

Commande numérique des systèmes Fondements théoriques

G. Iuliana BARA

Télécom Physique Strasbourg – Master 1 IRIV

http://icube-avr.unistra.fr/fr/index.php/Commande_numerique

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Échantillonnage d'un signal	5
2.1	Échantillonnage idéal	5
2.2	Transformée de Laplace d'un signal échantillonné	7
2.3	Spectre du signal échantillonné	8
2.3.1	Cas où $\omega_M \leq \frac{\omega_e}{2}$	9
2.3.2	Cas où $\omega_M > \frac{\omega_e}{2}$	10
2.3.3	Théorème de Shannon	10
2.3.4	Filtre anti-repliement	10
2.4	Reconstruction du signal	11
2.4.1	Reconstruction idéale	11
2.4.2	Reconstruction approchée	12
3	Transformée en z	15
3.1	Définition	15
3.2	Correspondance entre les plans en s et en z	16
3.3	Propriétés	18
3.4	Transformée en z inverse	19
3.4.1	Décomposition en éléments simples	20
3.4.2	Division polynomiale	21
3.4.3	Formule d'inversion	22
3.5	Application à la résolution des équations aux différences	23
4	Transmittance des systèmes échantillonnés	27
4.1	Systèmes linéaires à temps discret	27
4.2	Modélisation des systèmes échantillonnés	29
4.2.1	Transmittance échantillonnée	29

	4.2.2 Transmittance échantillonnée des systèmes ouverts	31
	4.2.3 Transmittance échantillonnée des systèmes bouclés	33
5	Analyse des systèmes échantillonnés	37
5.1	Réponse des systèmes échantillonnés	37
5.1.1	Pôles	37
5.1.2	Zéros	41
5.1.3	Réponse temporelle des systèmes échantillonnés	41
5.2	Réponse fréquentielle	44
5.3	Stabilité	47
5.3.1	Critère général de stabilité	47
5.3.2	Critères algébriques de stabilité	47
6	Analyse des systèmes échantillonnés en boucle fermée	51
6.1	Structure des systèmes à commande numérique	51
6.2	Critère de Nyquist	53
6.2.1	Théorème de Cauchy	53
6.2.2	Contour de Nyquist	54
6.2.3	Critère de Nyquist	54
6.2.4	Contour de Nyquist pour des pôles sur le cercle unité	55
6.2.5	Critère de Nyquist pour des systèmes en BO stables	55
6.3	Lieu d'Evans	56
6.3.1	Définition du lieu d'Evans	56
6.3.2	Règles de construction du lieu d'Evans	57
6.4	Précision des systèmes asservis échantillonnés	61
6.4.1	Expression de l'erreur	61
6.4.2	Erreur due aux perturbations	64
A	Table de transformées en z	65

Notations et abréviations

CAN	convertisseur analogique-numérique
CNA	convertisseur numérique-analogique
T_e	période d'échantillonnage
$\delta(t)$	fonction impulsion de Dirac
$\delta_{T_e}(t)$	fonction peigne (d'impulsions) de Dirac
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	transformée de Laplace de $f(t)$
$\mathcal{F}\{f(t)\}$	transformée de Fourier de $f(t)$
$\mathcal{F}^{-1}\{f(t)\}$	transformée de Fourier inverse de $f(t)$
$\mathcal{Z}\{f(t)\}$	transformée en \mathcal{Z} de $f(t)$
$\mathcal{Z}^{-1}\{f(t)\}$	transformée en \mathcal{Z} inverse de $f(t)$

Introduction générale

La *théorie des asservissements* est un domaine majeur de l'automatique. Elle a comme objectif la conception des lois de commande destinées à garantir une "réponse satisfaisante" pour un processus physique. Par "réponse satisfaisante" on comprend que la sortie du processus est forcée à suivre ou à poursuivre un signal de consigne (ou un signal de référence) et cela :

- en optimisant les performances de suivi de consigne
- et en minimisant l'effet des perturbations et du bruit de mesure.

Dans des cas particuliers, le système de commande peut fonctionner en boucle ouverte à partir d'un signal de consigne. Cependant, uniquement un asservissement en boucle fermée est capable de stabiliser un système instable en boucle ouverte et de compenser les perturbations externes, le bruit de mesure et les incertitudes internes au processus physique lui-même. Le principe général de la boucle d'asservissement est montré figure 1.1.

