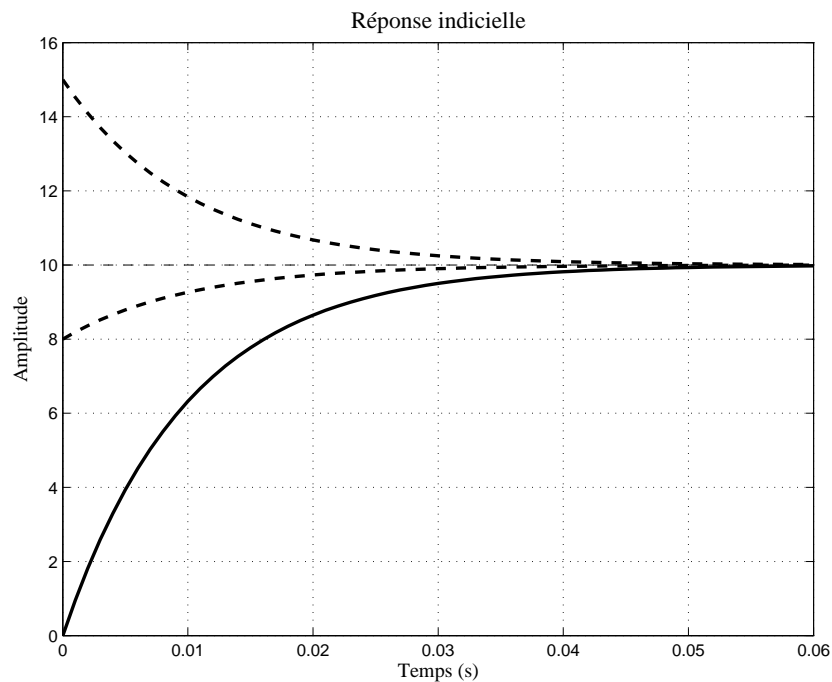


FIG. 1.4 – Réponse indicielle d'un système du premier ordre de constante de temps  $\tau = 0,01$  s et de gain statique  $K = 10$ , pour différentes CI

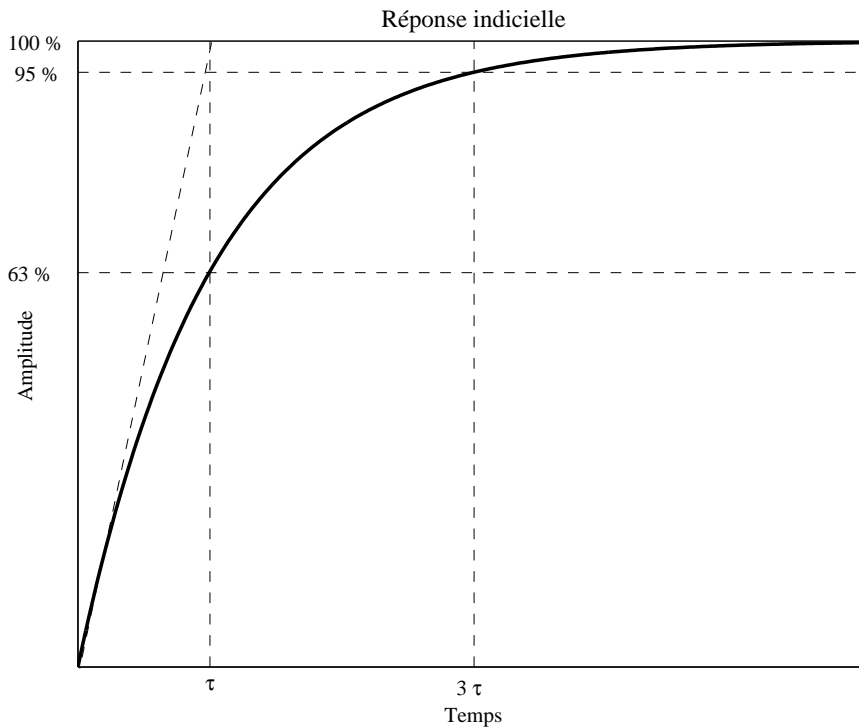


FIG. 1.5 – Caractéristiques de la réponse indicielle d'un système du premier ordre de constante de temps  $\tau$

On notera que si l'on avait choisi comme entrée un échelon non unitaire, la réponse serait multipliée par l'amplitude de l'échelon, en vertu de la linéarité du système. Les caractéristiques temporelles, elles, n'auraient pas évolué. Ainsi la valeur finale de la sortie aurait été multipliée par l'amplitude de l'échelon, alors que les temps de montée et de réponse n'auraient pas été modifiés. En cela, on peut considérer ces dernières caractéristiques comme intrinsèques au système, de la même manière que la constante de temps ou le gain statique.

### Réponse harmonique

La fonction de transfert d'un système du premier ordre, se déduit de (1.6) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \tau s}$$

La réponse harmonique associée est donc :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} \quad (1.9)$$

La description de la réponse harmonique d'un système se fait aisément en étudiant son *comportement asymptotique* en régime permanent sinusoïdal. Dans un second temps, on



complète cette étude par quelques valeurs permettant d'obtenir la réponse par interpolation. Le comportement asymptotique de la réponse harmonique (1.9) est résumé dans le tableau 1.1.

$\omega$	$G(j\omega)$ équivalent	gain	gain (dB)	phase (deg)
$\omega \ll \frac{1}{\tau}$ , soit $\omega\tau \ll 1$	$K$	$K$	$K_{dB} = 20 \log_{10} K$	0
$\frac{1}{\tau}$	$\frac{K}{1+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	$K_{dB} - 3$	-45
$\omega \gg \frac{1}{\tau}$ , soit $\omega\tau \gg 1$	$\frac{-jK}{\tau\omega}$	$\frac{K}{\tau\omega}$	$K_{dB} - 20 \log_{10} \tau - 20 \log_{10} \omega$	-90

TAB. 1.1 – Réponse harmonique d'un système du premier ordre

On remarque que pour les pulsations grandes devant  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ , la courbe du gain en dB suit une direction asymptotique qui est une droite de pente  $-20 \text{ dB/décade}$  dans le diagramme de Bode (voir figure 1.6 page suivante). A ces pulsations le gain diminue en effet de  $20 \text{ dB}$  chaque fois que la pulsation est multipliée par 10. La pulsation  $\omega_c$  est appelée *pulsation de coupure*. Pour un système du premier ordre elle correspond à une atténuation du gain de  $3 \text{ dB}$  par rapport au gain aux faibles pulsations et à un déphasage de  $-45 \text{ deg}$ . La *bande passante* ( $\rightarrow$  bandwidth) du système est donnée par la fréquence  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  associée à cette pulsation de coupure.

☞ **Exemple** Les diagrammes harmoniques du système du premier ordre de constante de temps  $\tau = 0,01 \text{ s}$  et de gain statique  $K = 10$  sont donnés aux figures 1.6 et 1.7. On note que la construction du diagramme de Nyquist est très incomplète si l'on ne s'intéresse qu'aux propriétés asymptotiques de la réponse harmonique. Il faut pour construire le diagramme de Nyquist remarquer que :

$$G(j\omega) = K \frac{1 - j\tau\omega}{1 - (\tau\omega)^2}$$

est l'équation paramétrique d'un demi-cercle dans le plan complexe.

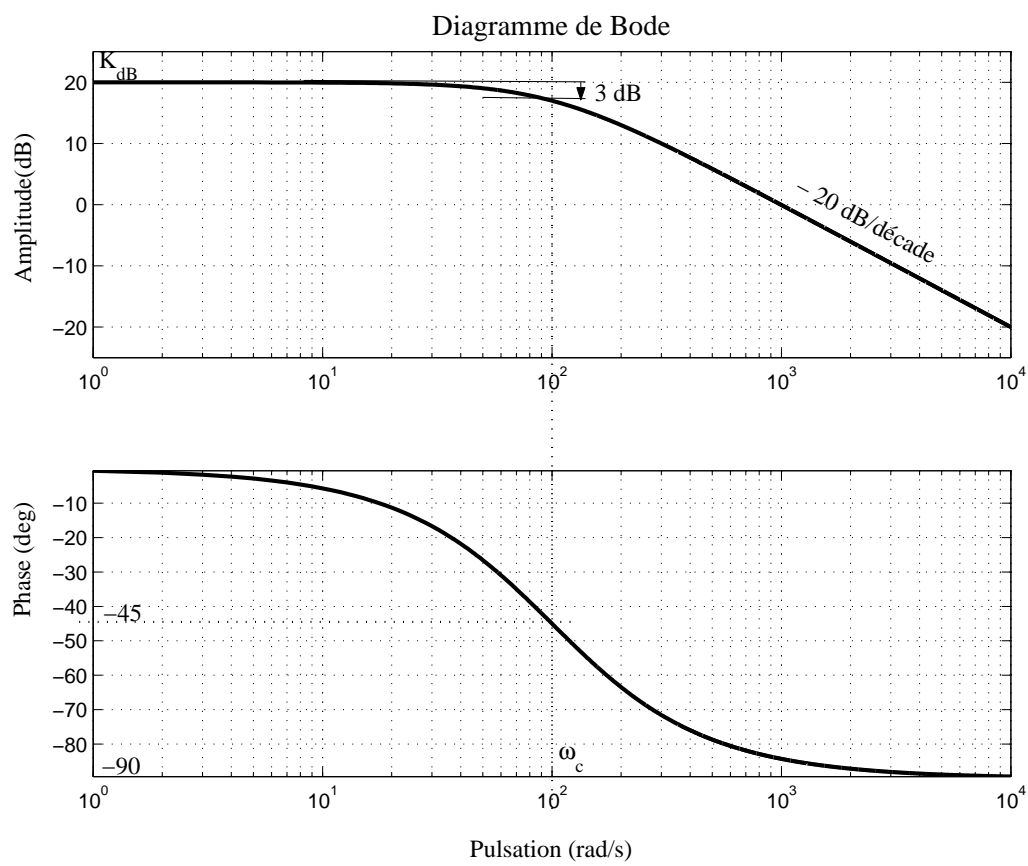


FIG. 1.6 – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre de constante de temps  $\tau = 0,01$  s et de gain statique  $K = 10$

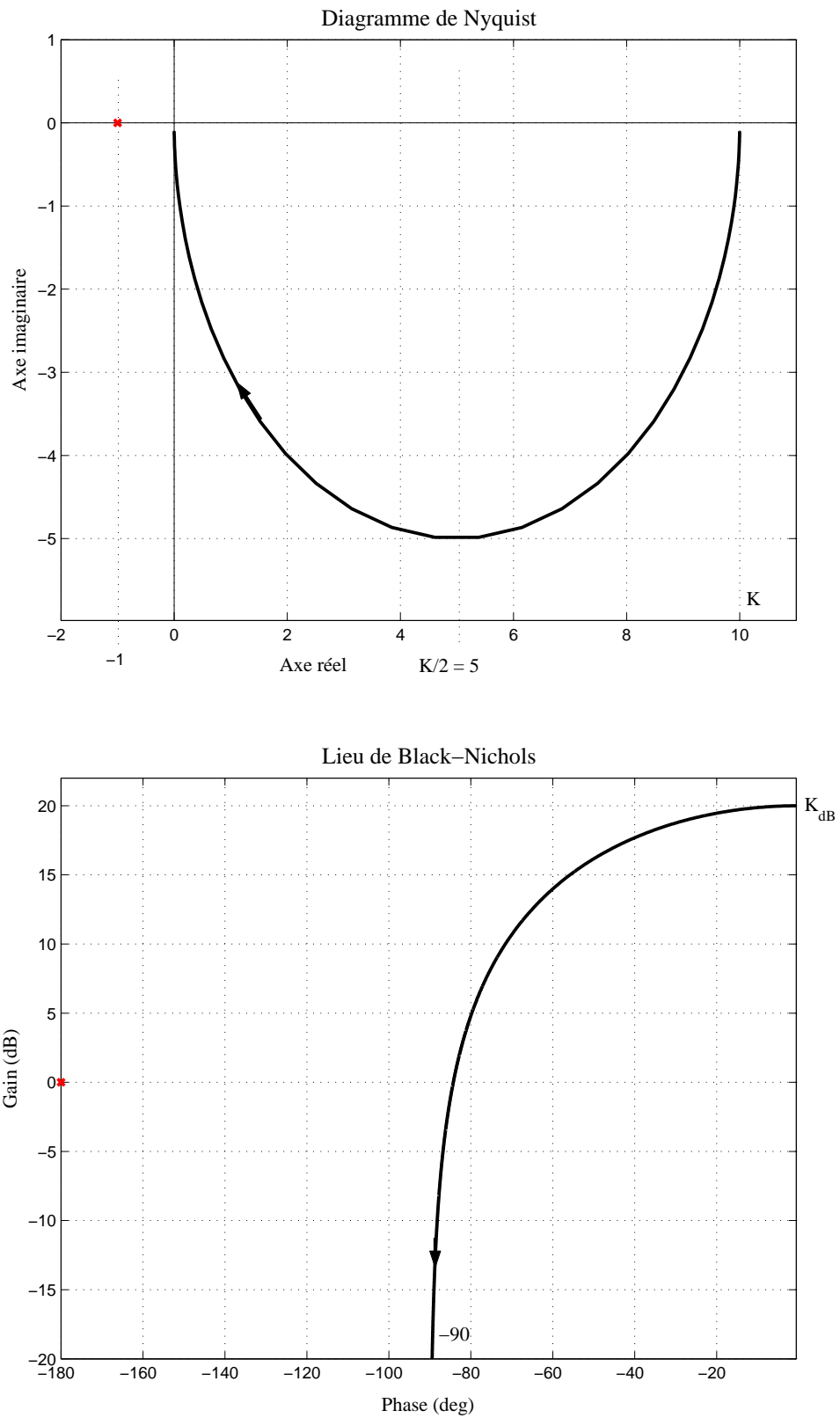


FIG. 1.7 – Diagramme de Nyquist et de Black d'un système du premier ordre de constante de temps  $\tau = 0,01$  s et de gain statique  $K = 10$

### 1.4.2 Systèmes du second ordre

Un système linéaire invariant à temps continu d'ordre deux est décrit par une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants reliant son entrée  $u(t)$  et sa sortie  $y(t)$ . On considère des systèmes dont l'équation différentielle se met sous la forme canonique<sup>3</sup> :

$$\omega_n^2 y(t) + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} = K\omega_n^2 u(t), \quad (1.10)$$

où  $\xi$  et  $K$  sont des constantes réelles strictement positives et  $\omega_n$  une constante réelle non nulle. Pour ce système  $\xi$  est le *coefficient d'amortissement* du système (→damping ratio),  $\omega_n$  sa *pulsation naturelle* (→natural frequency) ou *pulsation propre non amortie* et  $K$  son gain statique.

La fonction de transfert du système du second ordre se déduit de (1.10) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2}. \quad (1.11)$$

Cette forme particulière facilite le calcul des pôles du système. En effet les pôles du système sont les solutions de l'équation

$$\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2 = 0,$$

qui valent :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})\omega_n \text{ si } 0 < \xi \leq 1 \\ \text{et } p_{1,2} &= -(\xi \pm \sqrt{\xi^2-1})\omega_n \text{ si } \xi \geq 1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

On peut représenter graphiquement ces pôles dans le plan complexe, comme cela est fait à la figure 1.8 page suivante. D'après ce schéma, les notions de coefficient d'amortissement et de pulsation naturelle peuvent être étendues à un pôle quelconque, quel que soit le degré du système.

#### Réponse indicielle

La solution de l'équation (1.10) pour  $u(t) = \mathcal{U}(t)$  dépend de la valeur de  $\xi$ , à l'image des pôles du système. Selon la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$ , la réponse indicielle du système prend différentes formes :

$$\begin{cases} \alpha + \beta e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \varphi), & \text{si } 0 < \xi < 1, \\ \alpha + (\beta + \gamma t)e^{-\xi\omega_n t}, & \text{si } \xi = 1, \\ \alpha + \beta e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t} + \gamma e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}, & \text{si } \xi > 1, \end{cases}$$

<sup>3</sup>Dans le cas général, la dérivée de l'entrée peut intervenir, mais nous excluons cette possibilité ici, pour plus de clarté dans l'exposé. De même  $\xi$  et  $\omega$  sont choisis positifs pour assurer la stabilité, comme on le comprendra plus tard.

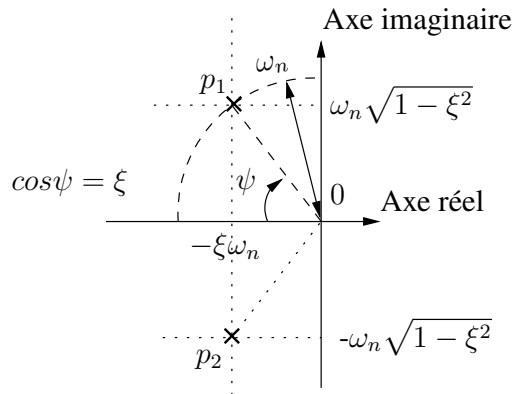


FIG. 1.8 – Pôles d'un système du second ordre de coefficient d'amortissement  $\xi$  et de pulsation naturelle  $\omega_n$

avec  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  dépendant des CI. Il serait un peu fastidieux d'établir toutes les expressions en fonction des CI. On retiendra donc la forme des différentes réponses pour des CI nulles.

✍ **Exemple** A la figure 1.9 page suivante, on a représenté la réponse d'un système du second ordre de pulsation naturelle  $\omega_n = 100 \text{ rad/s}$  et de gain statique  $K = 10$  pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement  $\xi$ .

Dans le cas où  $\xi \geq 1$ , la réponse est *apériodique*, c'est-à-dire qu'elle ne comporte aucune oscillation. En revanche, dans le cas où  $\xi < 1$ , la réponse présente des *pseudo-oscillations*. Il s'agit d'oscillations de pulsation fixe  $\omega_p = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n$ , dont l'amplitude décroît exponentiellement vers zéro. On appelle  $\omega_p$  *pseudo-pulsation* ou *pulsation amortie* ( $\rightarrow$  conditional frequency ou damped frequency). Elle correspond à une pseudo-période  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ .

Le temps de réponse d'un système du second ordre ne répond pas à une loi simple. La meilleure solution pour obtenir le temps de réponse d'un système du second ordre est de se reporter à des abaques ou d'utiliser un logiciel de simulation numérique. On peut cependant remarquer les deux choses suivantes :

- dans le cas d'un système avec deux pôles réels, associés à deux constantes de temps, on peut approcher le temps de réponse à 5% par trois fois la plus grande constante de temps du système, à la manière d'un premier ordre :  $t_{5\%} \simeq 3\tau_1$ , où  $\tau_1$  représente la plus grande des constantes de temps ;
- dans le cas d'un système avec deux pôles complexes, la réponse indicielle est comprise à l'intérieur d'une enveloppe exponentielle connue :  $e^{-\xi\omega_n t}$ . Ainsi on pourra dire que  $t_{5\%} < \frac{3}{\xi\omega_n}$ . Cette valeur fournit en général une bonne approximation, qui plus est pessimiste. Ceci est illustré à la figure 1.10 page suivante.

Dans le cas d'un système pseudo-oscillant, on peut en revanche déterminer analytiquement les caractéristiques du premier dépassement :

$$t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n}, \quad D_1 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}.$$

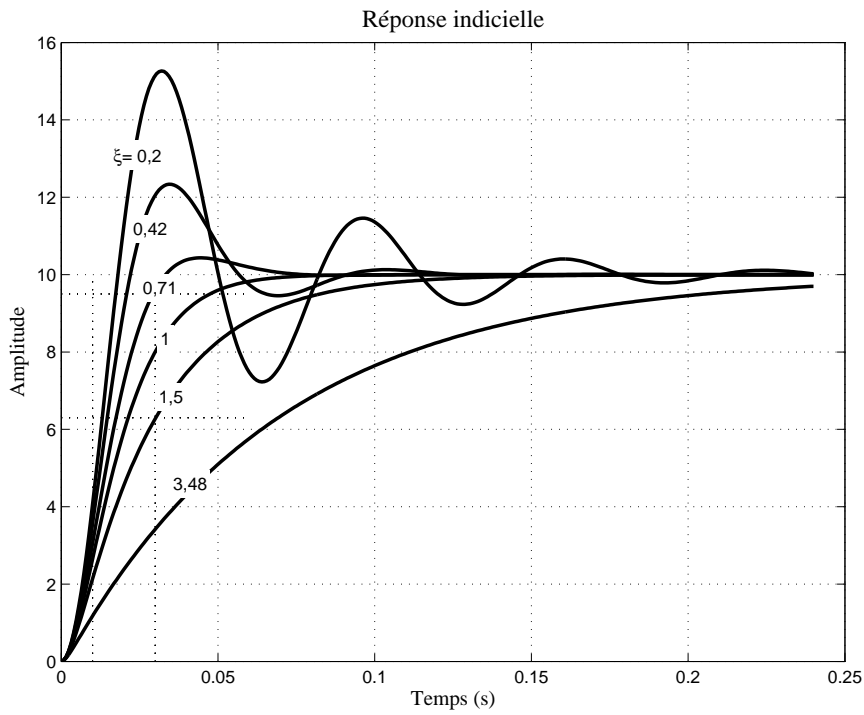


FIG. 1.9 – Réponses indicielles d'un système du second ordre pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement

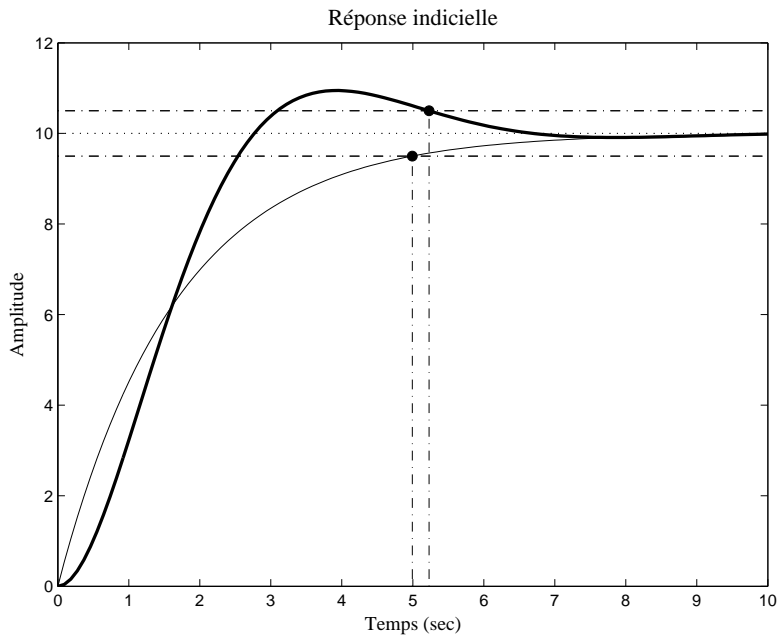


FIG. 1.10 – Temps de réponse à 5% d'un système du second ordre de coefficient d'amortissement 0,6 et d'un premier ordre de constante de temps  $\frac{1}{\xi\omega_n}$

On peut ainsi analyser la rapidité du système, en fonction de son amortissement. On montre notamment que pour un système d'ordre deux le meilleur compromis amortissement-rapidité est obtenu pour  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$ . Le premier dépassement est alors de 5 % de la valeur finale : l'instant du premier dépassement correspond ainsi au temps de réponse à 5% du système.