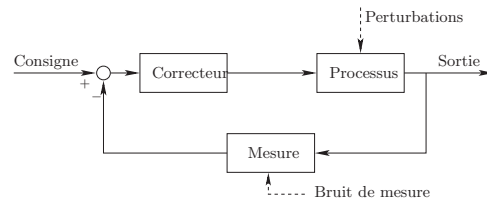


FIGURE 1.1 – Boucle d'asservissement

La loi de commande est générée par un système de commande qu'on appelle *correcteur* ou *compensateur*. Comme sa mise en œuvre est réalisée avec des systèmes concrets, qui peuvent être analogiques ou numériques, alors on parle d'asservissements continus ou d'asservissements numériques.

La boucle d'asservissement avec un correcteur continu est illustrée par la figure 1.2. Le bloc $G(s)$ représente la fonction de transfert du processus continu qui inclut non seulement les équations du processus physique proprement dit mais également la dynamique

des actionneurs. $C(s)$ est la fonction de transfert du correcteur tandis que $H(s)$ est la fonction de transfert du système de mesure (capteurs).

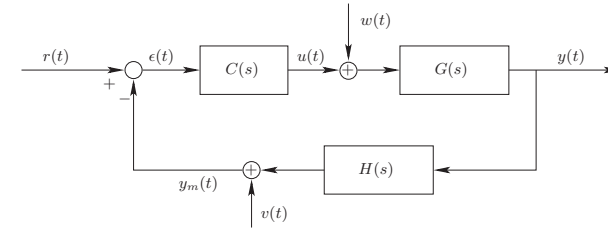


FIGURE 1.2 – Asservissement continu

Nous rappelons brièvement la signification des signaux constituant la boucle de régulation :

- $r(t)$ est le signal de consigne ou le signal de référence,
- $y(t)$ le signal de sortie du processus qui constitue le signal à contrôler,
- $y_m(t)$ le signal mesuré issu du système de mesure,
- $\epsilon(t)$ l'erreur par rapport à la consigne,
- $u(t)$ le signal la commande générée par le correcteur.

De nos jours, grâce aux développements de l'électronique et de l'informatique, la plupart des lois de commande sont implémentées sur des micro-ordinateurs ou processeurs numériques. L'implémentation d'algorithmes de commande sur ordinateur, comparée à une réalisation analogique, offre des nombreux atouts : coût faible, précision élevée et insensibilité aux bruits, facilité d'implémentation et souplesse par rapport aux modifications. Par ailleurs, le pilotage d'un procédé par un même PC implémentant toutes les fonctions de pilotage (supervision, régulation, interface homme-machine) est particulièrement confortable pour l'opérateur.

L'*objectif* de ce cours est d'étudier les asservissements numériques c'est à dire le problème de l'utilisation, en temps réel, de calculateurs ou processeurs numériques afin de commander, piloter des processus physiques. Pour cela, il faut d'abord représenter et étudier les différentes interactions qui apparaissent entre les signaux du procédé à temps continu (partie analogique) et les signaux utilisés par un ordinateur numérique qui se présentent sous forme de suites de valeurs numériques (partie numérique). Comme il a été schématisé sur la figure 1.3, la commande par ordinateur nécessite la mise en œuvre d'une interface entre le calculateur et le procédé. Ceci est obtenu à l'aide :

- d'un convertisseur numérique-analogique (CNA) permettant d'envoyer les ordres du processeur vers l'actionneur du processus,
- d'un convertisseur analogique-numérique (CAN) transmettant au processeur les mesures acquises sur le procédé par le système de mesure.

Ces éléments mettent en jeu des signaux analogiques et discrets d'où l'opération d'échantillonnage et la notion de système échantillonné. Sans entrer dans les détails, pour l'instant, de la régulation numérique, notons que la juxtaposition de signaux aussi différents

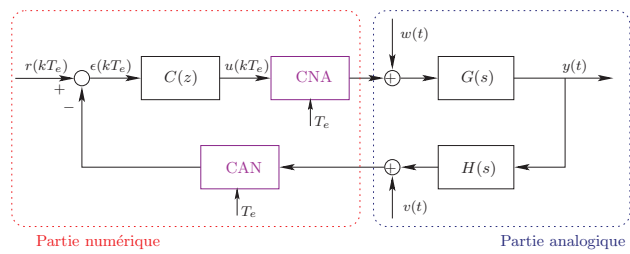


FIGURE 1.3 – Asservissement échantillonné/numérique

engendre des nombreux problèmes et difficultés. Ce cours mettra en évidence ces difficultés et présentera les différentes solutions et méthodes permettant la mise en œuvre des lois de commande numériques.