Enfin, pour conclure, on peut remarquer que la pente à l'origine de la réponse indicielle est nulle pour le système du second ordre (1.10), quel que soit le coefficient d'amortissement. Cela n'est plus le cas pour un système du second ordre comportant un zéro, c'est-à-dire comportant un terme fonction de la dérivée de l'entrée. La pente à l'origine est alors non nulle et son signe dépend du signe du zéro.

### Réponse harmonique

La réponse harmonique issue de (1.11) est :

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi\omega_n\omega}$$

Son comportement asymptotique est résumé dans le tableau 1.2.

$\omega$	$G(j\omega)$ équivalent	gain	gain (dB)	phase (deg)
$\omega \ll \omega_n$	$K$	$K$	$K_{dB} = 20 \log_{10} K$	0
$\omega_n$	$\frac{K}{2j\xi}$	$\frac{K}{2\xi}$	$K_{dB} - 6 - 20 \log_{10} \xi$	-90
$\omega \gg \omega_n$	$\frac{-K\omega_n^2}{\omega^2}$	$\frac{K\omega_n^2}{\omega^2}$	$K_{dB} + 40 \log_{10} \omega_n - 40 \log_{10} \omega$	-180

TAB. 1.2 – Réponse harmonique d'un système du second ordre

On remarque que pour les pulsations grandes devant la pulsation naturelle  $\omega_n$ , la courbe de gain suit une direction asymptotique, qui est une droite de pente  $-40 \text{ dB/décade}$  dans le diagramme de Bode (voir figure 1.11 page suivante). A la pulsation  $\omega_n$  le déphasage vaut  $-90 \text{ deg}$  ; le gain dépend, quant à lui, de la valeur du coefficient d'amortissement et l'on peut, selon les cas, avoir atténuation ou, au contraire, *résonance*. Pour cela il faut que le coefficient d'amortissement soit inférieur à  $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$ . Alors, à la pulsation :

$$\omega = \sqrt{1 - 2\xi^2} \omega_n$$

le gain en  $\text{dB}$  passe par une valeur maximale supérieur au gain statique. Le *coefficient de surtension*, quotient du gain maximal sur le gain statique (pas en  $\text{dB}$ , en valeur vraie) vaut :

$$Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Le phénomène de résonance apparaît clairement sur les diagrammes harmoniques des figures 1.11 et 1.12. On y a représenté les diagrammes harmoniques d'un système du second ordre de pulsation naturelle  $\omega_n = 100 \text{ rad/s}$  et de gain statique  $K = 10$ , pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement  $\xi$ . Les remarques concernant la construction du diagramme de Nyquist s'appliquent toujours. Le diagramme de Nyquist d'un système d'ordre deux est toujours une portion de cercle dont le rayon dépend du coefficient d'amortissement du système (voir figure 1.12).

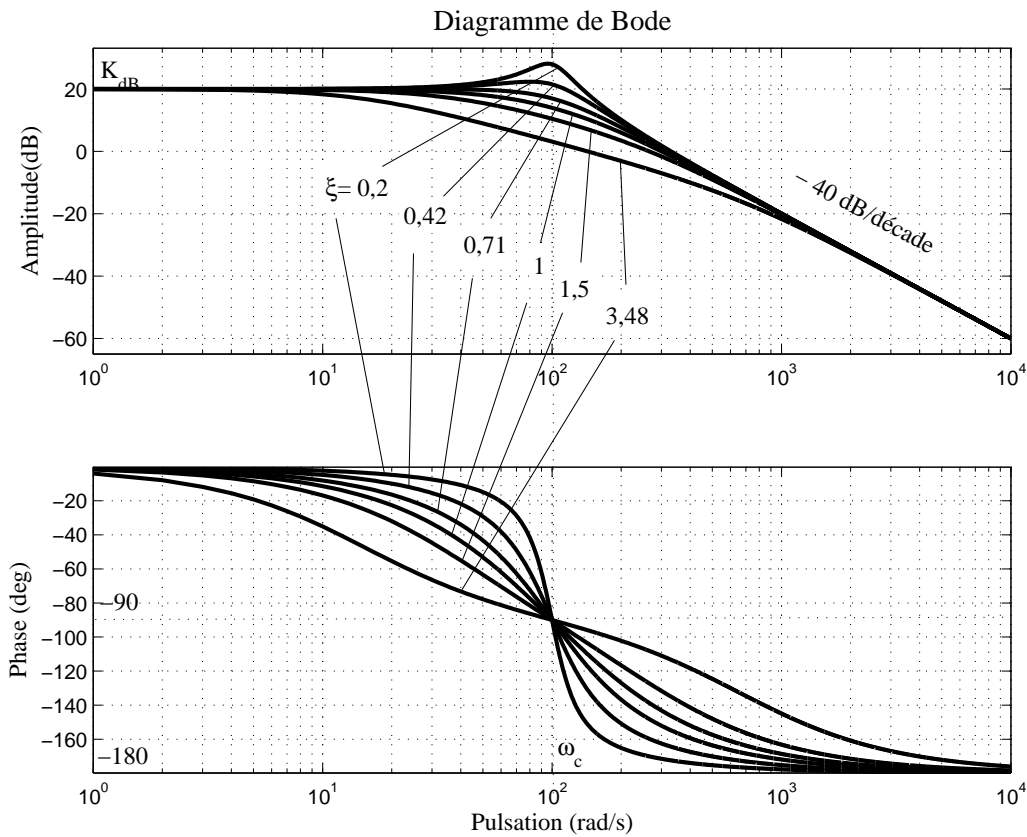


FIG. 1.11 – Diagramme de Bode d'un système du second ordre de gain statique  $K = 10$  et de pulsation naturelle  $\omega_n = 100$ , pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement



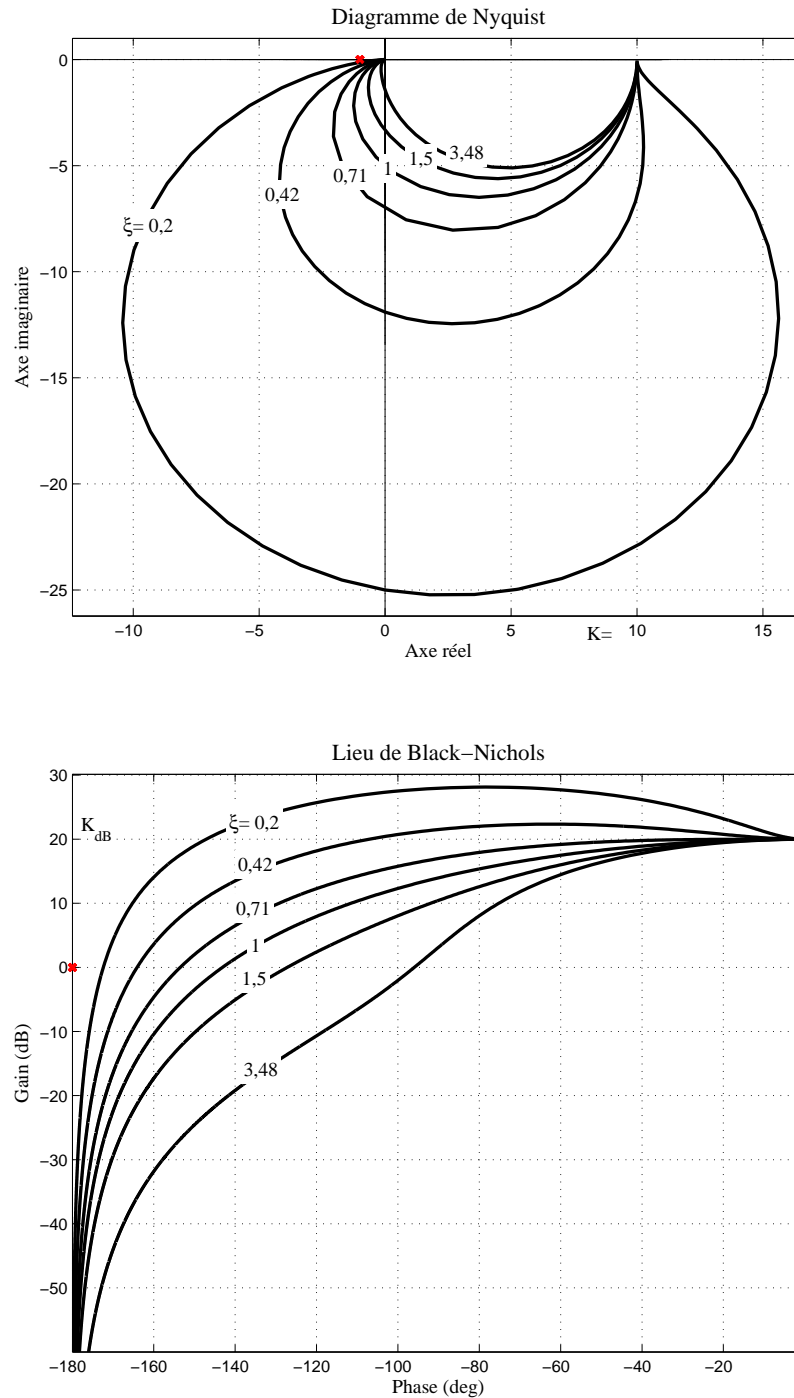


FIG. 1.12 – Diagramme de Nyquist et de Black d'un système du second ordre de gain statique  $K = 10$  et de pulsation naturelle  $\omega_n = 100$ , pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement

## 1.5 Simplification de modèles

Cette section décrit comment on peut simplifier un modèle, essentiellement en observant ses pôles et zéros. Cela s'applique à des systèmes linéaires invariants d'ordre supérieur ou égal à deux.

Un système linéaire invariant possède des pôles (resp. des zéros) complexes ou réels. Les pôles (resp. les zéros) complexes vont systématiquement par paire de pôles (resp. de zéros) conjugués. En associant les pôles (resp. les zéros) on peut transformer la forme générique de la fonction de transfert, pour obtenir :

$$G(s) = \frac{K}{s^c} \frac{\prod_{i=1}^p (1 + \tau_i s) \prod_{i=p+1}^q (1 + 2 \frac{\xi_i}{\omega_{n_i}} s + \frac{1}{\omega_{n_i}^2} s^2)}{\prod_{j=1}^{p'} (1 + \tau_j s) \prod_{j=p'+1}^{q'} (1 + 2 \frac{\xi_j}{\omega_{n_j}} s + \frac{1}{\omega_{n_j}^2} s^2)}.$$

On peut tracer le diagramme de Bode du système en superposant les diagrammes associés aux polynômes présents au numérateur et au dénominateur :

- les polynômes d'ordre un, correspondant aux pôles et zéros réels ;
- les polynômes d'ordre deux, correspondant aux pôles et zéros complexes conjugués.

Pour comprendre, le mieux est de traiter l'exemple suivant.

**Exemple : cas du moteur à courant continu** Le modèle d'ordre un d'un moteur à courant continu est donné par la fonction de transfert (C.8). Dans le cas du Maxon F2260, avec les caractéristiques établies dans les exemples précédents, on obtient la fonction de transfert du premier ordre :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{9,8975}{1 + 0,0184s},$$

Si l'on utilise maintenant le modèle d'ordre deux issu de la fonction de transfert (C.11), on a :

$$G(s) = \frac{9,8975}{(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)}. \quad (1.13)$$

Dans ce cas, on a deux constantes de temps, associées à deux pôles réels distincts :

- $\tau_{em} = 0,0184 \text{ s}$  est la constante de temps électromécanique, associée au pôle électromécanique du MCC : c'est la constante de temps la plus grande, associée au pôle le plus lent ;
- $\tau_{el} = 0,0004 \text{ s}$  est la constante de temps électrique, associée au pôle électrique du MCC : c'est la constante de temps la plus petite, associée au pôle le plus rapide.

Pour analyser le système, on a tracé à la figure 1.13 page ci-contre les diagrammes de Bode asymptotiques de :

$$K_G G_1(j\omega) = \frac{9,8975}{1 + 0,0184j\omega},$$

et

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 0,0004j\omega},$$

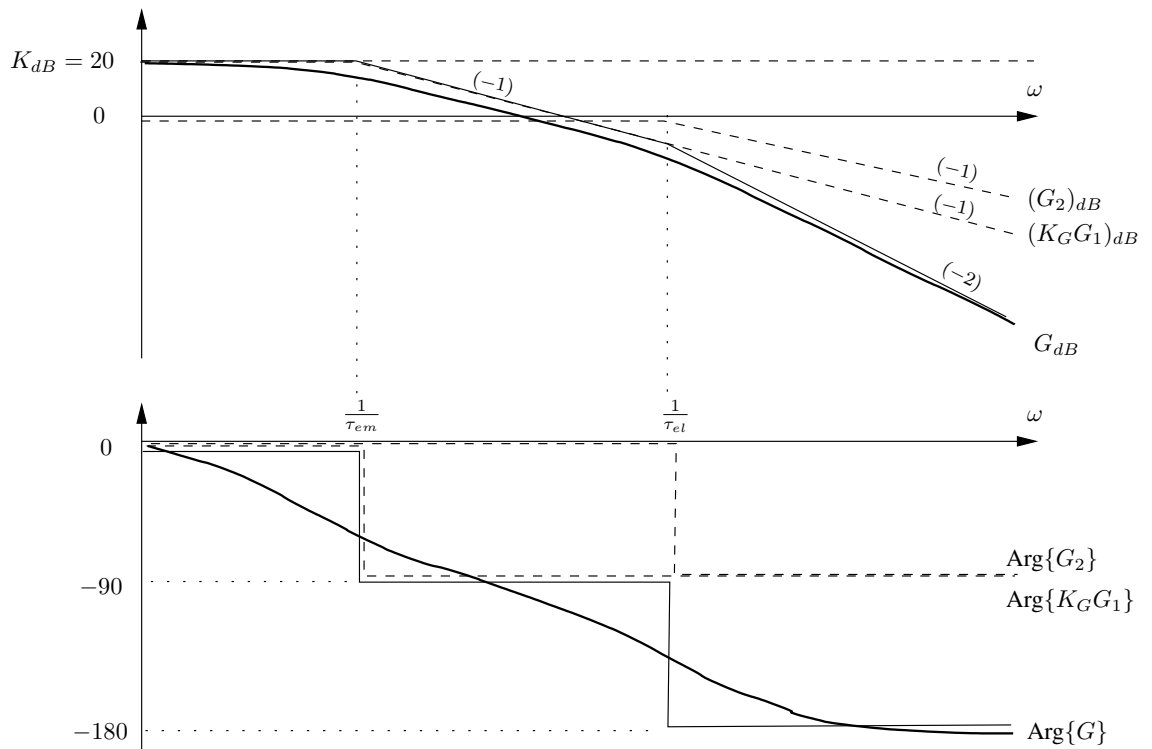


FIG. 1.13 – Construction du diagramme de Bode d'un moteur Maxon F2260

ainsi que les diagrammes de Bode asymptotique et réel de  $G(j\omega)$ .

Le principal enseignement de la figure 1.13 concerne les influences respectives des deux pôles. Le pôle électromécanique, associé à la constante de temps  $\tau_{em}$ , grande devant  $\tau_{el}$ , est prépondérant. En effet, aux pulsations inférieures à  $\frac{1}{\tau_{el}}$ , l'influence du pôle électrique du moteur est quasi-nulle : le système se comporte comme un premier ordre aux basses fréquences. L'influence du pôle électrique ne se fait sentir que lorsque la pulsation est proche de la pulsation de coupure associée au pôle électrique (grossièrement, dans la décade précédente). Or, à ces fréquences le système est déjà très amorti (d'environ 20 dB), à cause de l'action du pôle électromécanique du moteur.

À titre de comparaison, si l'on représente la réponse indicielle du système avec alternativement des modèles d'ordre un puis deux, il n'est quasiment pas possible de les différencier, à l'échelle du temps de réponse. On a donc préféré représenter à la figure 1.14 page suivante la différence de réponse indicielle entre les modèles d'ordre un et d'ordre deux. Ce tracé confirme que le modèle d'ordre un offre une très bonne approximation du comportement dynamique du système, à l'exception peut-être du début du transitoire : le MCC, en tant que système d'ordre deux possède une réponse indicielle de pente nulle à l'origine, alors que le système du premier ordre équivalent aura une réponse indicielle à l'origine de pente  $\frac{K_G}{\tau_{em}}$ . L'hypothèse est néanmoins sensée physiquement : elle traduit la possibilité de négliger la dynamique liée à l'établissement du courant dans le moteur devant celle traduisant la mise en mouvement du rotor, sous l'action de la force électromotrice.

Les constatations faites sur cet exemple se généralisent. Lorsque deux pôles sont suf-

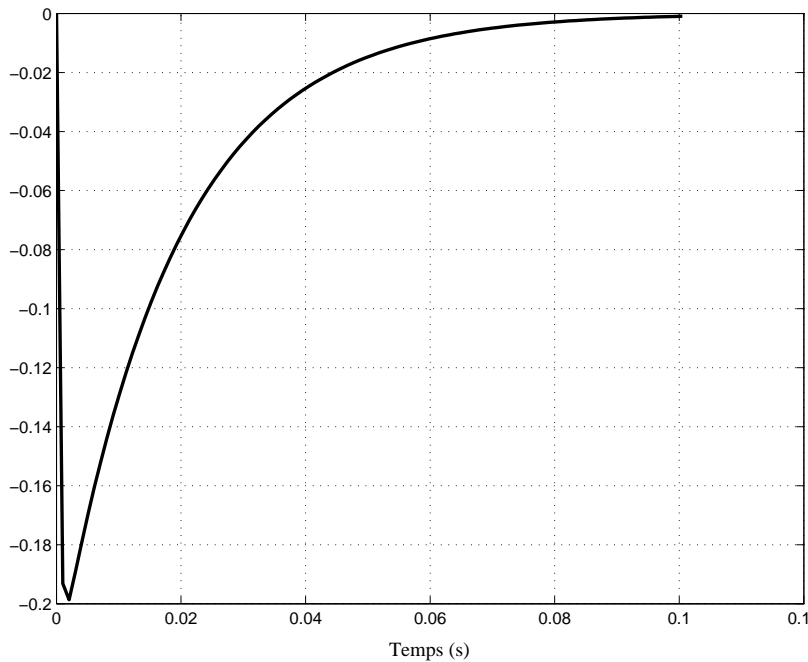


FIG. 1.14 – Erreur de modélisation dans l’hypothèse d’un modèle d’ordre un du MCC : erreur sur la réponse indicielle pour un moteur Maxon F2260

fisamment distincts le pôle le plus près de l’axe des imaginaires, c’est-à-dire le plus petit en valeur absolue, associé à la constante de temps la plus grande, impose sa dynamique. Il est dit *dominant* s’il est suffisamment séparé des autres. Pour cela, un rapport de 10 est généralement admis. Si l’on doit faire une approximation pour simplifier l’étude d’un système dont le modèle est d’ordre élevé, on néglige donc les pôles les plus rapides. Si les pôles sont proches, il peut devenir plus hasardeux d’effectuer une telle simplification.

Dans le cas de pôles complexes conjugués, introduisant un élément du second ordre au dénominateur de la fonction de transfert, on peut de même considérer que la dynamique liée à une paire de pôles complexes conjugués est négligeable devant celle liée à un pôle simple ou à une autre paire de pôles complexes conjugués si la pulsation naturelle associée à cette paire est grande devant la pulsation naturelle de l’autre paire, ou devant la pulsation associée au pôle simple.

Le cas des zéros est similaire et on les simplifie *entre eux* de la même manière. En revanche, on procède avec prudence pour ce qui est de négliger un zéro prépondérant au vu de la valeur des pôles. Ces notions concernant l’influence des pôles et zéros en fonction de leurs positions relatives seront très utiles dans le cas de la synthèse de correcteurs dans le lieu des racines, que nous verrons à la section 3.4.

# Chapitre 2

## Systemes asservis à temps continu

### 2.1 Notion de système asservi

#### 2.1.1 A la douche

Pour saisir la notion de *système asservi* ou *système avec contre-réaction* (→ feedback system), supposons que l'on vient de finir en sueur un match de rugby. Plusieurs cas de figure se présentent selon que vous jouez au fin fond du Cantal ou au Stade Toulousain :

- la douche est rustique et par conséquent équipée d'un simple bouton qui laisse couler l'eau à la température prévue : une fois l'eau chaude (s'il y en a) arrivée dans le circuit, la température se stabilise à peu près. Qu'elle soit à votre goût ou non, vous n'avez pas de possibilité de réglage de l'entrée en fonction de votre perception ;
- après la douche brûlante (dans le meilleur des cas) de la semaine passée (cas précédent) vous testez les nouvelles douches de votre club qui dispose de deux robinets : un d'eau chaude et un d'eau froide. L'eau chaude ayant coulé depuis assez longtemps, vous commencez déjà à vous brûler : vous ajustez la température en agissant sur l'arrivée d'eau froide. L'eau se refroidit, vous réajustez, elle est trop chaude, vous réajustez, et ainsi de suite, jusqu'à la température espérée ;
- arrive la consécration du club professionnel : les douches avec thermostat. Plus besoin de passer votre temps à régler la température en passant de la douche écossaise à la brûlure. Vous ajustez la valeur souhaitée qui apparaît sur l'écran digital du thermostat et la température monte rapidement à la valeur souhaitée : vous avez découvert la régulation numérique.

Ces trois scènes de la vie « courante » illustrent parfaitement la notion de contre-réaction. Le deuxième cas est intéressant : en réponse à une information de sortie (la température de l'eau), l'utilisateur réajuste l'entrée (le débit d'eau froide ou chaude) pour amener la sortie à la valeur désirée ou autour de celle-ci. C'est le principe même de la contre-réaction. Dans le troisième exemple, la régulation est réalisée de manière automatique, à l'aide d'un calculateur : c'est le but de ce cours ! Le premier cas illustre lui un système (douche+douché) sans possibilité de contre-réaction.

### 2.1.2 Cas du moteur à courant continu

Le moteur à courant continu peut lui aussi être vu comme un système à contre-réaction. Pour s'en apercevoir il faut reprendre les équations du système, établies dans l'annexe C page 71. La transformée de Laplace appliquée aux équations (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4), avec l'hypothèse  $K_{em} = K_e = K_m$ , donne respectivement :

$$\begin{aligned} U(s) &= E(s) + (R + Ls)I(s), & \Gamma(s) &= (f + Js)\Omega(s), \\ E(s) &= K_{em} \Omega(s), & \Gamma(s) &= K_{em} I(s). \end{aligned}$$

Si l'on met ces équations sous forme de schéma, on aboutit à la figure 2.1.

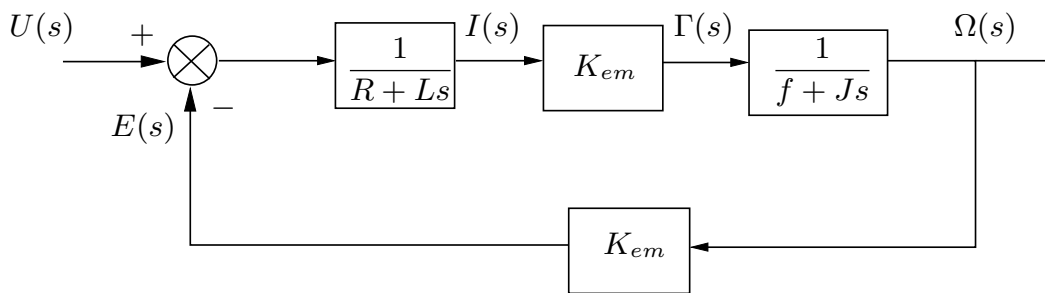


FIG. 2.1 – Schéma de principe d'un moteur à courant continu

En observant le schéma de la figure 2.1, on peut voir ce système, dont l'entrée est la tension  $u$  et la sortie la vitesse de rotation du moteur  $\omega$ , comme un système avec contre-réaction. Celle-ci est assurée par la force électromotrice  $e$  du moteur. On note que le système prend de ce fait la forme d'un *système bouclé*.

Si l'on tient compte maintenant d'un éventuel couple de charge  $\gamma_r$  sur l'arbre moteur, l'équation mécanique est modifiée et s'écrit :

$$\Gamma(s) - \Gamma_r(s) = (f + Js)\Omega(s).$$

Cette modification apparaît alors dans le schéma, comme indiqué à la figure 2.2. Par

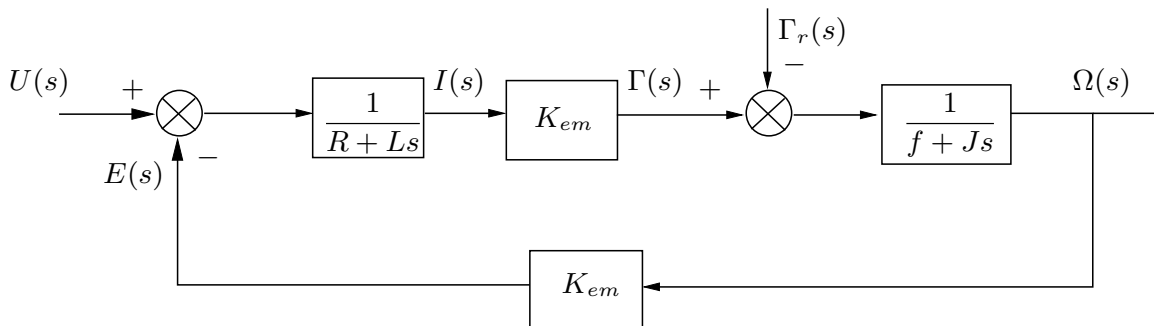


FIG. 2.2 – Schéma de principe d'un moteur à courant continu en charge

rapport au schéma précédent, on peut considérer ce couple comme un terme de *perturbation*, puisqu'il n'est pas propre au système, mais à son utilisation.

## 2.2 Caractéristiques d'un système asservi

### 2.2.1 Schéma d'un système asservi

Le schéma général d'un *asservissement* est celui d'un schéma bouclé sur lequel on mesure la sortie pour effectuer une contre-réaction (voir figure 2.3). L'entrée du système

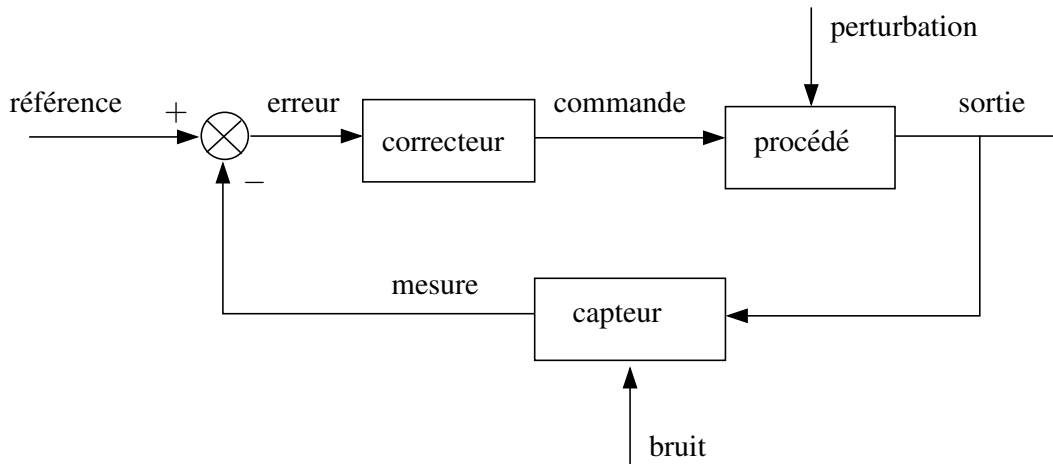


FIG. 2.3 – Schéma de principe d'un asservissement à temps continu

est alors corrigée en fonction de la différence entre une *grandeur de référence* et la *grandeur de mesure* : c'est le rôle du *correcteur*, qui produit la *commande* adéquate du procédé. Dans un schéma tenant compte des imperfections de modélisation, on pourra le cas échéant ajouter différentes perturbations, notamment des erreurs de modèles, des éléments non modélisés ou non modélisables, des bruits sur les signaux. Ici on distinguera seulement les perturbations sur le système, qui apparaissent dans la *chaîne directe* (ou *chaîne d'action*) de l'asservissement et les *bruits de mesures*, qui apparaissent dans la *chaîne de retour* (ou *chaîne de contre-réaction*).

De manière plus quantitative, on représente les différents blocs du système par leur fonction de transfert et les signaux par leur transformée de Laplace, pour obtenir le *schéma bloc* du système. On adopte le schéma 2.4 page suivante comme schéma général d'un asservissement à temps continu. Les différents termes sont :

- $Y_r(s)$  : référence (ou *grandeur de consigne*) ;
- $Y(s)$  : sortie (ou *grandeur réglée*) ;
- $Y_m(s)$  : mesure ;
- $E(s)$  : *erreur*<sup>1</sup> de l'asservissement ;
- $C(s)$  : correcteur ;
- $U(s)$  : commande ;
- $P(s)$  : perturbation ;
- $B(s)$  : bruit de mesure.

<sup>1</sup>La définition de ce terme peut varier selon les auteurs. Certains, considérant que l'appellation d'erreur est relative à la différence  $Y_r(s) - Y(s)$ , préfèrent le terme d'*écart*.

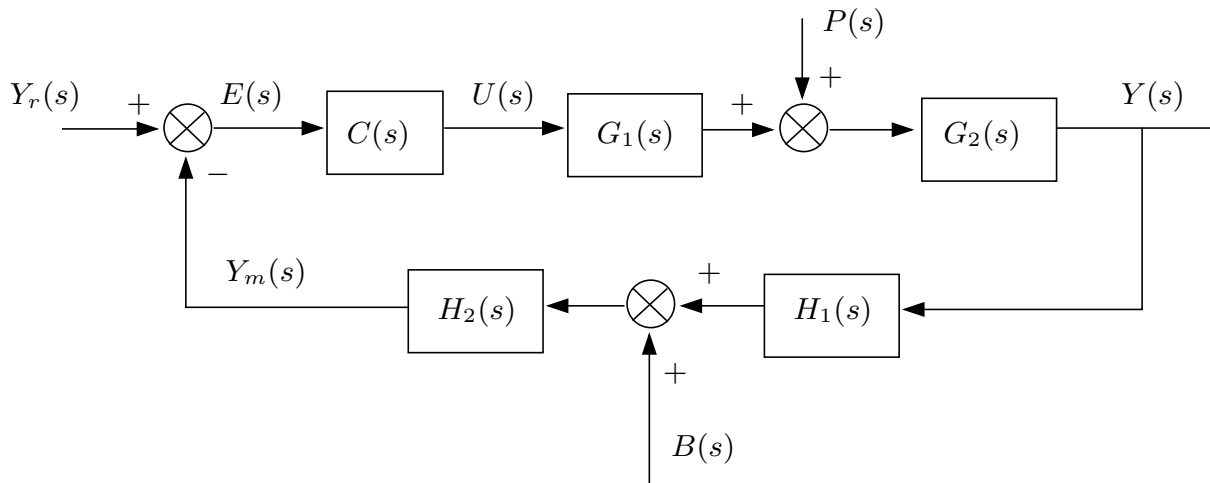


FIG. 2.4 – Schéma bloc d'un asservissement à temps continu : cas général

Si  $G(s) = G_1(s) G_2(s)$  est la fonction de transfert du procédé, on note (petit abus)  $CG(s) = C(s)G(s)$  la fonction de transfert de la chaîne directe (ou chaîne d'action) et  $H(s) = H_1(s) H_2(s)$  celle de la chaîne de retour (ou chaîne de contre-réaction).

### 2.2.2 Fonction de transfert d'un système asservi

Dans une première étude on ne tient pas compte, en général, des perturbations et du bruit. L'asservissement prend alors la forme représentée à la figure 2.5.

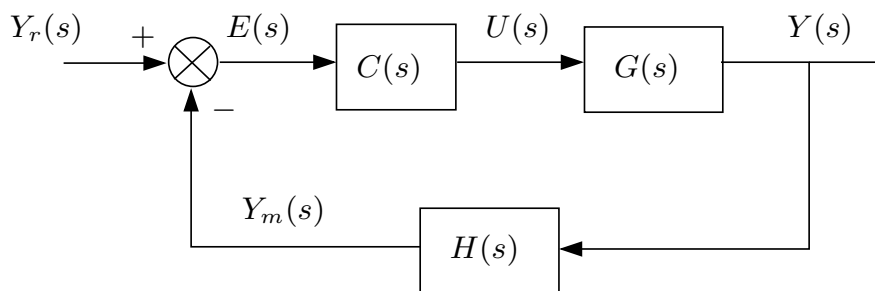


FIG. 2.5 – Asservissement à temps continu idéal

La *fonction de transfert en boucle ouverte* (FTBO) de ce système est :

$$C(s)G(s)H(s),$$

que l'on note  $CGH(s)$ , toujours par abus et commodité. Il s'agit de la relation entrée-sortie du système quand la chaîne de retour n'est pas connectée au comparateur. La *fonction de transfert en boucle fermée* (FTBF) est, quant à elle :

$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)}.$$



La FTBF représente donc la relation entrée-sortie du système bouclé.

Le système de la figure 2.5 page précédente obéit aux équations suivantes :

$$U(s) = C(s)E(s), \quad (2.1)$$

$$E(s) = Y_r(s) - Y_m(s), \quad (2.2)$$

$$Y_m(s) = H(s)Y(s), \quad (2.3)$$

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (2.4)$$

D'après (2.1), (2.2) et (2.3) :

$$U(s) = C(s) (Y_r(s) - H(s)Y(s)),$$

et donc, d'après (2.4) :

$$Y(s) = CG(s) (Y_r(s) - H(s)Y(s)).$$

Finalement, la FTBF s'écrit :

$$\boxed{\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = \frac{CG(s)}{1 + CGH(s)}}. \quad (2.5)$$

Il est utile de retenir ce résultat (et par ailleurs de savoir le redémontrer). On montre aisément (prenez donc un exemple) que la FTBF et la FTBO ont le même ordre.

Pour tenir compte des imperfections représentées sur le schéma 2.4 page ci-contre, on calcule la transformée de Laplace de la sortie à l'aide du théorème de superposition. On écrit pour cela que la sortie est la somme des sorties obtenues par les actions séparées de l'entrée, de la perturbation et du bruit (procéder ainsi simplifie le calcul). On trouve, après quelques schémas et calculs :

$$Y(s) = \frac{CG(s) Y_r(s) + G_2(s) P(s) - CG(s) H_2(s) B(s)}{1 + CGH(s)}.$$

### 🔗 Exercice

Dessiner les schémas en question, calculer les modèles et retrouver la formule précédente.

🔗 **Exemple : cas du moteur à courant continu** Pour réaliser la *régulation* (synonyme d'asservissement) de la vitesse du rotor d'un moteur à courant continu, on utilise les schémas de principe vus précédemment. On choisit de régler la vitesse par une tension d'entrée  $y_r$ . Celle-ci correspond à une vitesse de rotation désirée  $\omega_r$ . La vitesse du rotor est mesurée par une génératrice tachymétrique placée sur l'axe et qui délivre une tension  $y_m$  proportionnelle à la vitesse de rotation de l'axe. Le schéma-bloc de l'asservissement réalisé est représenté à la figure 2.6, en haut. La grandeur asservie étant la vitesse de rotation, on parlera d'asservissement de vitesse du moteur.

On pourrait concevoir de présenter ce schéma différemment bien évidemment, notamment en faisant apparaître un retour unitaire, c'est-à-dire en considérant que la grandeur asservie est la tension image de la vitesse. On obtient alors le schéma de la figure 2.6, au milieu. On peut également faire apparaître la comparaison entre les vitesses en redessinant le schéma-bloc sous la forme suggérée à la figure 2.6, en bas. On fait ici apparaître la variable intermédiaire  $\omega_r$ . Ces schémas sont tous équivalents.

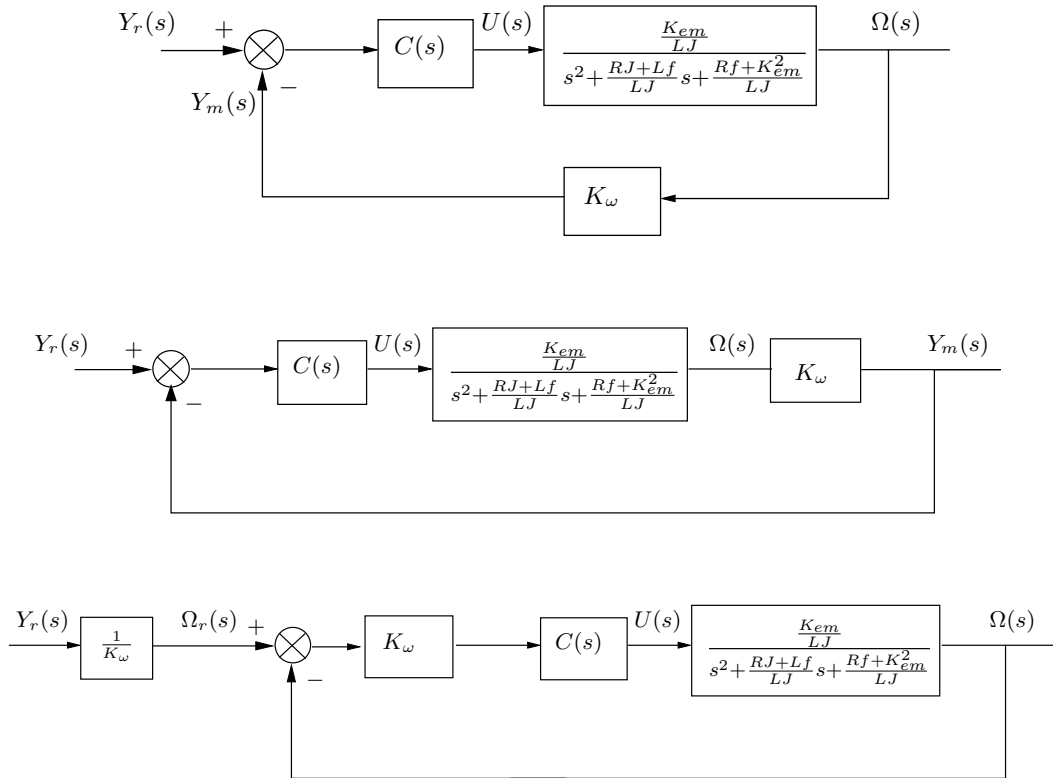


FIG. 2.6 – Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu

### 2.2.3 Comportement fréquentiel d'un système asservi

On s'intéresse au comportement harmonique du système en boucle fermée, dont la FTBF, sous la forme (2.5), conduit à la réponse harmonique :

$$\frac{Y(j\omega)}{Y_r(j\omega)} = \frac{CG(j\omega)}{1 + CGH(j\omega)}$$

Pour tracer le diagramme de Bode du système en boucle fermée, on remarque que :

$$\begin{cases} \frac{Y(j\omega)}{Y_r(j\omega)} \simeq CG(j\omega), & \text{si } CGH(j\omega) \ll 1, \\ \frac{Y(j\omega)}{Y_r(j\omega)} \simeq \frac{1}{H(j\omega)}, & \text{si } CGH(j\omega) \gg 1. \end{cases}$$

On illustre ceci par le diagramme de Bode d'un système du second ordre possédant deux pôles réels associés aux deux constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  et un gain statique

supérieur à un. Le diagramme de Bode de la FTBF est représenté à la figure 2.7, en fonction du diagramme de Bode du système en boucle ouverte. Pour simplifier, on a représenté un système à retour unitaire.