Échantillonnage d'un signal

Comme on a vu au chapitre précédent, le but d'un processus à commande numérique est de remplacer la commande analogique du processus par des algorithmes mis en œuvre sur calculateur. Cependant, un calculateur numérique nécessite un certain temps pour effectuer les opérations liées à l'algorithme de commande. De plus, un processeur numérique traite des valeurs liées à l'algorithme de commande. De plus, un processeur numérique traite des valeurs numériques (des nombres) et non des grandeurs analogiques. Pour ces raisons, on introduit un découpage temporel des signaux au niveau du calculateur.

Le découpage temporel de l'information, réalisé par le CAN, se fait par *échantillonnage* et *quantification*. L'échantillonnage consiste à prélever, à période fixe T_e , la valeur du signal. La quantification résulte du fait que les données sont représentées sur un calculateur dans un certain format (16 bits, par exemple). Donc, le CAN remplace un signal analogique par une suite des nombres. Ces nombres sont ensuite manipulés par le calculateur qui génère une nouvelle suite des nombres. Comme cette suite ne peut pas exciter le processus à asservir, il est indispensable d'utiliser un CNA afin d'élaborer un signal analogique. Cette étape est appelée *reconstruction*.

2.1 Échantillonnage idéal

Définition 2.1.1. L'*échantillonneur idéal* de période T_e est un opérateur mathématique qui associe à toute fonction $f(t)$ une fonction $f_e(t)$ définie par

$$f_e(t) = f(t)\delta_{T_e}(t) \quad (2.1.1)$$

où $\delta_{T_e}(t)$ est la fonction peigne (d'impulsions) de Dirac. ♦

Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.1, la fonction peigne de Dirac est une fonction non causale, périodique de période T_e et composée d'un nombre infini des fonctions impulsion de Dirac décalées dans le temps :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

où $\delta(t)$ est la fonction impulsion de Dirac.

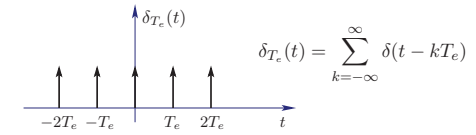


FIGURE 2.1 – Fonction peigne de Dirac

Notons que l'utilisation de l'opérateur échantillonnage idéal sur le signal $f(t)$ génère un signal continu $f_e(t)$ appelée signal échantillonné (idéal). La définition (2.1.1) peut également s'écrire :

$$f_e(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e). \quad (2.1.2)$$

Un exemple de fonction échantillonnée a été illustré sur la figure 2.2.

A partir de la relation (2.1.2) ainsi que de la figure 2.2, nous pouvons déduire que la fonction échantillonnée $f_e(t)$ est une fonction peigne de Dirac modulée en amplitude par la fonction $f(t)$. En effet, on peut considérer l'échantillonnage comme le prélèvement de la valeur du signal continu aux instants $t = kT_e$.

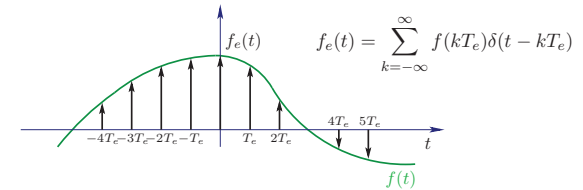


FIGURE 2.2 – Fonction échantillonnée

Dans la suite de ce cours, nous utiliserons pour l'échantillonneur idéal le symbole indiqué sur la figure 2.3.

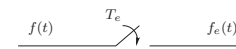


FIGURE 2.3 – Échantillonneur idéal

Remarque 2.1.1.

Notons que le *terme échantillonné* est réservé aux signaux et aux systèmes discrets dans le temps. Le *terme numérique* s'applique aux systèmes et aux signaux discrets en temps et en amplitude. Pour obtenir un signal numérique à partir d'un signal échantillonné on doit effectuer une "discrétisation" de l'amplitude et cette discrétisation est faite par quantification. En effet, la quantification résulte du fait que les données sont

représentées sur un calculateur dans un certain format. Alors, le nombre utilisé par le calculateur sera entaché d'une erreur correspondant au maximum à la moitié de la précision associée au format des nombres. L'erreur associée à la quantification, tant qu'elle est très faible, est généralement considérée comme un bruit, appelé *bruit de quantification*.

L'action du CAN étant de fournir une suite de nombres $\{f(kT_e)\}$, il revient au même de définir le signal échantillonné par la suite en k , $\{f(k)\} = \{f(kT_e)\}$. Par conséquent, dans ce cours, nous ne ferons pas la distinction entre le signal échantillonné et le signal numérique en supposant négligeable l'effet de la quantification.