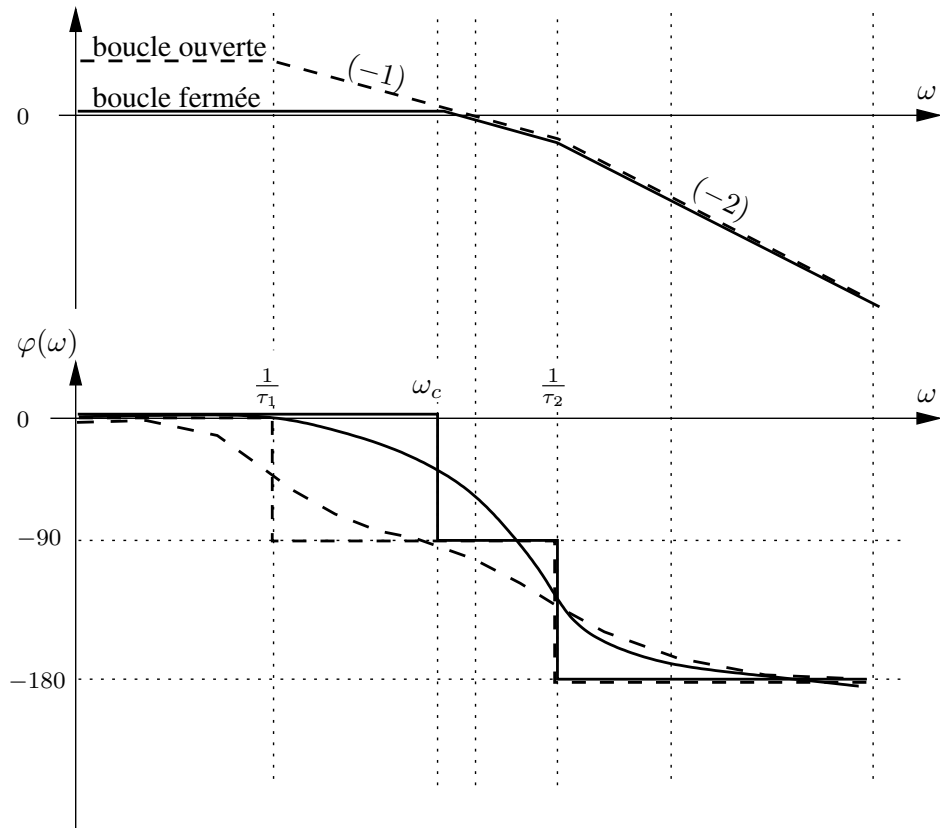


FIG. 2.7 – Comportement fréquentiel d'un système à retour unitaire en boucle fermée

D'après le comportement fréquentiel du système, on peut tirer certaines conclusions quant à la nature de la boucle fermée. Notamment, si au-delà de la pulsation de coupure, la pente de la courbe de gain est de  $-20 \text{ dB/décade}$  pendant au moins une décade, on pourra approcher le système en boucle fermée par un système du premier ordre de constante de temps égale à l'inverse de la pulsation de coupure. Si cette pente est de  $-40 \text{ dB/décade}$ , le système en boucle fermée aura un comportement de type second ordre. Ceci doit bien évidemment être modulé selon l'écartement entre les pôles.

## 2.3 Stabilité

### 2.3.1 Définitions et premier critère de stabilité

La première définition de la stabilité dépasse le concept de système. De manière naturelle on dira qu'un système est *stable* si, écarté de sa position d'équilibre, il y revient.

Si l'on considère maintenant la stabilité d'un système, vis-à-vis de sa réponse, on adopte la définition suivante.

**Définition 2.1 (Stabilité BIBO)** *Un système est stable si toute entrée bornée produit une sortie bornée.*

Cette définition caractérise la *stabilité entrée bornée-sortie bornée* (désignée usuellement par BIBO en abrégé, d'après l'anglais *bounded input bounded output*).

**Théorème 2.1 (Critère algébrique de stabilité)** *Un système linéaire invariant à temps continu est stable si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.*

Le théorème 2.1 permet de déterminer la stabilité du système si l'on est capable de calculer l'ensemble de ses pôles. Ce théorème est valable pour tout système, qu'il soit en boucle ouverte ou fermée. Pour un système d'ordre élevé, il faut généralement recourir à une résolution numérique pour déterminer les pôles du système. Pour cette raison un certain nombre de méthodes alternatives ont été développées pour caractériser la stabilité d'un système.

### 2.3.2 Critère de Routh-Hurwitz

Soit  $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_c s^c$  le polynôme dénominateur de la fonction de transfert du système considéré. Le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer le signe des racines de  $D(s)$  sans pour autant avoir à calculer leur valeur.

**Théorème 2.2 (Critère de Routh-Hurwitz)** *Le système est stable si les  $a_i, \forall i = c, c+1, \dots, n$  sont de même signe et du même signe que les éléments de la première colonne du tableau suivant (dit tableau de Routh) :*

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...
$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_{n-3} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$b_{n-5}$	...
$c_{n-1} = \frac{b_{n-1}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-3}}{b_{n-1}}$	$c_{n-3} = \frac{b_{n-1}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-5}}{b_{n-1}}$	...	...
$d_{n-1} = \frac{c_{n-1}b_{n-3} - b_{n-1}c_{n-3}}{c_{n-1}}$	...	...	...
...	...	...	...

Le nombre de changements de signes dans la première colonne indique le nombre de pôles instables du système. Dans le cas où apparaîtrait un zéro dans la première colonne du tableau, il convient de le remplacer par un scalaire  $\varepsilon > 0$ , et de poursuivre le calcul du tableau et l'application du critère en sachant que ce nombre est positif. Si le scalaire

directement sous  $\varepsilon$  est positif, il existe un pôle à partie réelle nulle. Sinon, il existe un pôle à partie réelle positive.

Pour retenir comment l'on construit le tableau de Routh, on remarquera que, par exemple :

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

peut être obtenu par la règle mnémotechnique :

$$b_{n-1} = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

### Exercice

Etudier la stabilité des systèmes d'ordre un, deux et trois, dans le cas général, à l'aide du critère de Routh.

### 2.3.3 Lieu des racines

Les critères de stabilité précédents ont l'avantage d'être simples à appliquer et de permettre de traiter le cas de systèmes d'ordre élevé. En revanche, ils ne permettent pas de caractériser la stabilité en déterminant qualitativement l'«éloignement» de la limite de stabilité. On va maintenant s'intéresser à d'autres méthodes qui permettent notamment de faire cette caractérisation.

Le *lieu des racines* d'un système ( $\rightarrow$  root locus), encore appelé *lieu d'Evans*, est le lieu des pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée lorsque le gain  $K_p$  de la chaîne directe varie de 0 à  $+\infty$ , conformément au schéma 2.8.

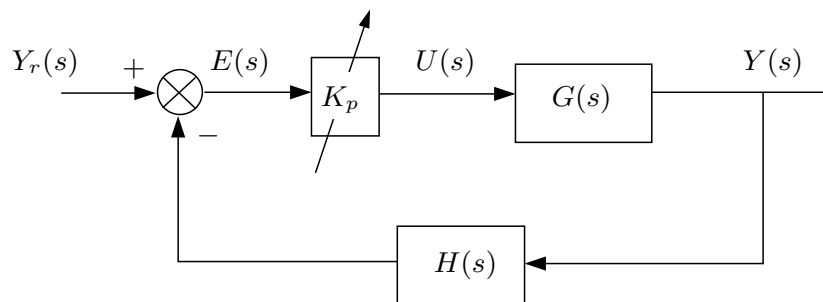


FIG. 2.8 – Lieu des racines : principe

D'après le théorème 2.1, un système en boucle fermée est stable tant que ses pôles, qui parcourent le lieu des racines, restent dans le demi-plan complexe gauche. Au delà, il est particulièrement intéressant de connaître le placement des pôles d'un système asservi lorsque le gain de sa chaîne directe varie. En effet, on peut alors en déduire les valeurs du gain pour lesquelles l'asservissement est stable, celles pour lesquelles il est suffisamment rapide, amorti, etc.

Pour le système de la figure 2.8 page précédente les pôles du système en boucle fermée sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$1 + K_p G(s)H(s) = 0 \quad (2.6)$$

déduite de la FTBF du système. On remarque que l'équation caractéristique est de même degré que la FTBO. Si l'on note :

$$G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

où  $N(s)$  et  $D(s)$  sont respectivement de degrés  $m$  et  $n$ , l'équation (2.6) s'écrit encore :

$$K_p N(s) + D(s) = 0 \quad (2.7)$$

ou bien :

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -\frac{1}{K} \quad (2.8)$$

avec  $K = kK_p$ .

Soient alors  $Z_i$  d'affixe  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , et  $P_j$  d'affixe  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , les points du plan complexe correspondant respectivement aux zéros et aux pôles de  $GH(s)$ . D'après (2.8), un point  $M$  d'affixe  $s$  appartient au lieu des racines si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^m \arg \overrightarrow{Z_i M} - \sum_{j=1}^n \arg \overrightarrow{P_j M} = \pi + 2\lambda\pi, \quad (2.9)$$

$$\frac{\prod_{i=1}^m |\overrightarrow{Z_i M}|}{\prod_{j=1}^n |\overrightarrow{P_j M}|} = \frac{1}{K}. \quad (2.10)$$

Ces conditions sont respectivement appelées *condition des angles* et *condition des modules*.

D'après ce qui précède, on établit les propriétés suivantes, permettant la construction du lieu des racines sont les suivantes :

1. Symétrie par rapport à l'axe réel ;
2.  $n$  branches avec :
  - $n$  points de départ, pour  $K_p = 0$ , confondus avec les pôles de la FTBO ;
  - $m$  points d'arrivée, pour  $K_p = +\infty$ , confondus avec les zéros de la FTBO ;
3.  $n - m$  branches infinies :
  - ces branches donnent  $n - m$  asymptotes faisant des angles  $\beta_\lambda = \frac{2\lambda+1}{n-m}\pi$ , avec  $\lambda = 0, 1, \dots, n - m - 1$  avec l'horizontale ;
  - Intersection des asymptotes avec l'axe réel au point d'affixe  $\delta = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$  ;
4. Branches du lieu appartenant à l'axe réel : un point d'affixe réelle appartient au lieu si le nombre de pôles et zéros réels de la FTBO situés à sa droite est impair ;

5. Intersections du lieu avec l'axe réel : un point d'affixe réelle  $x$  est un point potentiel de séparation si  $\frac{1}{N(s)} \frac{dN(s)}{ds} \Big|_{s=x} = \frac{1}{D(s)} \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=x}$ .

L'intérêt du lieu des racines réside par ailleurs (et surtout, en fait) dans la possibilité qu'il offre de réaliser la commande du système, comme nous le verrons plus loin.

### ✎ Exemples

Le lieu tracé sur la figure 2.9 est le lieu des racines de l'équation :

$$1 + K \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} = 0,$$

$(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_-^2$ , lorsque  $K$  varie de 0 à  $+\infty$  (pour la figure, on a pris  $p_1 = -5$  et  $p_2 = -1$ ). Ce lieu comporte 2 branches. Les racines recherchées sont réelles pour  $K \leq \left(\frac{p_2 - p_1}{2}\right)^2$ . À partir de cette valeur de  $K$ , les branches quittent l'axe réel et font un angle de  $\pm \frac{\pi}{2}$  avec l'horizontale. Tous les pôles qui s'y situent admettent une partie réelle négative, égale à  $\frac{p_1 + p_2}{2}$ . A partir de ces résultats, on peut très bien construire à

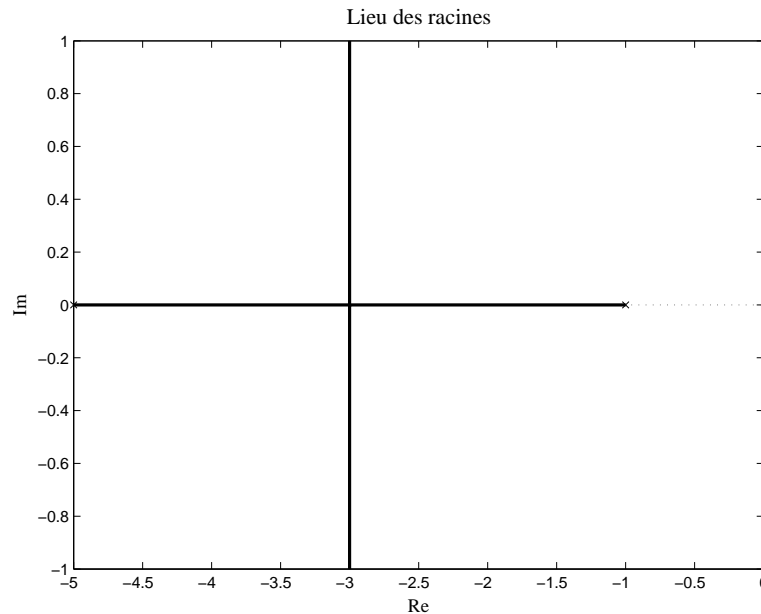


FIG. 2.9 – Lieu des racines de  $1 + K \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} = 0$

l'échelle le lieu des racines d'un MCC, puisqu'il possède bien un modèle du second ordre à pôles réels et sans zéro en vitesse.

La figure 2.10 présente le lieu des pôles d'un asservissement admettant

$$K \frac{1}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$

pour boucle ouverte,  $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_-^2$ , lorsque  $K$  varie de 0 à  $+\infty$  (mêmes valeurs de  $p_1$  et de  $p_2$  que précédemment). Ce lieu comporte 3 branches. Les pôles de l'asservissement sont réels pour  $K$  suffisamment faible. Ensuite, deux d'entre eux deviennent complexes conjugués, et leur partie réelle croît avec  $K$ . Lorsque  $K = -p_1 p_2 (p_1 + p_2)$ , ils prennent des valeurs imaginaires pures. Pour  $K \rightarrow \infty$ , le module de ces deux pôles complexes conjugués croît indéfiniment, ils tendent vers des asymptotes coupant l'axe réel en le point d'affixe  $\delta = \frac{p_1 + p_2}{3}$  et faisant un angle de  $\pm \frac{\pi}{3}$  avec l'horizontale ; le pôle réel demeurant sur l'axe des réels négatifs, son argument vaut  $-\pi$ .

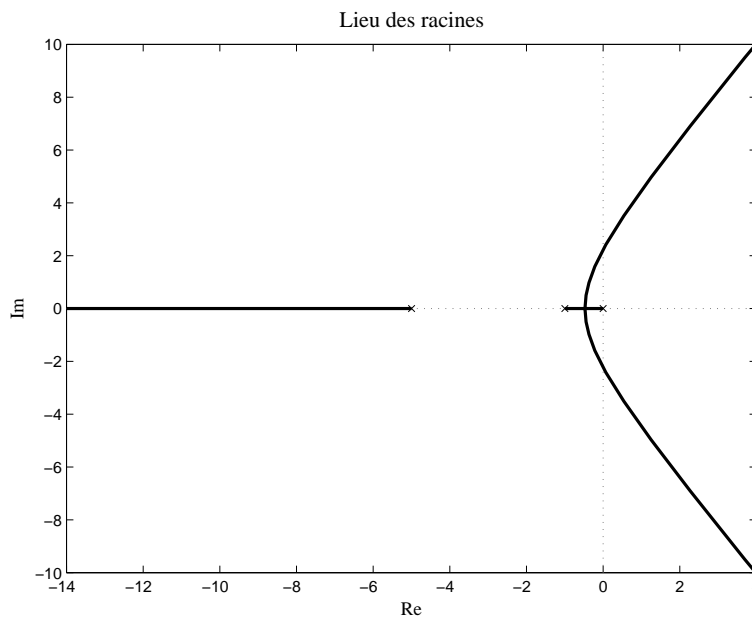


FIG. 2.10 – Lieu des racines de  $1 + K \frac{1}{s(s-p_1)(s-p_2)} = 0$

### 2.3.4 Marges de stabilité

On définit la *marge de phase* par :

$$M_\varphi = 180^\circ + \text{Arg}\{CGH(j\omega_c)\},$$

où  $\omega_c$  est telle que  $|CGH(j\omega_c)|_{dB} = 0 \text{ dB}$  et la *marge de gain* par :

$$M_G = -|CGH(j\omega_\pi)|_{dB}$$

où  $\omega_\pi$  est tel que  $\text{Arg}\{CGH(j\omega_\pi)\} = -180^\circ$ . Ces deux grandeurs sont appelées *marges de stabilité* et caractérisent le système en boucle ouverte. L'intérêt est qu'elles permettent de conclure sur la stabilité du système en boucle fermée, d'après le théorème suivant.



**Théorème 2.3** *Le système est stable en boucle fermée si la marge de phase ou la marge de gain du système en boucle ouverte est positive.*

Ce critère peut très bien s'appliquer dans l'un ou l'autre des diagrammes harmoniques. On l'applique fréquemment dans le diagramme de Bode, mais les marges de stabilité sont aussi faciles à observer dans le diagramme de Black.

## 2.4 Précision

### 2.4.1 Expression de l'erreur

On considère un système asservi sous la forme de la figure 2.5 page 28. On suppose donc que le système est sans perturbation de modèle ou de mesure. D'après les équations (2.2) et (2.3) :

$$E(s) = Y_r(s) - H(s)Y(s),$$

et donc, d'après (2.5) :

$$E(s) = Y_r(s) - \frac{CGH(s)Y_r(s)}{1 + CGH(s)}.$$

L'expression de l'erreur est donc finalement :

$$E(s) = \frac{Y_r(s)}{1 + CGH(s)}. \quad (2.11)$$

### 2.4.2 Précision statique et précision dynamique

La *précision statique* du système est caractérisée par l'erreur en régime permanent en réponse à un échelon :

$$\varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t).$$

Cette erreur est appelée *erreur statique* (ou *erreur de position*). D'après le théorème de la valeur finale (voir les propriétés de la transformée de Laplace, tableau B.1 page 67), on peut la calculer à l'aide de l'équation (2.11) par :

$$\varepsilon_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s). \quad (2.12)$$

On parlera de *précision dynamique* dès que l'entrée du système évolue de manière continue dans le temps : par exemple on désigne par *erreur de vitesse* la valeur de l'erreur quand l'entrée du système est une rampe.

### 2.4.3 Expression générale de l'erreur

D'après (2.11) et (2.12), l'expression générale de l'erreur d'un système asservi est :

$$\varepsilon_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sY_r(s)}{1 + CGH(s)}. \quad (2.13)$$

Les transformées de Laplace des signaux type échelon, rampe, *etc.* servant à analyser la précision d'un système sont connues. Il est donc possible de calculer l'erreur statique ou dynamique du système si l'on connaît le comportement aux limites de  $CGH(s)$ . La forme générale de la fonction de transfert d'un système linéaire invariant, donnée par l'équation (1.3) peut s'écrire, pour la FTBO :

$$CGH(s) = \frac{K 1 + \beta_1 s + \dots}{s^c 1 + \alpha_1 s + \dots} \quad (2.14)$$

où  $c$ , la classe du système, correspond au nombre d'intégrations pures présentes dans le modèle du système. Alors, la précision du système peut être calculée de manière systématique à l'aide de (2.13) et (2.14) et l'on établit les résultats du tableau 2.1. On

entrée	échelon $Y_r(s) = \frac{E_0}{s}$	rampe $Y_r(s) = \frac{V_0}{s^2}$
classe 0	$\frac{E_0}{1 + K}$	$\infty$
classe 1	0	$\frac{V_0}{K}$
classe 2	0	0

TAB. 2.1 – Précision des systèmes asservis linéaires continus, en fonction de leur classe

comprend bien comment ce tableau s'étend au cas des systèmes de classe supérieure à deux et au cas d'entrées polynômiales de degré supérieur ou égal à deux.

### 2.4.4 Dualité stabilité-précision

Les notions de stabilité et de précision ont la particularité de ne pas aller de pair. Comme on peut le voir d'après le tableau 2.1, un système de classe 0 est d'autant plus précis que son gain statique est grand. Cependant, si son gain statique augmente, sa marge de phase diminue. Pour le comprendre, il suffit d'observer que la courbe de gain dans le diagramme de Bode est alors translatée vers le haut (voir FIG. 2.11 PAGE CI-CONTRE).

Autre exemple : si le système comporte une intégration (ou qu'on en ajoute une volontairement pour annuler l'erreur, comme on le verra plus loin) les risques de voir le système devenir instable sont plus grands, le système ayant, d'emblée, *i. e.* aux basses fréquences, une phase de  $-90$  deg. C'est pour cela que l'on parle de *dualité stabilité-précision*.

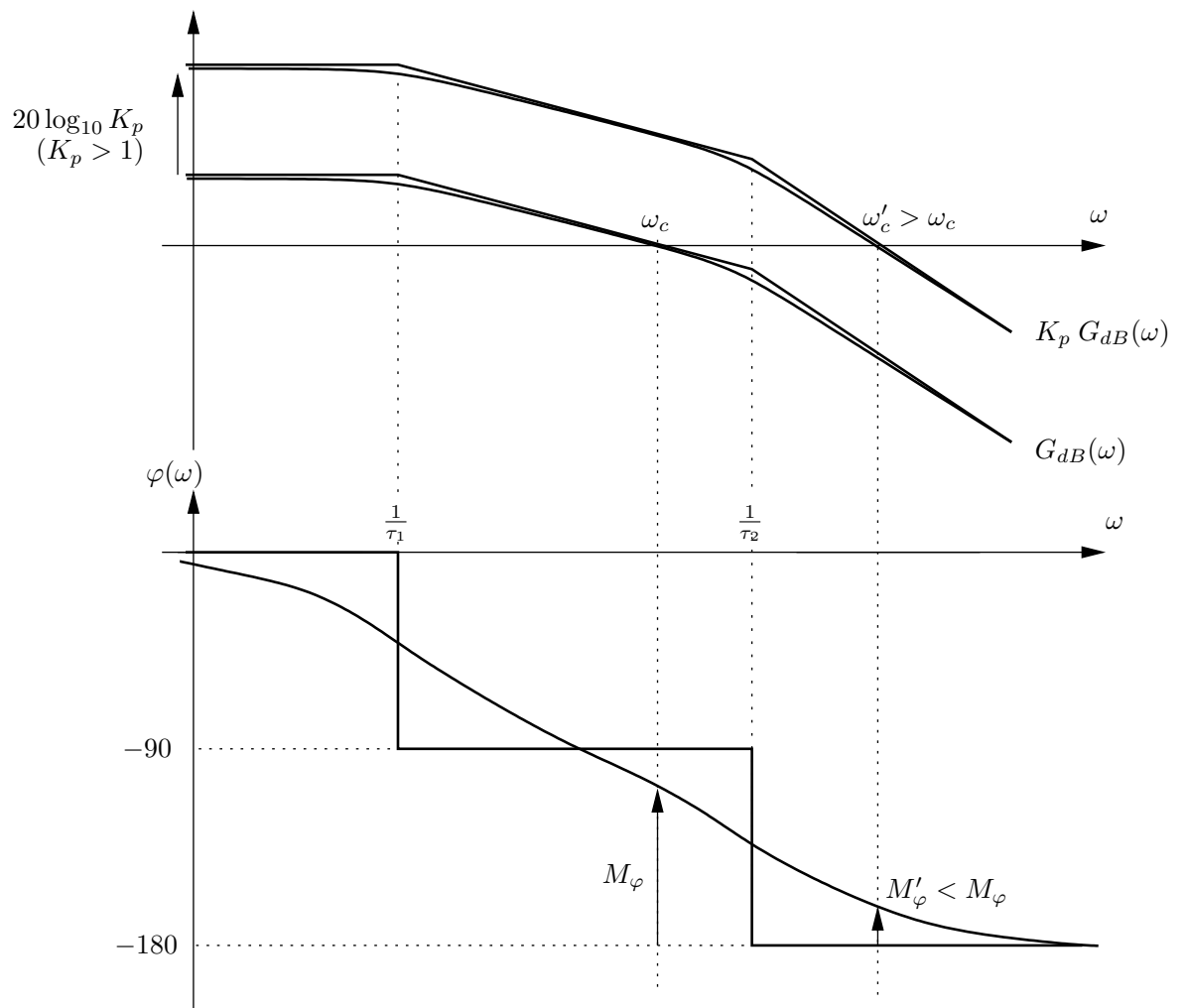


FIG. 2.11 – Dualité stabilité-précision



# Chapitre 3

## Commande des systèmes à temps continu

La commande  $u(t)$  d'un système à temps continu peut être modifiée en asservissant ce système, comme on l'a vu depuis le début de ce chapitre. Outre la structure même de l'asservissement (la façon de boucler le système) la façon naturelle d'adapter la commande du système pour obtenir la sortie désirée est d'utiliser un bloc additionnel : le correcteur. La *commande d'un système* consiste donc à choisir un type de correcteur et ses paramètres pour remplir un *cahier des charges* donné (on parle souvent de *synthèse d'un correcteur*). On va s'intéresser dans le cadre de ce cours spécifiquement aux *correcteurs série*. Il s'agit de correcteurs placés en début de chaîne directe, après le comparateur. La commande du système résulte alors de l'action du correcteur sur l'erreur du système<sup>1</sup>.

### 3.1 Cahier des charges

Le problème posé au concepteur de la commande d'un système à temps continu doit logiquement se présenter sous la forme d'un cahier des charges. Il s'agit d'un certain nombre de contraintes à satisfaire pour que la sortie du système offre les propriétés (dépassement maximal, précision statique ou dynamique, temps de réponse, bande passante, *etc.*) désirées. S'il est bien conçu, ce cahier des charges doit bien évidemment être réalisable : l'ensemble des contraintes imposées doivent être compatibles et les performances attendues doivent tenir compte de la réalisation pratique et donc des limitations imposées à tout asservissement. On peut reformuler un cahier des charges en termes de :

- stabilité : le système doit bien évidemment être stable, mais il faut généralement que son amortissement soit bien maîtrisé. Certaines applications imposeront par exemple qu'il n'y ait pas de dépassement (asservissement de position). On admet généralement que dans une application standard, une marge de phase comprise entre 50 et 70 deg. assure un amortissement optimal du système. En dessous de

---

<sup>1</sup>La découverte d'autres structures d'asservissement, moins fréquentes mais parfois intéressantes (bouclage parallèle, boucles imbriquées, *etc.*) est laissée au lecteur, qui rencontrera ces structures dans la plupart des ouvrages de références cités dans la bibliographie.

cette valeur le système oscillera beaucoup lors des transitoires. Au-delà, il risque d'être trop amorti, au détriment de la rapidité ;

- précision : selon le cahier des charges et la classe du système, on pourra attendre des performances plus ou moins élevées en terme de précision. Si le système est de classe 0, son erreur statique n'est pas nulle, mais inversement proportionnelle au gain de la chaîne directe. Plutôt que d'augmenter ce gain, et donc de risquer de saturer l'entrée du système ou de le rendre instable, on préférera introduire une intégration ;
- rapidité : la rapidité du système en boucle fermée est liée à sa bande passante. Un système ayant une pulsation de coupure élevée sera caractérisé par une faible constante de temps, et donc sera rapide. Cela étant, il faut là encore faire un compromis, la marge de phase diminuant si la bande passante augmente.

Bien évidemment, selon le nombre de contraintes à satisfaire simultanément, on comprend aisément que le correcteur obtenu sera plus ou moins complexe.

### 3.2 Correcteurs PID : introduction

Les correcteurs série les plus répandus (voir figure 3.1) sont de type *proportionnel, intégral, dérivé (PID)* car ils permettent d'appliquer ces trois actions élémentaires au signal d'erreur  $E(s)$  pour commander le système. La fonction de transfert d'un correcteur PID idéal est :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right). \quad (3.1)$$

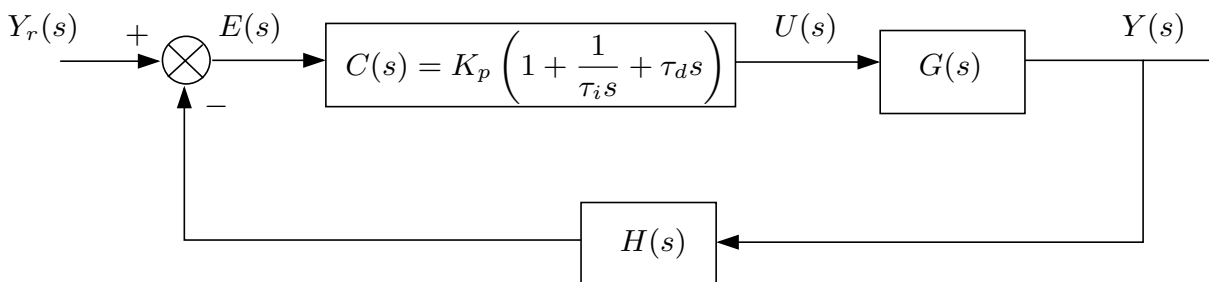


FIG. 3.1 – Schéma bloc d'un asservissement avec correcteur série PID

En pratique, à une catégorie de systèmes à asservir donnée correspond un type de correcteur adapté : celui dont on sait, par expérience et/ou étude, qu'il va le mieux convenir. Pour effectuer un choix judicieux, il faut connaître les effets des différentes actions, proportionnelle, intégrale et dérivée. On va d'abord les analyser séparément.

**Action proportionnelle** D'après le tableau 2.1, on voit que la précision du système est améliorée par une augmentation du gain de la chaîne directe, ce qui est réalisé par une correction proportionnelle. En contrepartie la stabilité diminue si le gain augmente. Ceci est une illustration de la dualité stabilité-précision. Le temps de montée est réduit

et le système plus oscillant. En revanche, une augmentation du gain proportionnel ne diminue pas nécessairement le temps de réponse du système.

**Action intégrale** L'ajout d'un terme intégral dans la chaîne directe augmente sa classe. Par conséquent la précision est améliorée : un système stable, sans intégration (*i. e.* de classe 0), verra son erreur statique annulée par une action intégrale. En contrepartie la marge de phase est diminuée de 90 deg par l'ajout d'une intégration pure. Enfin, un correcteur intégral présente le défaut de saturer facilement, si l'erreur ne devient pas nulle. Il faut éventuellement envisager l'ajout d'un dispositif d'anti-saturation.

**Action dérivée** Dans le cas d'un système de classe supérieure ou égale à un, cette action permet d'augmenter la bande passante du système ou de rendre celui-ci plus stable, à bande passante égale. Un correcteur de type dérivé n'est pas causal, donc pas physiquement réalisable. On lui substitue donc systématiquement un correcteur approché<sup>2</sup>, comme nous le verrons par la suite. On parle alors de *filtrage du terme dérivé*. Le terme dérivé  $K_p \tau_d s$  du correcteur est ainsi remplacé par l'approximation causale  $\frac{\tau_d s}{1 + \frac{\tau_d}{N} s}$ , avec  $N$  assez grand.

Les actions précédentes sont généralement combinées. Les correcteurs les plus couramment rencontrés sont de type *proportionnel, proportionnel et intégral* (PI) ou *retard de phase* (PI approché), *proportionnel et dérivé* (PD) ou *avance de phase* (PD approché) et enfin PID ou *avance et retard de phase* (PID approché). La forme déduite de (3.1) par filtrage du terme dérivé est dite *forme standard du correcteur PID* :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \frac{\tau_d s}{1 + \frac{\tau_d}{N} s} \right), \quad (3.2)$$

avec  $N \geq 5$ .

Bien évidemment la complexification d'un correcteur rend plus difficile sa synthèse. Les différentes méthodes que nous allons voir dans la suite de cette section ne sont bien évidemment pas exhaustives, mais dressent néanmoins un bon aperçu des méthodes modernes et efficaces.

### 3.3 Adéquation correcteurs/systèmes à asservir

Le choix du correcteur est généralement dicté par la faculté qu'il a de corriger les lacunes du système asservi non corrigé. Nous allons ainsi évoquer ici les différentes combinaisons correcteurs-systèmes permettant de réaliser des asservissements aux performances satisfaisantes.

<sup>2</sup>Les correcteurs dits *approchés* sont en fait des correcteurs construits à partir d'un choix de pôles et de zéros. Leur fonction de transfert diffère donc de la forme habituelle des PID. Ceci n'empêche pas que le choix des pôles et zéros les rendent proches de tel ou tel correcteur PID standard.

### 3.3.1 Correcteur à avance de phase (et correcteur PD)

Un correcteur à avance de phase a une fonction de transfert de la forme :

$$C(s) = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + a\tau_d s},$$

avec  $a < 1$ . Il peut être vu comme un correcteur PD approché, si  $a \ll 1$  : l'action de ce correcteur approche en effet celle d'un correcteur PD aux pulsations inférieures à  $\omega = \frac{1}{a\tau_d}$ , comme l'illustre la figure 3.2.

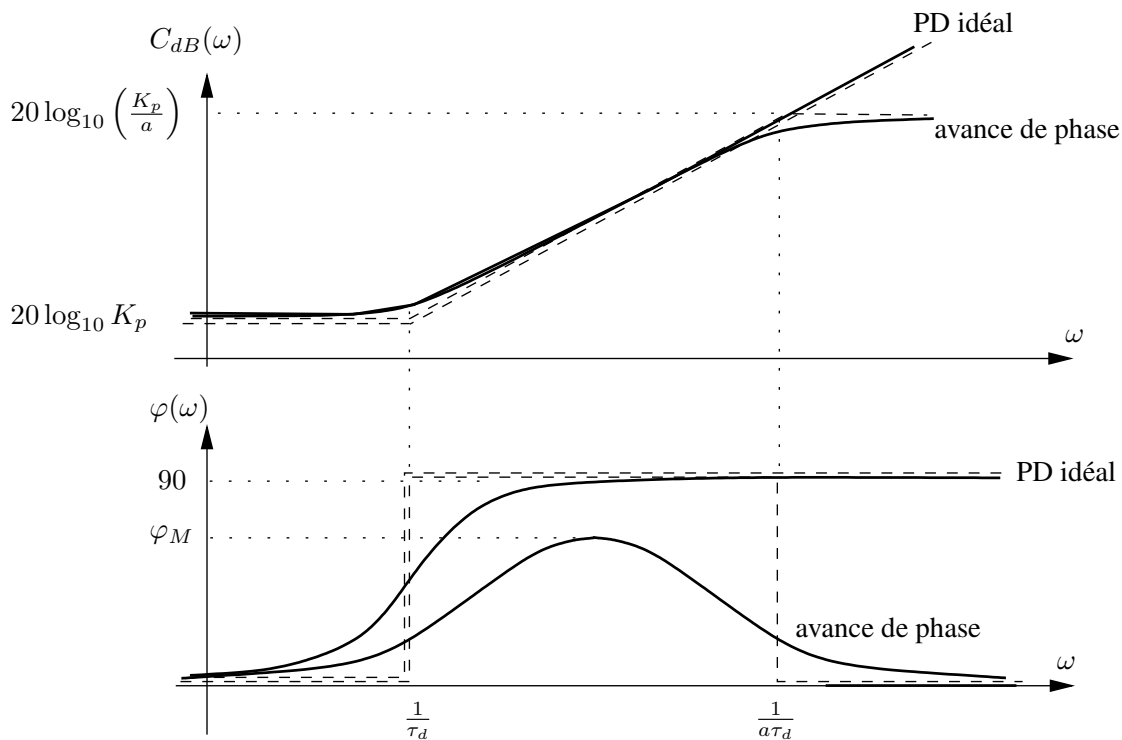


FIG. 3.2 – Correcteurs à avance de phase et PD idéal

L'intérêt de ce type de correcteur est d'ajouter de la phase au système en boucle ouverte, dans une certaine bande de fréquence. Ceci peut permettre, sous certaines conditions, de rendre le système stable ou d'augmenter sa marge de phase. Pour cette raison *le correcteur à avance de phase se prête bien à la correction des systèmes peu stables*, comme les systèmes de classe supérieure ou égale à un. On montre que l'avance de phase maximale amenée par le correcteur vaut :

$$\sin \varphi_M = \frac{1 - a}{1 + a},$$

à la pulsation :

$$\omega_M = \frac{1}{\sqrt{a\tau_d}}.$$

A titre d'exemple, un coefficient  $a = 0,1$  occasionne une avance de phase maximale  $\varphi_M = 54,9$  deg.



### 3.3.2 Correcteur PI (et correcteur à retard de phase)

Le correcteur PI a une fonction de transfert de la forme :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) = \frac{K_p(1 + \tau_i s)}{\tau_i s}.$$

La figure 3.3 donne son diagramme de Bode.

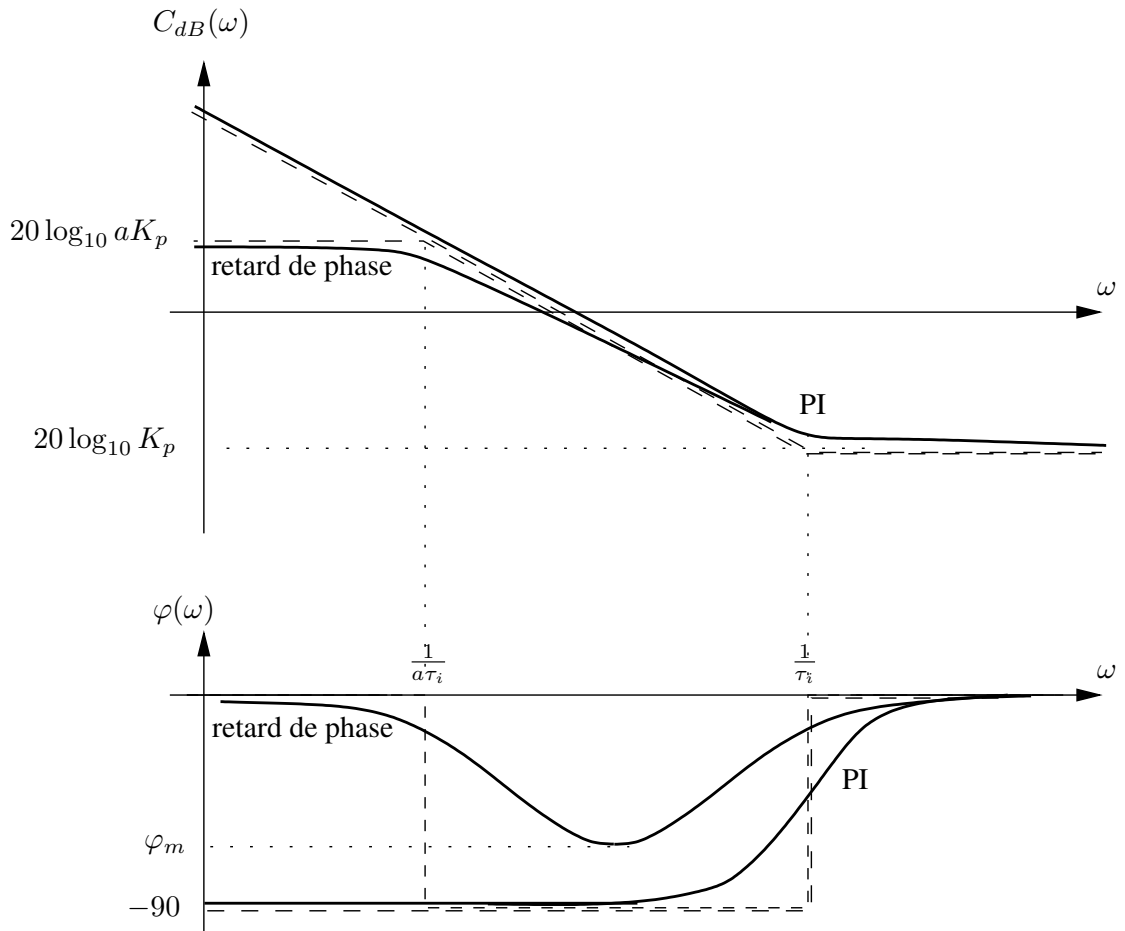


FIG. 3.3 – Correcteurs PI et retard de phase

Ce correcteur possède une intégration. *Il convient donc bien lorsque l'on souhaite annuler l'erreur statique d'un système de classe 0.* Contrairement au correcteur PD, le PI est tout à fait réalisable physiquement ; c'est d'ailleurs le correcteur le plus utilisé. En revanche, du fait de son action intégrale, il présente l'inconvénient de saturer éventuellement l'entrée du système. Il faut alors l'associer à un dispositif d'anti-saturation, constitué le plus souvent d'un simple écréteur.

Le correcteur à retard de phase, dual du correcteur à avance de phase, a pour fonction de transfert :

$$C(s) = aK_p \frac{1 + \tau_i s}{1 + a\tau_i s}$$

avec  $a > 1$ . Il possède un comportement approchant celui du PI aux basses fréquences, si  $a \gg 1$ , comme l'illustre la figure 3.3.

### 3.4 Méthode du lieu des racines

Comme on l'a vu, le lieu des racines est le lieu des pôles de la fonction de transfert d'un système en boucle fermée, lorsque le gain de la chaîne directe varie. On peut bien évidemment inclure un correcteur à cette chaîne directe et l'on obtient la figure 3.4. Ceci

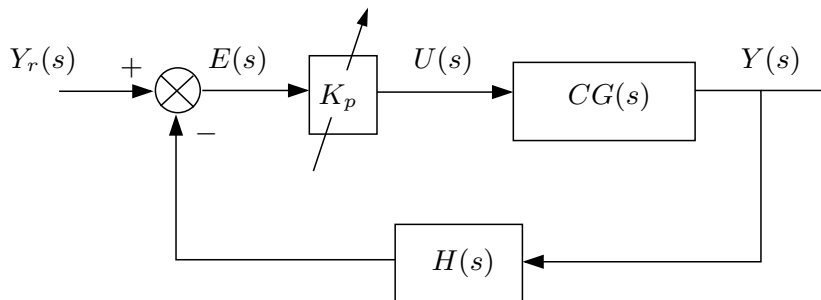


FIG. 3.4 – Lieu des racines : interprétation avec correcteur

fournit donc une méthode de synthèse utilisable quel que soit le système, à condition de savoir tracer son lieu des racines. Pour réaliser la synthèse à proprement parler, il faut être capable d'obtenir des pôles et zéros conférant au système le comportement dynamique souhaité dans le cahier des charges. Il s'agit donc d'une *méthode de placement de pôles*.

Le cas le plus simple est celui où l'on souhaite donner un comportement dynamique similaire à celui d'un système du second ordre. Selon le schéma de la figure 1.8 page 17, les pôles d'un système du second ordre se situent à l'intersection d'une demi-droite définissant l'amortissement du système et d'un cercle définissant sa pulsation naturelle. On peut donc associer au lieu des racines des demi-droites de même amortissement rayonnant depuis l'origine dans le demi-plan complexe gauche. De même, on peut tracer dans ce demi-plan les demi-cercles centrés sur l'origine, de même pulsation naturelle. Enfin, pour un système du second ordre, on a montré que le temps de réponse d'un système possédant une paire de pôle complexe peut être approché par :  $t_r = \frac{3}{\xi\omega_n}$ . D'après la figure 1.8 page 17, les systèmes du second ordre de même temps de réponse ont leurs pôles sur une même droite verticale car  $-\xi\omega_n$  est la partie réelle d'une paire de pôles complexes conjugués.

La correction consiste alors à ajouter des pôles et des zéros au correcteur pour compenser ceux que l'on souhaite compenser et déformer le lieu pour obtenir un comportement de type second ordre, tout en remplissant le cahier des charges. Si l'on a compensé tous les zéros et les pôles du système en boucle ouverte et que l'on a rajouté deux pôles complexes correctement amortis au correcteur, i.e. avec un amortissement supérieur à l'amortissement désiré en boucle fermée, on obtient un lieu dont la forme est semblable à celle du lieu de la figure 3.5 page suivante.