2.2 Transformée de Laplace d'un signal échantillonné

Dans cette section, nous présentons deux formulations de la transformée de Laplace d'un signal échantillonné. Nous considérons par la suite, sauf indication contraire, que les signaux sont causaux (càd $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$).

PREMIÈRE FORMULATION

Étant donnée qu'un signal échantillonné est une fonction à temps continu, nous pouvons calculer sa transformée de Laplace :

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \int_0^{\infty} f_e(t)e^{-st} dt. \quad (2.2.1)$$

En utilisant la relation (2.1.2) et la causalité du signal $f_e(t)$, nous déduisons que

$$F_e(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) \int_0^{\infty} \delta(t - kT_e)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\mathcal{L}\{\delta(t - kT_e)\}$$

où la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est donnée par

$$\mathcal{L}\{\delta(t - kT_e)\} = \begin{cases} e^{-kT_e s} & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cela implique que :

$$F_e(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)e^{-kT_e s}. \quad (2.2.2)$$

DEUXIÈME FORMULATION

Comme la fonction $\delta_{T_e}(t)$ est une fonction périodique de période T_e , nous pouvons effectuer une décomposition de celle-ci en série de Fourier :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi k t}{T_e}}$$

$$\text{avec } c_k = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta_{T_e}(t) e^{-j\frac{2\pi k t}{T_e}} dt = \frac{1}{T_e}.$$

En utilisant la définition (2.1.1), nous obtenons :

$$f_e(t) = f(t)\delta_{T_e}(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_e} e^{j\frac{2\pi k t}{T_e}} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\frac{2\pi k t}{T_e}}.$$

Alors, la transformée de Laplace du signal échantillonné est :

$$\begin{aligned} F_e(s) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\frac{2\pi k t}{T_e}} \right) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-(s - j\frac{2\pi k}{T_e})t} dt \right) \end{aligned}$$

soit :

$$F_e(s) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right). \quad (2.2.3)$$

Remarque 2.2.1. D'après la relation (2.2.3), la transformée de Laplace $F_e(s)$ est périodique le long de l'axe imaginaire. Les pôles de $F_e(s)$ sont obtenus à partir de ceux de $F(s)$ par une infinité de translations de $\frac{2\pi}{T_e}$ (dans le plan complexe s) parallèlement à l'axe réel.

2.3 Spectre du signal échantillonné

Soit le signal à temps continu $f(t)$.

Définition 2.3.1. La transformée de Fourier de $f(t)$ est définie comme :

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

◆

Le module de la transformée de Fourier d'un signal $|F(j\omega)|$ est appelé *spectre* du signal. Notons que le spectre contient des informations sur les composantes harmoniques présentes dans le signal.

Soit le spectre du signal $f(t)$ tel qu'il a été indiqué sur la figure 2.4 et soit ω_M la pulsation maximale présente dans ce spectre. Afin d'étudier le spectre du signal échantillonné $f_e(t)$, calculons la transformée de Fourier du signal échantillonné. Comme la transformée de Fourier est un cas particulier de la transformée de Laplace ($s = j\omega$), on peut utiliser l'expression (2.2.3) et donc :

$$F_e(j\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T_e}\right).$$

On remarque que le spectre du signal échantillonné est constitué de la somme d'un nombre infini d'une succession de spectres où chaque spectre correspond au spectre du

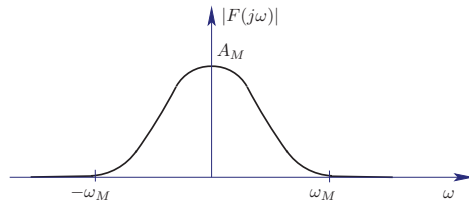


FIGURE 2.4 – Spectre d'un signal à temps continu

signal de départ décalé en pulsation. Par conséquent, le spectre $|F_e(j\omega)|$ du signal échantillonné est une fonction périodique de période $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$ appelé *pulsation d'échantillonnage*. Examinons ce spectre en fonction des valeurs des pulsations ω_M et ω_e . On distingue deux cas possibles, selon que ω_M est inférieur ou supérieur à la pulsation $\frac{\omega_e}{2}$ appelé *pulsation de Nyquist*.