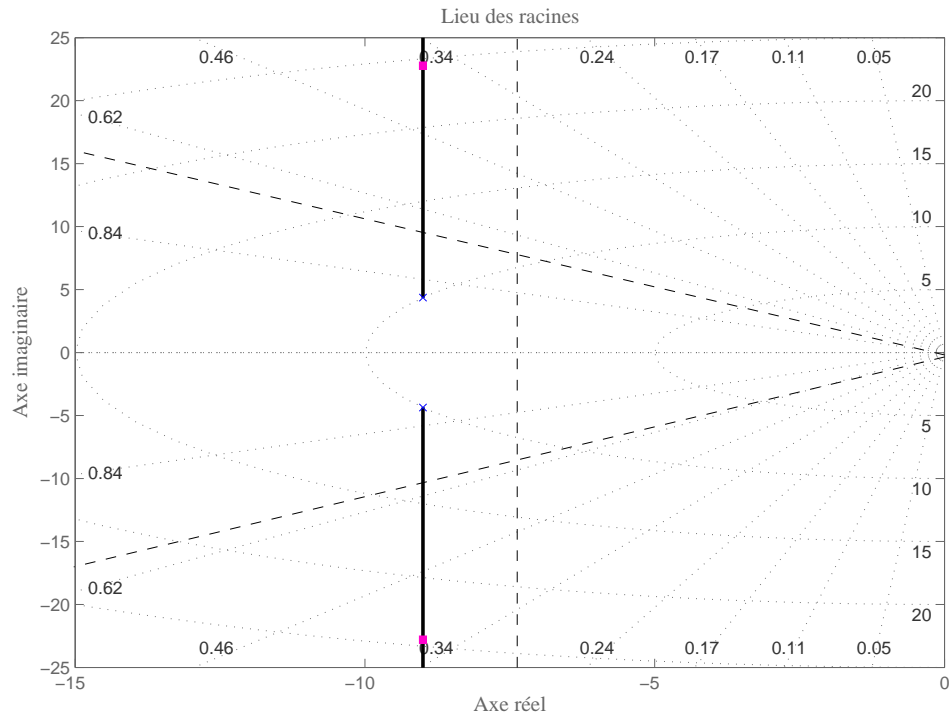


FIG. 3.5 – Synthèse dans le lieu des racines

Ceci étant tous les systèmes ne peuvent pas être transformés en un système du second ordre par compensation des pôles et zéros non désirés. Certaines compensations doivent en effet être évitées, car elles induisent des conséquences contraires à ce que l'on souhaite. Notamment on ne compensera jamais un pôle à partie réelle positive. En effet :

$$\frac{s - (p_i + \Delta p_i)}{s - p_i} = 1 - \frac{\Delta p_i}{s - p_i}.$$

Ainsi, dans le cas où le pôle compensé est à partie réelle positive, un système imparfaitement compensé (erreur de modèle par exemple) sera instable. Pour les mêmes raisons on ne compense pas une paire de pôles très oscillants (pôles complexes conjugués très proches de l'axe des imaginaires). Remarquons que les logiciels de simulation facilitent grandement l'application de ce type de correction : l'outil `rltool` de `Matlab` est ainsi une excellente interface pour appliquer la méthode des racines. Son utilisation sera illustrée aussi bien en cours qu'en TP.

**Exemple** Le lieu représenté à la figure 3.6 est le lieu des racines de l'équation :

$$1 + \frac{K_p K_G}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = 0,$$

avec  $\tau_1 > \tau_2$ . Un tel lieu indique la position des pôles en boucle fermée d'un système du second ordre de gain  $K_G$  possédant deux pôles réels en boucle ouverte, l'asservissement étant réalisé à l'aide d'un correcteur proportionnel dont le gain  $K_p$  varie de 0

à  $+\infty$ . C'est typiquement le cas du MCC asservi en vitesse à l'aide d'un correcteur proportionnel.

Le lieu comporte 2 branches, puisque le système est d'ordre deux. Les racines recherchées sont réelles avant le point de séparation d'affixe :

$$\delta = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1\tau_2}$$

pour :

$$K_p \leq \frac{1}{K_G} \left( \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\tau_1\tau_2} \right)^2.$$

À partir de cette valeur de  $K_p$ , les branches quittent l'axe réel et font un angle de  $\pm \frac{\pi}{2}$  avec l'horizontale. Tous les pôles qui se situent sur les branches complexes admettent une partie réelle négative égale à  $\delta$ , qui est à la fois point d'intersection des asymptotes et point de séparation.

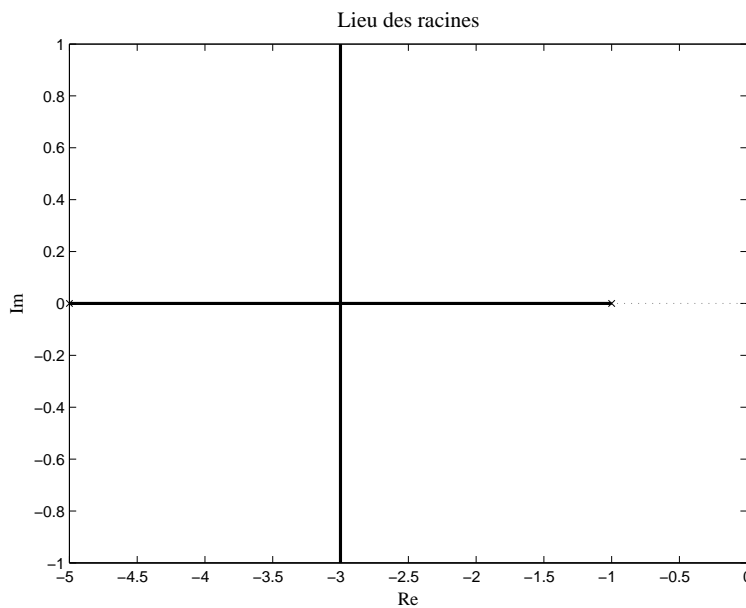


FIG. 3.6 – Lieu des racines de  $1 + \frac{K_p}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} = 0$

Un tel système est de classe 0 et possède donc une erreur statique non nulle. On envisage de le corriger par un correcteur PI de façon à compenser le pôle électromécanique lent du MCC tout en ajoutant l'effet intégral qui garantit une erreur statique nulle. La fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé en compensant le pôle dominant est :

$$CGH(s) = \frac{K_p K_G}{s(1 + \tau_2 s)},$$

le correcteur ayant pour fonction de transfert

$$C(s) = K_p \frac{1 + \tau_2 s}{s}$$

Le lieu des racines du système corrigé est alors le lieu des racines de l'équation :

$$1 + \frac{K_p K_G}{s(1 + \tau_1 s)} = 0,$$

représenté à la figure 3.7. Il est de forme semblable au lieu initial, si ce n'est que ses

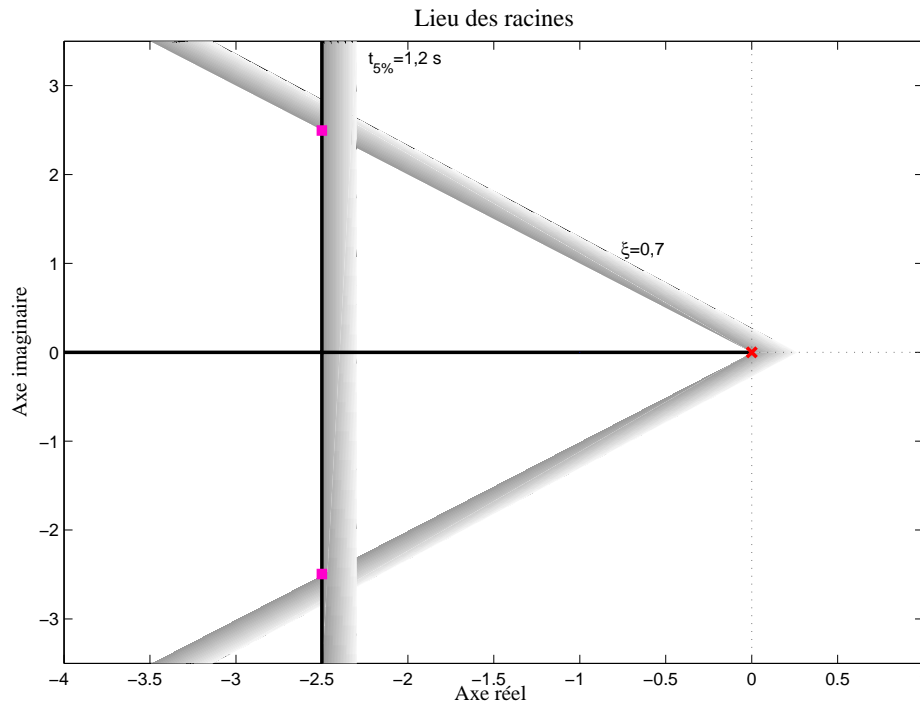


FIG. 3.7 – Lieu des racines après correction

propriétés : valeur du point de séparation des branches infinies, points de départ, *etc.* ont été modifiés. On peut régler le gain pour obtenir l'amortissement souhaité pour le système comme cela est représenté à la figure 3.7. On remarquera que le temps de réponse le plus rapide est obtenu pour des pôles complexes (sinon un des pôles est réel et plus lent que la paire de pôles complexes), et qu'il ne dépend pas de l'amortissement du système, qui peut être choisi pour remplir le cahier des charges. Le temps de réponse ne peut être réglé inférieur à :

$$t_{5\%} = \frac{3}{\xi \omega_n} = -\frac{3}{\delta}$$

## 3.5 Méthodes harmoniques

### 3.5.1 Correction PI

On peut aisément régler un correcteur PI :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) = \frac{K_p(1 + \tau_i s)}{\tau_i s}$$

en utilisant le diagramme de Bode.

On considère pour simplifier que le système est de classe zéro et possède deux pôles réels, associés aux constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , avec  $\tau_1 \gg \tau_2$ . On choisit de compenser le pôle dominant par le zéro du correcteur PI, soit :

$$\tau_i = \tau_1.$$

Le diagramme de Bode asymptotique du système corrigé est représenté schématiquement à la figure 3.8. Pour le réglage du correcteur PI, il est alors intéressant de spécifier les contraintes du cahier des charges en termes de marge de phase désirée  $M_\varphi$ , typiquement de 45 deg. Soit  $\omega_c$  la pulsation à laquelle le système a pour phase  $-180 + M_\varphi$ . Il suffit alors d'ajuster le gain  $K_p$  pour que le gain en dB soit nul à la pulsation  $\omega_c$ .

### 3.5.2 Correction à avance de phase

On considère maintenant un correcteur à avance de phase :

$$C(s) = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + a\tau_d s}$$

avec  $a < 1$ . On suppose que le système est de classe 1 et possède, outre l'origine, un autre pôle réel, associé à la constante de temps  $\tau_1$ . La méthode présentée impose tout d'abord que la contrainte de rapidité du système soit transformée en une contrainte de bande passante, si ce n'est pas déjà le cas. Soit  $\omega_c$  la bande passante désirée pour le système corrigé. Le réglage consiste à apporter une avance de phase adaptée, à cette pulsation. L'avance de phase maximale  $\varphi_M$  du correcteur étant paramétrable à la pulsation  $\omega_M$ , on choisit tout d'abord  $\omega_M = \omega_c$ . La contrainte de stabilité doit ensuite être exprimée en termes de marge de phase, pour déterminer l'avance de phase :

$$\varphi_M = M_\varphi - (180 - \text{Arg}\{GH(j\omega_c)\}).$$

Dans le cas du système considéré, en supposant que l'on souhaite (logiquement) augmenter la bande passante,  $\text{Arg}\{GH(j\omega_c)\}$  est petit et donc  $\varphi_M \simeq M_\varphi$ . Ceci n'est cependant pas transposable dans le cas général, où il faudra évaluer le déphasage de la boucle ouverte en  $\omega_c$ . En fonction de l'avance de phase  $\varphi_M$  ainsi déterminée, on choisit :

$$a = \frac{1 - \sin \varphi_M}{1 + \sin \varphi_M}.$$

Enfin, on règle  $K_p$  pour que le gain en dB du système en boucle ouverte soit nul à la pulsation  $\omega_c$ . Cette méthode est illustrée à la figure 3.9 page 52.

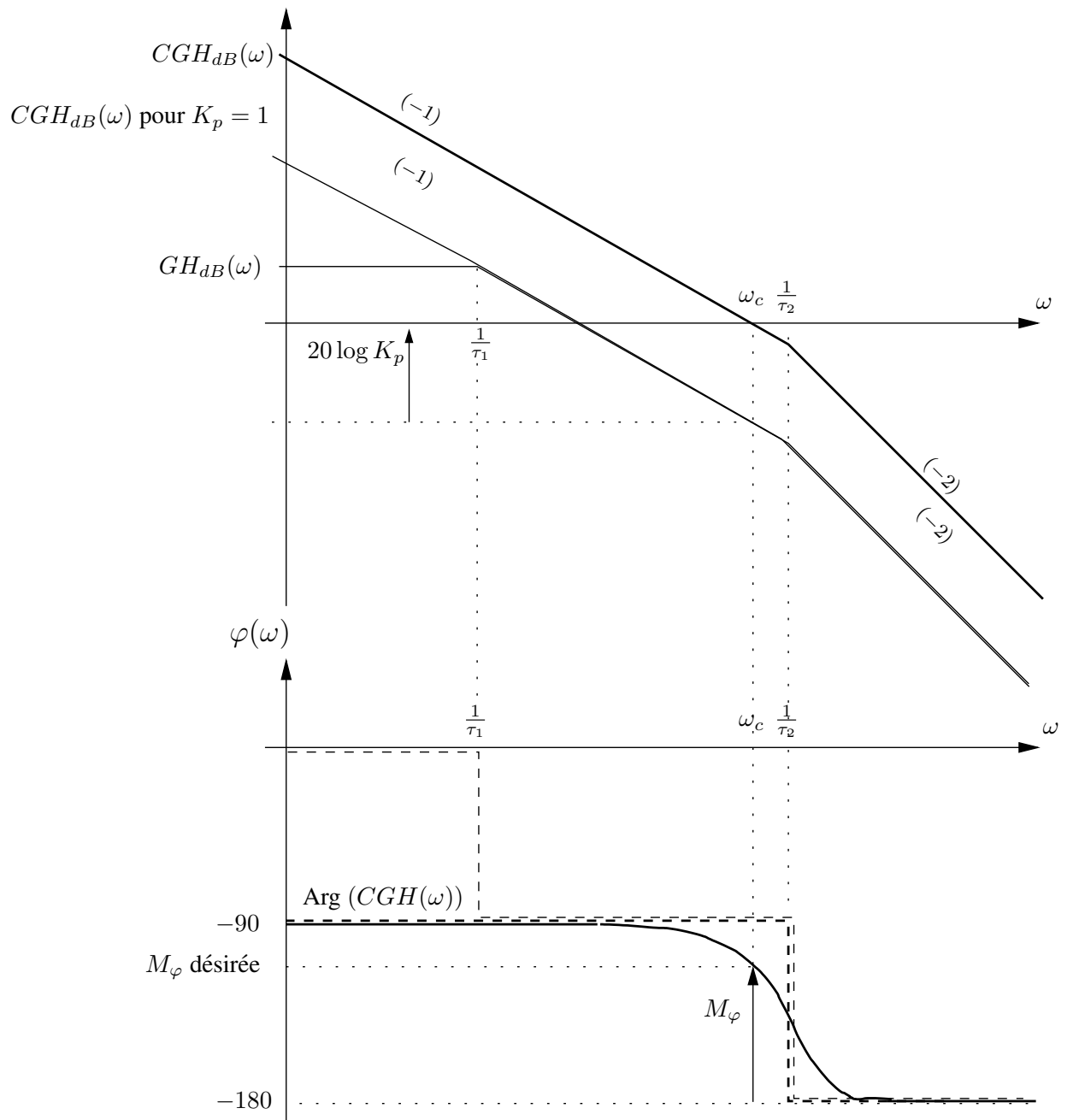


FIG. 3.8 – Principe de la synthèse d'un correcteur PI par une méthode harmonique

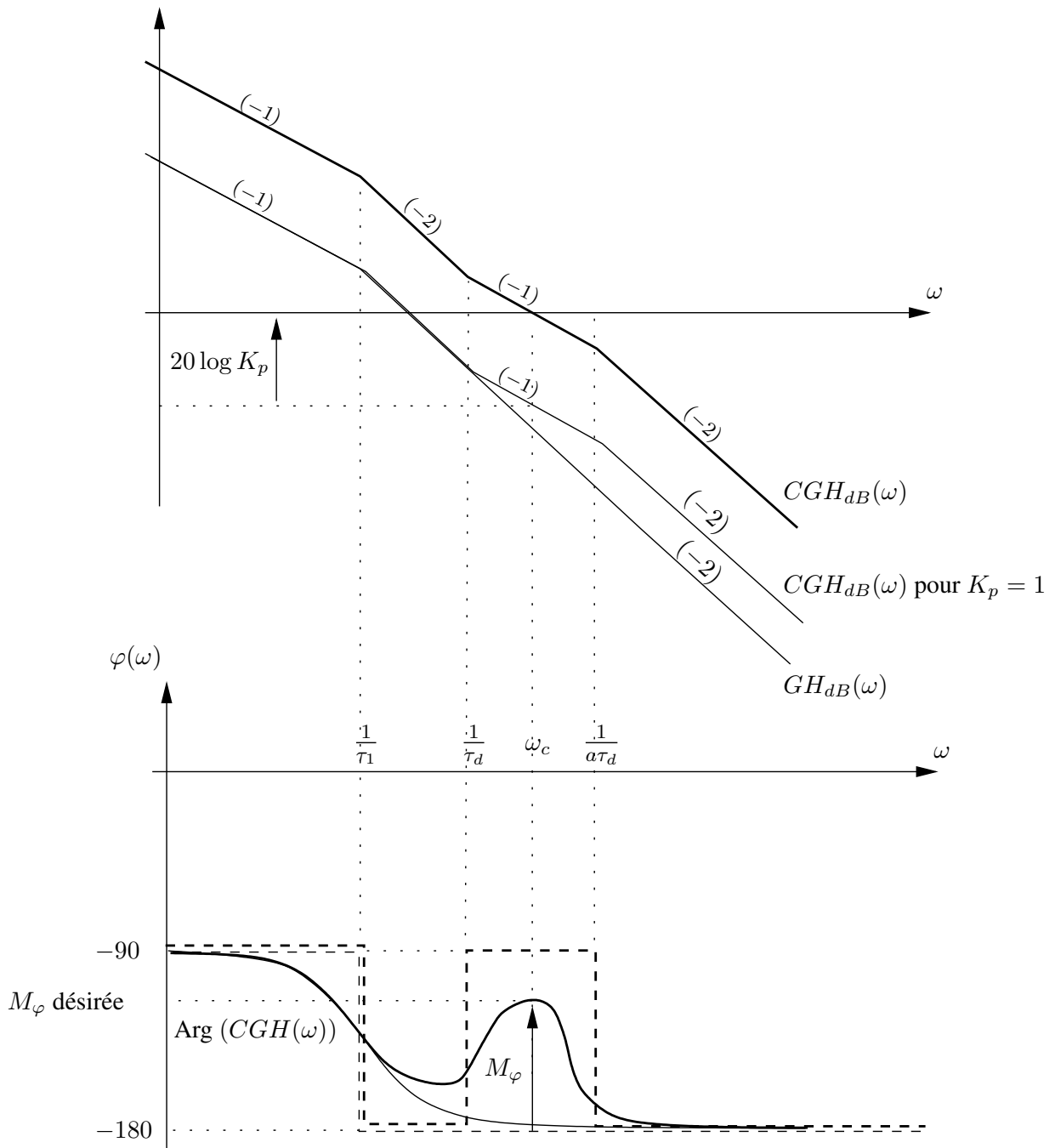


FIG. 3.9 – Principe de la synthèse d'un correcteur à avance de phase par une méthode harmonique



## 3.6 Méthode de réglage automatique

Les méthodes exposées dans cette section permettent d'effectuer le réglage d'un correcteur PID à partir d'une identification préalable du système, puis d'un réglage correspondant à un critère donné.

### 3.6.1 Méthodes de Ziegler-Nichols

Contrairement aux méthodes exposées dans les paragraphes précédents, les *méthodes de Ziegler-Nichols* permettent d'obtenir un correcteur de type PID sans connaître de modèle précis de la dynamique du système. Les deux méthodes présentées sont empiriques et se basent sur des essais.

**Première méthode** La première méthode résulte de la caractérisation de la réponse indicielle du système. En effet une grande variété de systèmes réels ont une réponse indicielle de la forme de celle présentée à la figure 3.10. Le système est ainsi assimilé à un premier ordre de constante temps  $\tau$ , en retard de  $t_r$  :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-t_r s}}{1 + \tau s}.$$

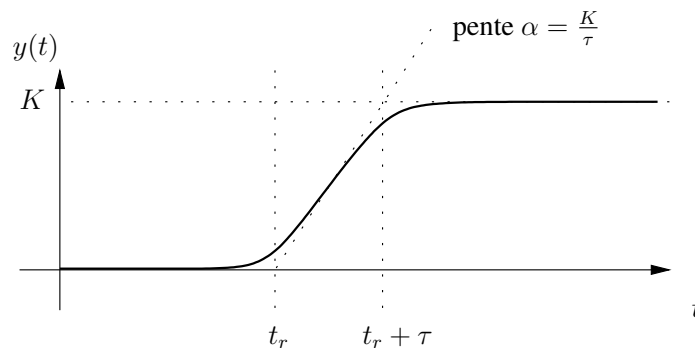


FIG. 3.10 – Caractérisation de la réponse indicielle d'après la méthode de Ziegler-Nichols

La première méthode de Ziegler-Nichols se base sur ce modèle et permet d'obtenir un amortissement proche de 0,2 avec les réglages indiqués au tableau 3.1 page suivante pour un correcteur PID de fonction de transfert  $K_p(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s)$ . Les valeurs des paramètres sont données en fonction de la pente  $\alpha$  de la réponse et du temps de retard  $t_r$ , identifiées au cours d'un essai.

**Seconde méthode** La seconde méthode se base sur l'étude du régime critique de la réponse harmonique du système en boucle fermée. On effectue l'asservissement du système avec retour unitaire à l'aide d'un correcteur proportionnel réglable. Lorsque le gain augmente le système en boucle fermée devient moins stable. On note le gain

type de correcteur	coefficients du correcteur		
	$K_p$	$\tau_i$	$\tau_d$
P	$\frac{1}{\alpha t_r}$		
PI	$\frac{0,9}{\alpha t_r}$	$\frac{t_r}{0,3}$	
PID	$\frac{1,2}{\alpha t_r}$	$2t_r$	$0,5t_r$

TAB. 3.1 – Coefficients du correcteur selon la première méthode de Ziegler-Nichols

critique  $K_c$  qui conduit à des oscillations entretenues, ainsi que la fréquence  $f_c$  de ces oscillations. Alors, on peut obtenir un correcteur PID en suivant les valeurs indiquées au tableau 3.2. Cette méthode assure théoriquement le même amortissement que précédemment.

type de correcteur	coefficients du correcteur		
	$K_p$	$\tau_i$	$\tau_d$
P	$0,5K_c$		
PI	$0,45K_c$	$\frac{1}{1,2 f_c}$	
PID	$0,6K_c$	$\frac{1}{2 f_c}$	$\frac{1}{8 f_c}$

TAB. 3.2 – Coefficients du correcteur selon la deuxième méthode de Ziegler-Nichols

### 3.6.2 Méthode du relais

#### Principe

Dans l'industrie, l'automatisation de la commande des procédés pose un problème pratique simple : comment, en appuyant sur un simple bouton, peut-on régler le correcteur d'un système asservi pour obtenir des performances optimales ? La solution proposée par la *méthode du relais*, qui date du milieu des années 1980, permet de réaliser ce *réglage automatique* ou *auto-réglage* (→ auto-tuning, self-tuning). Pour cela, il faut tout d'abord que le système soit démarré, en boucle fermée, et amené à son point de fonctionnement nominal. Ensuite, de manière transparente pour l'utilisateur, la procédure se décompose en deux phases :

- on remplace tout d'abord le correcteur PID initial (généralement proportionnel) par un relais en appuyant sur un bouton, comme cela est illustré à la figure 3.11.

La commande par le relais a pour effet de provoquer une oscillation du système autour de son point de fonctionnement, ce qui permet son identification partielle ;

- un correcteur PID est calculé d'après la phase d'identification précédente puis, dans un second temps, ce correcteur est utilisé quand on rebascule l'interrupteur.

Cet auto-réglage peut être théoriquement effectué à tout moment. En revanche, il ne concerne en principe que les systèmes stables.

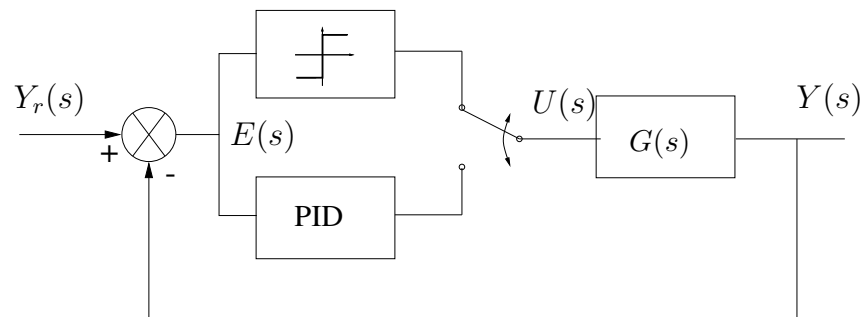


FIG. 3.11 – Principe de la méthode du relais

La procédure d'identification du système est basée sur l'hypothèse (vérifiée en pratique) que la plupart des systèmes oscillent lorsqu'ils sont commandés par un relais. Ainsi le comportement harmonique du système peut être identifié et le PID réglé à partir de cette identification. Cette procédure rappelle la seconde méthode de Ziegler Nichols. Elle a néanmoins un avantage indéniable sur celle-ci : elle ne nécessite pas d'atteindre la limite de stabilité du système. En effet, les oscillations produites par le relais sont stables dans les cas étudiés. Par ailleurs, l'amplitude de ces oscillations dépend directement de l'amplitude du relais, ce qui permet de limiter les sollicitations sur le matériel.

### Identification

Quand le système en boucle fermée a atteint un état d'équilibre stable, le relais est actionné. On prouve qu'il existe alors un cycle limite de basculement du relais, qui occasionne une commande en créneau du système. Si le procédé à asservir est de type passe-bas, ce qui est très souvent le cas, la sortie correspond au résultat de l'excitation du système par les harmoniques de rang faible de ce créneau. Le signal de sortie  $y(t)$  est alors périodique, éventuellement quasi-sinusoïdal, comme on l'a représenté à la figure 3.12.

En raison de la présence du relais, le problème ne relève alors plus de l'Automatique linéaire. Cela étant, on peut appliquer la méthode du premier harmonique, qui permet de raisonner par approximation sur des systèmes *faiblement* non linéaires [Ostertag 04]. Cette méthode consiste en l'approximation de l'élément non linéaire (ici le relais) par son *gain équivalent*, qui correspond au rapport des amplitudes de sortie et d'entrée. Dans le cas précis du relais, où la sortie est en créneau, on entend par amplitude de sortie l'amplitude de son premier harmonique.

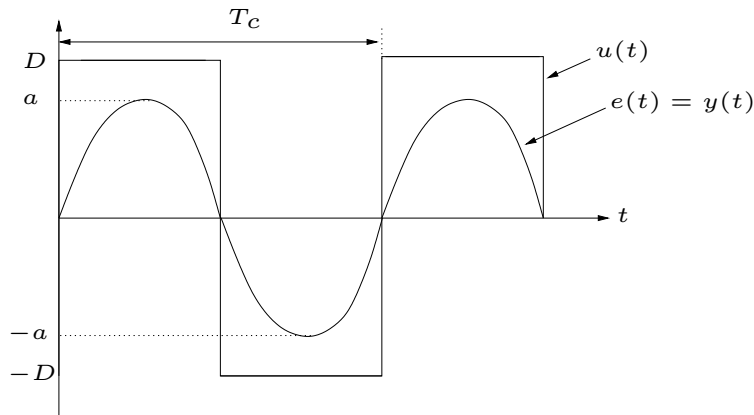


FIG. 3.12 – Formes des signaux quand  $y_r(t) = 0$  (cas d'un filtrage passe-bas idéal)

Soit  $\pm D$  la valeur de la sortie  $u(t)$  du relais,  $T_c$  la période des oscillations de la sortie du procédé  $y(t)$  et  $a$  l'amplitude des variations de  $y(t)$  autour du point de fonctionnement (voir figure 3.12). On suppose que ces grandeurs sont mesurables automatiquement. Le signal d'erreur correspond alors aux variations de  $y(t)$  autour du point de fonctionnement, à une constante près si l'erreur statique n'est pas nulle. On a choisi  $y_r = 0$  sur la figure 3.12 par commodité. Alors, dans le cas idéal où  $e(t)$  est sinusoïdal de composante continue nulle, on note :

$$e(t) = a \sin \frac{2\pi}{T_c} t.$$

La décomposition en série de Fourier de  $u(t)$  donne un premier harmonique d'amplitude  $aN(a)$ , en phase avec  $e(t)$ . Selon le vocabulaire d'usage dans la méthode du premier harmonique, on appelle  $N(a)$  *fonction de description*. Pour un relais de type seuil, on obtient :

$$N(a) = \frac{4D}{a\pi}.$$

Par la suite, on assimile le relais au gain  $N(a)$  et on poursuit l'analyse. L'équation caractéristique du système oscillant sous l'action du relais s'écrit alors :

$$1 + N(a)G(j\omega_c) = 0 \quad (3.3)$$

où  $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$ . Le point d'oscillation sur le diagramme de Nyquist du procédé est donc défini par :

$$G(j\omega_c) = -\frac{1}{N(a)}$$

ce qui est illustré à la figure 3.13. On peut montrer, d'après cette figure, que les oscillations dues au relais occasionnent un cycle limite stable. La fonction  $N(a)$  étant réelle, sa valeur lors des oscillations donne le gain critique du système :

$$K_c = N(a). \quad (3.4)$$

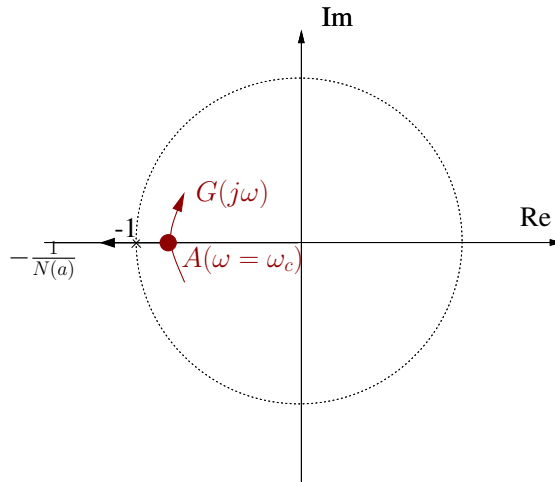


FIG. 3.13 – Point critique sur le diagramme de Nyquist

En pratique, pour éviter des basculements intempestifs dus notamment au bruit de mesure, on utilise un relais avec hystérésis, dont la caractéristique est représentée à la figure 3.14. En raison de l'hystérésis, la décomposition en série de Fourier du signal

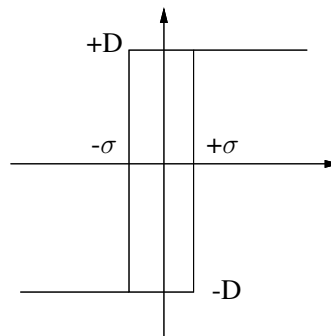


FIG. 3.14 – Relais avec hystérésis

conduit à un premier harmonique déphasé, comme cela est représenté à la figure 3.15, ce qui correspond à une fonction de description complexe et non plus réelle, telle que :

$$-\frac{1}{N(a)} = -\frac{\pi}{4D}\sqrt{a^2 - \sigma^2} - j\frac{\pi\sigma}{4D} \quad (3.5)$$

Cependant, si  $\sigma$  est petit, le point  $A(\omega = \omega_c)$  correspondant aux oscillations sur la figure 3.16 possède une partie imaginaire petite et l'on peut approximer  $N(a)$  un réel, qui vaudra  $|N(a)|$ , ce qui permet d'approximer le gain critique :

$$K_c = |N(a)| = \frac{4D}{\pi a}.$$

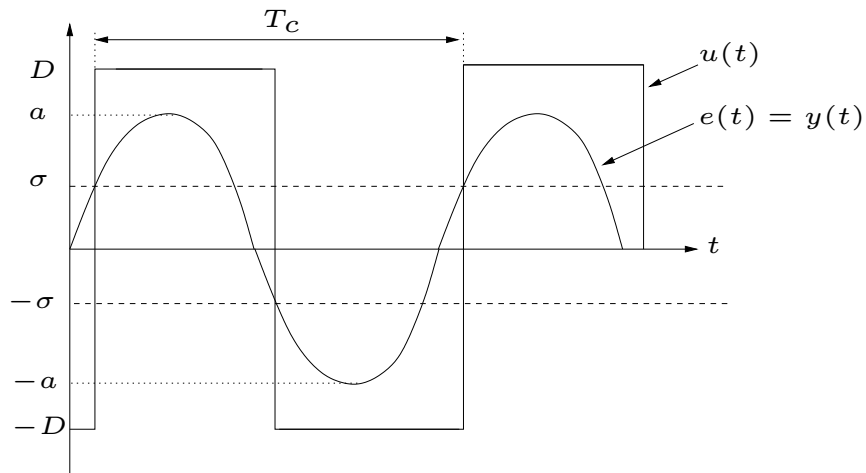


FIG. 3.15 – Formes des signaux (cas idéal), avec un relais à hystérésis

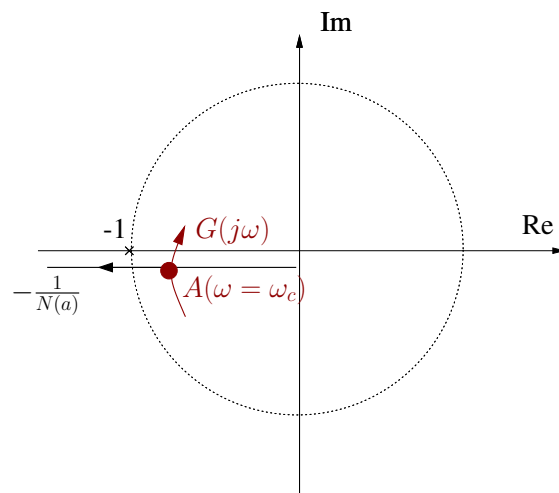


FIG. 3.16 – Point critique sur le diagramme de Nyquist

### Synthèse du PID

L'identification précédente a permis d'obtenir des informations sur le point critique  $A$  du diagramme de Nyquist du procédé. L'objectif de la commande est alors de modifier ce diagramme en le déformant de façon à remplir le cahier des charges imposé pour l'asservissement. On pourrait typiquement utiliser les formules de la deuxième méthode de Ziegler-Nichols. Cependant, comme nous l'avons évoqué, celles-ci correspondent à un choix discutable en termes d'amortissement. Nous allons expliquer ici comment régler un correcteur PID d'après l'identification du régime critique, de façon à imposer la marge de phase du système. Cette procédure est illustrée par la figure 3.17.

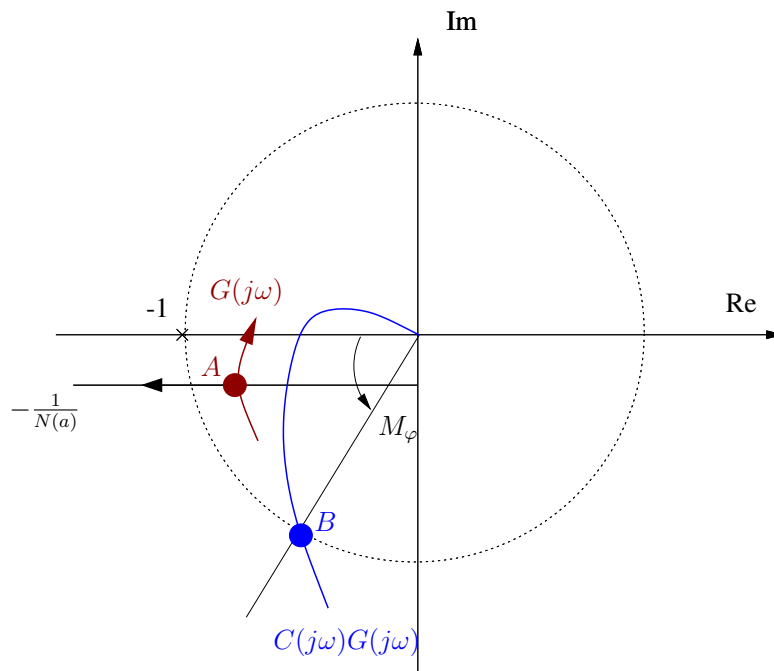


FIG. 3.17 – Principe de réglage de la marge de phase, d'après la méthode du relais

Si l'on souhaite imposer une marge de phase  $M_\varphi$ , alors :

$$\begin{aligned} |C(j\omega_c)G(j\omega_c)| &= 1, \\ \arg C(j\omega_c)G(j\omega_c) &= -\pi + M_\varphi. \end{aligned}$$

Si  $\sigma$  est petit on a  $\arg G(j\omega_c) \simeq -\pi$ . Par ailleurs, comme  $|G(j\omega_c)| = \frac{1}{K_c}$ , les conditions précédentes s'écrivent :

$$|C(j\omega_c)| = K_c, \quad (3.6)$$

$$\arg C(j\omega_c) = M_\varphi. \quad (3.7)$$

Pour un PID idéal de réponse harmonique :

$$C(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{j\tau_i\omega} + j\tau_d\omega \right)$$

l'équation (3.7) donne :

$$\arctan \left( \tau_d \omega_c - \frac{1}{\tau_i \omega_c} \right) = M_\varphi$$

soit, en posant  $\tau_i = \alpha \tau_d$  :

$$\alpha \omega_c^2 \tau_i^2 - \omega_c \tau_i \tan M_\varphi - 1 = 0.$$

Le réglage du gain est alors déduit de l'équation (3.6) :

$$\left| K_p \left( 1 + \frac{1}{j\tau_i \omega} + j\tau_d \omega \right) \right| = K_c,$$

soit, après calcul :

$$\left| K_p \sqrt{1 + \tan^2 M_\varphi} \right| = K_c,$$

ou encore :

$$K_p = K_c \cos M_\varphi. \quad (0 < M_\varphi < 90)$$

Finalement, on obtient :

$$K_p = K_c \cos M_\varphi, \quad (3.8)$$

$$\tau_d = \frac{T_c}{4\pi} \left( \tan M_\varphi + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + \tan^2 M_\varphi} \right), \quad (3.9)$$

$$\tau_i = \alpha \tau_d. \quad (3.10)$$

Le paramètre  $\alpha$  est typiquement choisi entre 4 et 10. Un réglage  $\alpha = 4$ , soit  $\tau_d$  quatre fois plus petit que  $\tau_i$ , conduira à la simplification :

$$\begin{aligned} K &= K_c \cos M_\varphi, \\ \tau_i &= \frac{T_c}{\pi} \frac{1 + \sin M_\varphi}{\cos M_\varphi}, \\ \tau_d &= \frac{\tau_i}{4}. \end{aligned}$$



---

## **Annexes**

---



# Annexe A

## Correspondance des termes en anglais

bande passante :	<i>bandwidth</i>
coefficient d'amortissement :	<i>damping ratio</i>
contre-réaction :	<i>feedback</i>
dépassement :	<i>overshoot</i>
emballement du terme intégral :	<i>integral wind-up</i>
entrée :	<i>input</i>
filtre anti-repliement :	<i>antialiasing filter</i>
gain :	<i>gain</i>
invariant (en temps) :	<i>time invariant</i>
lieu des racines :	<i>root locus</i>
linéaire invariant (en temps) :	<i>linear time invariant (LTI)</i>
pulsation amortie :	<i>damped frequency</i>
pulsation naturelle :	<i>conditional frequency ou natural frequency</i>
pulsation propre non amortie :	<i>natural (undamped) frequency</i>
régime permanent :	<i>steady state</i>
régime transitoire :	<i>transient response</i>
réponse impulsionnelle :	<i>impulse response</i>
réponse indicielle :	<i>step response</i>
sortie :	<i>output</i>
système asservi :	<i>feedback system</i>
système avec contre-réaction :	<i>feedback system</i>
temps de montée :	<i>rise time</i>
temps de réponse :	<i>settling time</i>



# Annexe B

## Transformée de Laplace

### B.1 Définition

**Définition B.1** Soit  $f(t)$  un signal à temps continu. La transformée de Laplace bilatérale de ce signal est définie par :

$$F_{II}(s) = \mathcal{L}_{II}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Pour des signaux causaux, cette transformée est égale à la transformée de Laplace<sup>1</sup> :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

si bien que l'on ne différenciera pas ces deux transformées, sauf indication contraire.

Cette transformée est une fonction de la variable complexe  $s$  appelée *variable de Laplace*. On notera  $s = \sigma + j\omega$  où  $\sigma$  et  $\omega$  sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de  $s$ . La transformée de Laplace est généralement définie sur un demi-plan complexe pour lequel  $\sigma \in ]\sigma_0, +\infty[$ . La valeur  $\sigma_0$  définissant la limite de convergence est appelée *abscisse de convergence* de la transformée de Laplace.

La plupart des transformées de Laplace des fonctions élémentaires utiles sont données dans l'un ou l'autre des ouvrages de référence [Ogata 01, Franklin 02, Kuo 03, Nise 04]. On se reportera, autant que possible, à ces tables de transformées, pour éviter tout calcul inutile. Une brève table de transformées est donnée en annexe B.

✍ **Exemple** On se propose de calculer la transformée de Laplace de  $f(t) = e^{-at} \mathcal{U}(t)$ . Pour cela il faut tout d'abord établir les conditions d'existence de la transformée. Généralement cela consiste à établir les conditions de convergence absolue de l'intégrale généralisée. Ensuite, on détermine la valeur prise par cette transformée dans son intervalle de définition.

---

<sup>1</sup> Terme préféré à *transformée de Laplace monolatérale*, plus précis mais plus long.

On a :

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt, \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt, \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

On étudie la convergence en valeur absolue de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} |e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t}| dt &= \int_0^{+\infty} |e^{-(\sigma+a)t}| |e^{-j\omega t}| dt, \\
 &= \int_0^{+\infty} |e^{-(\sigma+a)t}| dt, \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t} dt, \\
 &= \left[ -\frac{e^{-(\sigma+a)t}}{\sigma+a} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}.
 \end{aligned}$$

La transformée converge en valeur absolue, donc converge, si et seulement si  $\sigma + a > 0$ , donc si et seulement si  $\sigma > \sigma_0 = -a$ .

D'après (B.1) :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt.$$

L'expression de  $F(s)$  est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \left[ -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \\
 &= \frac{1}{s+a}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

pour tout  $s = \sigma + j\omega$  si et seulement si  $\sigma > -a$ .

## B.2 Propriétés

Soit deux signaux  $f(t)$  et  $g(t)$  de transformées de Laplace respectives  $F(s)$  et  $G(s)$ . Les principales propriétés de la transformée de Laplace sont rappelées dans le tableau B.1 page ci-contre. Leur démonstration est laissée au lecteur.

linéarité	$\mathcal{L}\{f(t) + \alpha g(t)\} = F(s) + \alpha G(s), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
changement d'échelle	$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} = \alpha F(\alpha s), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
retard	$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau s} F(s), \forall \tau \in \mathbb{R}$
dérivation en $t$	$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$
dérivation en $s$	$\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$
intégration	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
théorème de la valeur initiale	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$
théorème de la valeur finale	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
produit de convolution	$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) G(s)$
produit	$\mathcal{L}\{f(t) g(t)\} = \frac{1}{2\pi j} F(s) * G(s)$

TAB. B.1 – Propriétés principales de la transformée de Laplace

### B.3 Transformée inverse

**Définition B.2** Soit  $F(s)$  la transformée de Laplace d'un signal à temps continu  $f(t)$ . La transformée de Laplace inverse de  $F(s)$  s'écrit :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(s) e^{st} ds.$$

Il s'agit de l'intégrale d'une fonction complexe sur un contour de Bromwich  $\Gamma$  enveloppant toutes les singularités de la fonction  $F(s)$ , en particulier les racines du dénominateur.

Ceci est illustré à la figure B.1 page suivante avec un contour  $\Gamma$  englobant deux singularités situées sur l'axe imaginaire.

La définition précédente est peu utile en pratique. Son application directe consiste à déterminer l'intégrale à l'aide du théorème des résidus. En général, on préfère déduire la transformée de Laplace inverse de tables de conversion. Comme on peut aisément le deviner la transformée de Laplace inverse est linéaire. Ainsi, si nécessaire, on décomposera au préalable la transformée de Laplace en éléments simples pour retomber sur une combinaison des transformées élémentaires présentes dans les tables.

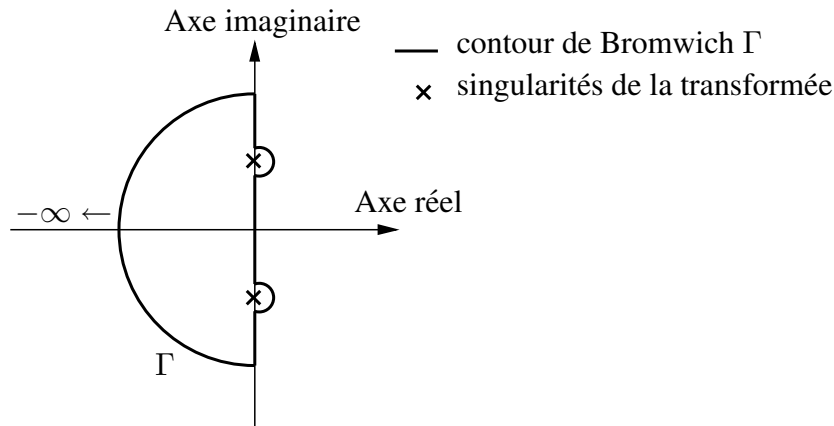
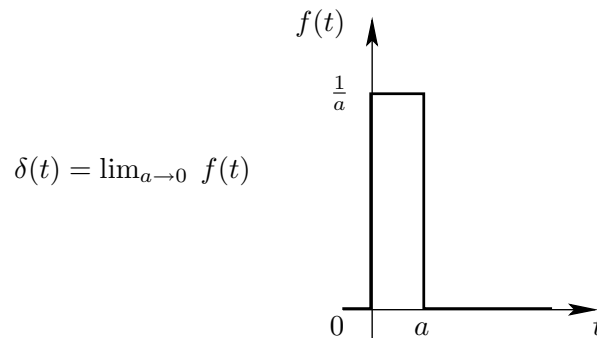


FIG. B.1 – Contour de Bromwich et singularités de la transformée de Laplace

### Exercices

1. Discuter la définition de  $\delta(t)$  présentée à la figure suivante.



2. Donner une illustration graphique de la réponse indicielle d'un système à partir de l'équation :

$$y(t) = g(t) * \mathcal{U}(t).$$

3. Démontrer les différentes propriétés de la transformée de Laplace données au tableau B.1.
4. Etablir les transformées de Laplace du signal causal  $f(t) \mathcal{U}(t)$  pour les fonctions  $f(t)$  suivantes :

$1,$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}},$
$\delta(t),$	$e^{-at} - e^{-bt},$
$\delta(t - \tau),$	$\sin \omega t,$
$t,$	$\cos \omega t,$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1},$	$e^{-at} \cos \omega t,$
$e^{-\frac{t}{\tau}},$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t).$



5. Vérifier, en utilisant la décomposition en éléments simples de la fonction  $F(s)$ , que :

$$F(s) = \frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$$

est bien la transformée de Laplace du signal :

$$f(t) = e^{-at} - e^{-bt}.$$

6. De la même manière, établir les transformées de Laplace inverses des fonctions :

$$F(s) = \frac{a}{s^2(s+a)}$$

et

$$G(s) = \frac{s}{(s+a)^2}.$$

## B.4 Table de transformées

$f(t)$	$F(s)$
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{s}$
$t\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$

TAB. B.2 – Table des principales transformées



## Annexe C

# Modélisation du moteur à courant continu

On considère un moteur à courant continu à excitation indépendante, tel que celui schématisé à la figure C.1. On se propose d'écrire le modèle de ce moteur sous différentes formes. Cette annexe s'inspire largement de [Louis 02].

### Mise en équation du moteur à courant continu

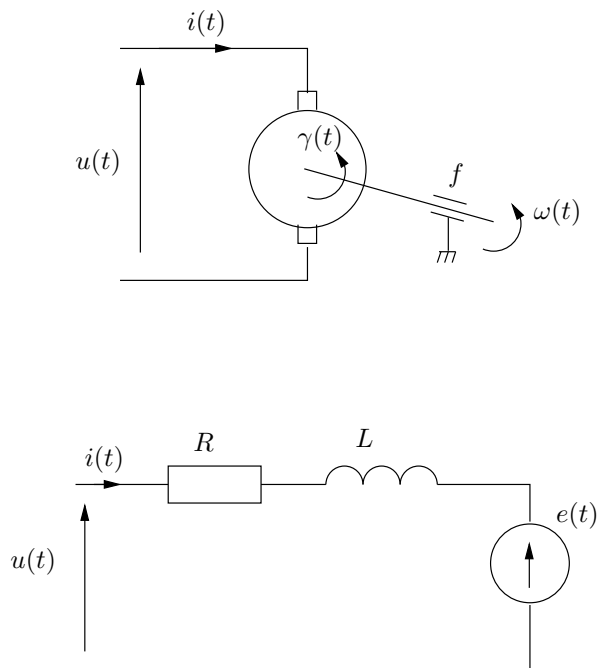


FIG. C.1 – Schéma d'un moteur à courant continu

L'équation électrique, liant la tension  $u(t)$  aux bornes de l'induit (rotor) et le courant d'induit  $i(t)$  s'écrit :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) = u(t), \quad (\text{C.1})$$

où  $R$  est la résistance de l'induit du moteur,  $L$  son inductance et  $e(t)$  la force électromotrice, qui est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor :

$$e(t) = K_e \omega(t). \quad (\text{C.2})$$

L'équation mécanique rendant compte des couples agissant sur le rotor s'écrit :

$$\gamma(t) - f\omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad (\text{C.3})$$

où  $\gamma(t)$  est le couple moteur,  $f$  le coefficient de frottement visqueux et  $J$  le moment d'inertie du rotor. Par construction, le couple  $\gamma(t)$  est proportionnel au courant d'induit  $i(t)$  :

$$\gamma(t) = K_m i(t). \quad (\text{C.4})$$

En règle générale les coefficients  $K_e$  et  $K_m$  sont si proches qu'il est raisonnable de les considérer égaux, négligeant alors les pertes durant la conversion électromécanique de puissance. On pose  $K_{em} = K_e = K_m$ .

Les équations (C.3) et (C.4) donnent :

$$K_{em} i(t) = f\omega(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt}. \quad (\text{C.5})$$

En dérivant (C.5), il vient :

$$K_{em} \frac{di(t)}{dt} = f \frac{d\omega(t)}{dt} + J \frac{d^2\omega(t)}{dt^2}. \quad (\text{C.6})$$

En combinant (C.5) et (C.6) avec (C.1) et (C.2) :

$$\frac{R}{K_{em}} \left( f\omega(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} \right) + \frac{L}{K_{em}} \left( f \frac{d\omega(t)}{dt} + J \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} \right) + K_{em} \omega(t) = u(t). \quad (\text{C.7})$$

## Modèles pour l'asservissement de vitesse du moteur

### Modèle d'ordre un

On néglige l'influence de l'inductance d'induit. L'équation (C.7) se simplifie en :

$$\frac{Rf + K_{em}^2}{K_{em}} \omega(t) + \frac{RJ}{K_{em}} \frac{d\omega(t)}{dt} = u(t),$$

soit :

$$\omega(t) + \frac{RJ}{Rf + K_{em}^2} \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{K_{em}}{Rf + K_{em}^2} u(t).$$

La fonction de transfert reliant la commande en tension du moteur  $U(s)$  et sa vitesse  $\Omega(s)$  est :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \tau_{em}s}, \quad (\text{C.8})$$

si l'on définit la *constante de temps électromécanique du système* :

$$\tau_{em} = \frac{RJ}{Rf + K_{em}^2},$$

et son *gain statique* :

$$K = \frac{K_{em}}{Rf + K_{em}^2}$$

Le système ainsi modélisé est donc d'ordre un. Il possède un pôle stable  $p = -1/\tau_{em}$ .

### Modèle d'ordre deux

On lève maintenant l'hypothèse du paragraphe précédent pour obtenir un modèle plus fin du moteur à courant continu. Deux expressions intéressantes de la fonction de transfert sont alors possibles :

1. En ordonnant (C.7) de façon à avoir un coefficient de un devant le degré de dérivation le plus élevé, il vient :

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{RJ + Lf}{LJ} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{Rf + K_{em}^2}{LJ} \omega(t) = \frac{K_{em}}{LJ} u(t). \quad (C.9)$$

ce qui conduit à la fonction de transfert sous la forme :

$$G(s) = \frac{\frac{K_{em}}{LJ}}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{f}{J}\right)s + \frac{Rf + K_{em}^2}{LJ}}.$$

Cette écriture est intéressante pour identifier la fonction de transfert sous la forme canonique :

$$G(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

2. En ordonnant (C.7) de façon à avoir un coefficient de un devant le degré de dérivation le plus faible (*i.e.*  $\omega(t)$ ), il vient :

$$\omega(t) + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_{em}^2} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{LJ}{Rf + K_{em}^2} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = \frac{K_{em}}{Rf + K_{em}^2} u(t). \quad (C.10)$$

ce qui conduit à la fonction de transfert sous la forme :

$$G(s) = \frac{K}{1 + (\tau_{em} + \mu\tau_{el})s + \tau_{el}\tau_{em}s^2}, \quad (C.11)$$

si l'on définit la *constante de temps électrique du système* :

$$\tau_{el} = \frac{L}{R}.$$

On note encore que :

$$\mu = \frac{Rf}{Rf + K_{em}^2}$$

est petit devant un (terme lié au frottement). Enfin, comme on peut raisonnablement supposer que  $\tau_{el} \ll \tau_{em}$  :

$$\tau_{em} + \mu\tau_{el} \simeq \tau_{em} \simeq \tau_{em} + \tau_{el}.$$

Cela permet d'écrire finalement la fonction de transfert sous la forme :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K}{(1 + \tau_{el}s)(1 + \tau_{em}s)}.$$

Les pôles du système  $p_1 = -1/\tau_{el}$  et  $p_2 = -1/\tau_{em}$  apparaissent alors clairement.

### Modèles pour l'asservissement de position du moteur

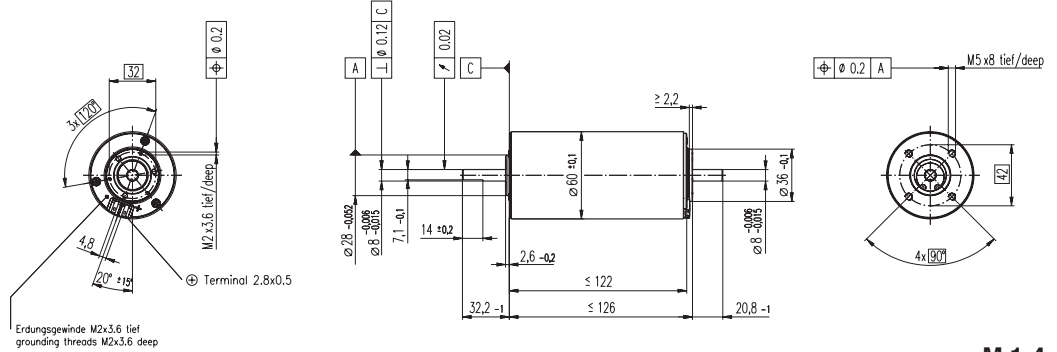
La position du moteur se déduisant de sa vitesse par intégration on obtient aisément la fonction de transfert reliant la tension de commande du moteur  $U(s)$  et la position de son rotor  $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$ , d'après les résultats du paragraphe précédent. D'après le cas le plus général étudié précédemment, il vient :

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(1 + \tau_{el}s)(1 + \tau_{em}s)}.$$

Le système possède trois pôles  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1/\tau_{el}$  et  $p_3 = -1/\tau_{em}$ .

Cet annexe se termine par la documentation technique C.1 du moteur à courant continu sans fer Maxon F2260 qui sert à titre d'exemple dans ce cours.

**F 2260** Ø60 mm, Commutation Graphite, 80 Watt



M 1:4

- Programme Stock
- Programme Standard
- Programme Spécial (sur demande!)

**Numéros de commande**

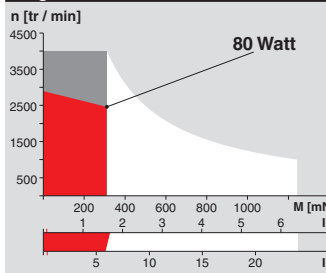
2260. ... -51.216-200 (Insérer le numéro du bobinage)

Caractéristiques moteur	Unité	Numéro du bobinage																			
		880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890									
1 Puissance conseillée	W	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
2 Tension nominale	Volt	15.0	15.0	18.0	24.0	24.0	24.0	36.0	36.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0
3 Vitesse à vide	tr / min	3980	2740	2650	2850	2640	2230	2690	2200	2670	2360	1800									
4 Couple de démarrage	Nm	2.88	1.97	1.91	2.06	1.87	1.67	2.01	1.59	1.94	1.69	1.35									
5 Pente vitesse / couple	tr / min / mNm	1.44	1.45	1.43	1.42	1.45	1.37	1.36	1.41	1.40	1.42	1.35									
6 Courant à vide	mA	563	351	278	226	206	168	140	109	103	89	65									
7 Courant de démarrage	A	83.8	39.4	30.6	26.3	22.2	16.7	16.1	10.4	11.5	8.87	5.41									
8 Résistance aux bornes	Ohm	0.179	0.381	0.589	0.911	1.08	1.44	2.24	3.47	4.18	5.41	8.88									
9 Vitesse limite	tr / min	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000									
10 Courant permanent max.	A	7.50	5.87	4.84	3.95	3.66	3.21	2.59	2.10	1.91	1.69	1.33									
11 Couple permanent max.	mNm	258	294	303	309	309	321	324	322	324	323	332									
12 Puissance max. fournie à la tension nom.	W	283	135	128	149	126	94.8	139	89.7	133	103	62.6									
13 Rendement max.	%	79	78	79	80	79	79	81	79	81	80	79									
14 Constante de couple	mNm / A	34.4	50.1	62.6	78.3	84.5	100.0	125	153	169	191	250									
15 Constante de vitesse	tr / min / V	277	191	153	122	113	95.3	76.3	62.3	56.5	50.0	38.1									
16 Constante de temps mécanique	ms	20	20	19	19	19	19	18	18	18	18	18									
17 Inertie du rotor	gcm <sup>2</sup>	1330	1290	1270	1250	1230	1290	1270	1230	1210	1260										
18 Inductivité	mH	0.07	0.14	0.22	0.34	0.40	0.56	0.88	1.31	1.59	2.03	3.50									
19 Résistance therm. carcasse / air ambiant	K / W	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4									
20 Résistance therm. rotor / carcasse	K / W	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1									
21 Constante de temps thermique du bobinage	s	72	70	69	68	67	70	69	67	67	66	69									

**Spécifications**

- Jeu axial sous charge axiale < 15 N ≤ 0.1 mm
- Jeu axial sous charge axiale > 15 N 0.1 - 0.5 mm
- Jeu axial pour combinaison de moteurs avec codeurs, limitée à max. 0.15 mm
- **Roulements** pré-contraint Pré-contraint min. 15 N
- Charge maximum des **roulements** axiale (dynamique) 15 N
- radiale (à 5 mm de la face) 100 N
- Force de chassage (statique) 400 N
- (statique, axe soutenu) 10 000 N
- Jeu radial avec **roulements** 0.05 mm
- Température ambiante -20 ... +100°C
- Température rotor max. +125°C
- Nombre de lames au collecteur 26
- Poids du moteur 1300 g
- Aimant permanent à 2 pôles
- Les caractéristiques moteur du tableau sont des valeurs nominales. Voir en page 43 les plages de tolérances. Des informations détaillées se trouvent sur le maxon-selection-programm du CD-ROM ci-joint.

**Plages d'utilisation**



**Légende**

- Plage de puissance conseillée
- Plage de fonctionnement permanent  
Compte tenu des résistances thermiques (lignes 19 et 20) et de la température ambiante à 25°C, la température max. du rotor sera atteinte = Limite thermique
- Fonctionnement intermittent  
La surcharge doit être de courte durée.

Aperçu à la page 17 - 21

**Construction modulaire maxon**

**Réducteur planétaire**  
Ø62 mm  
8 - 50 Nm  
Voir page 223

**Codeur digital**  
**HP HEDS 5540**  
500 imp., 3 canaux  
Voir page 237

**Codeur digital**  
**HP HEDL 5540**  
500 imp., 3 canaux  
Voir page 239

**Codeur digital**  
**HP HEDS 6540**  
1000 imp., 3 canaux  
Voir page 242

**Frein**  
Ø40 mm  
24 VDC, 0.4 Nm  
Voir page 269

**Electronique recommandée:**

ADS 50/5	page 253
ADS 50/10	253
ADS_E 50/5, 50/10	254
EPOS 24/5	263
MIP 50 / MIP 100	265
<b>Informations</b>	<b>17</b>

TAB. C.1 – Documentation technique du moteur à courant continu Maxon F2260 (source [http://www.maxonmotor.com/index\\_a.cfm](http://www.maxonmotor.com/index_a.cfm))

maxon DC motor





# Bibliographie

- [Bernot 99] F. Bernot. *Machines à Courant Continu. Constitution et fonctionnement*. Techniques de l'Ingénieur, traité Génie électrique, pages D 3555 1–14, 1999.
- [Danès 99] P. Danès. *Cours d'Automatique*. Université Paul Sabatier, Toulouse, 1999. Communication personnelle (notes sur le lieu d'Evans).
- [de Mathelin 99] M. de Mathelin. *Cours de commande numérique des systèmes*. Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1999. Communication personnelle.
- [Franklin 97] G. F. Franklin, J. D. Powell et M. L. Workman. *Digital control of dynamic systems*. Addison-Wesley, 1997.
- [Franklin 02] G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naeini. *Feedback control of dynamic systems*. Prentice Hall, 2002.
- [Godoy 03] E. Godoy et E. Ostertag. *Commande numérique des systèmes*. Ellipses, Technosup, 2003.
- [Kuo 03] B. C. Kuo et F. Golnaraghi. *Automatic control systems*. John Wiley & Sons, 2003.
- [Longchamp 95] R. Longchamp. *Commande numérique de systèmes dynamiques*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1995.
- [Louis 02] J.-P. Louis, B. Multon, Y. Bonnassieux et M. Lavabre. *Commande des Machines à Courant Continu (mcc) à Vitesse Variable*. Techniques de l'Ingénieur, traité Génie électrique, pages D 3610 1–17, 2002.
- [Nise 04] N. S. Nise. *Control systems engineering*. John Wiley & Sons, 2004.
- [Ogata 94] K. Ogata. *Discrete-time control systems*. Prentice Hall, 1994.
- [Ogata 01] K. Ogata. *Modern control engineering*. Prentice Hall, 2001.
- [Ostertag 04] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus. Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande*. Ellipses, Technosup, 2004.