2.3.1 Cas où $\omega_M \leq \frac{\omega_e}{2}$

Étant donné le spectre du signal à temps continu indiqué sur la figure 2.4, nous déduisons le spectre du signal échantillonné tel qu'il a été tracé sur la figure 2.5.

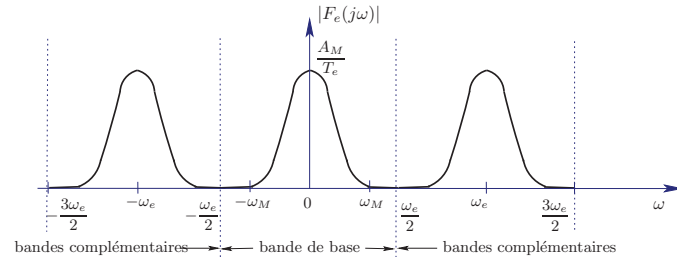


FIGURE 2.5 – Spectre du signal échantillonné (sans repliement)

Remarquons que l'information contenue dans le signal $f(t)$ est présente dans chaque une des bandes de largeur ω_e et notamment dans la bande de base correspondant à des pulsations comprises entre $-\frac{\omega_e}{2}$ et $\frac{\omega_e}{2}$. Par conséquent, il est possible de reconstruire le signal $f(t)$, à partir du signal échantillonné, par un filtrage passe-bas idéal supprimant les bandes complémentaires.

2.3.2 Cas où $\omega_M > \frac{\omega_e}{2}$

Dans ce cas, illustré par la figure 2.6, les lobes du spectre se superposent. Ceci génère l'apparition des distorsions dans le spectre du signal échantillonné par rapport au spectre du signal $f(t)$.

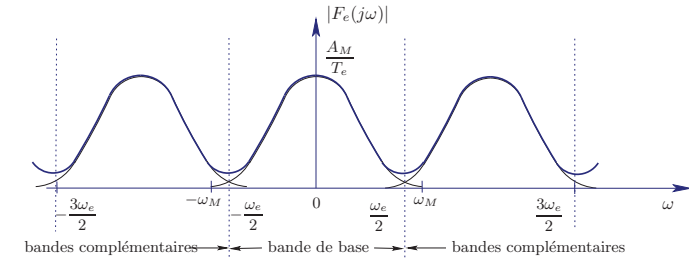


FIGURE 2.6 – Spectre du signal échantillonné (avec repliement)

Ce phénomène est appelé *repliement spectral* ("aliasing" en anglais) et il correspond au repliement des bandes complémentaires dans la bande de base. Dans ce cas, il n'est plus possible de reconstruire $f(t)$ à partir du signal échantillonné.

2.3.3 Théorème de Shannon

Le théorème suivant, connu sous le nom de *théorème de l'échantillonnage* ou de *Shannon*, donne les conditions dans lesquelles un signal analogique peut être reconstruit à partir de sa version échantillonnée.

Théorème 2.3.1 (de Shannon, 1948). *Pour pouvoir reconstituer sans perte d'information un signal continu à partir des échantillons de période T_e de celui-ci, il faut que la fréquence d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T_e}$, soit au moins égale au double de la fréquence maximale contenue dans le spectre de ce signal :*

$$f_e \geq 2f_M \quad \text{où} \quad f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}. \quad (2.3.1)$$

La fréquence $f_N = \frac{f_e}{2} = \frac{1}{2T_e}$ est appelé *fréquence de Nyquist*.

2.3.4 Filtre anti-repliement

Si pour une fréquence d'échantillonnage fixée le signal comporte des composantes spectrales à des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist (du bruit par exemple) alors il faut filtrer le signal analogique avant l'échantillonnage de manière à assurer que le repliement soit négligeable. Le filtre passe-bas réalisant cette tâche est appelé filtre anti-repliement ("antialiasing filter" en anglais).

2.4 Reconstruction du signal

Dans cette section, on se propose de reconstruire le signal $f(t)$ à partir des échantillons $f(kT_e)$ de ce signal. Pour cela, nous utiliserons la transformée de Fourier inverse.

Définition 2.4.1. La transformée de Fourier inverse de $F(j\omega)$ est définie par :

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

♦

2.4.1 Reconstruction idéale

La reconstruction idéale est basée sur l'utilisation d'un filtre passe-bas idéal de réponse harmonique $H(j\omega)$ qui coupe toutes les composantes spectrales correspondant aux pulsations supérieures à la pulsation de Nyquist. Comme illustré sur la figure 2.7, cette réponse harmonique correspond à une fonction fenêtre rectangulaire, centrée et de largeur ω_e .

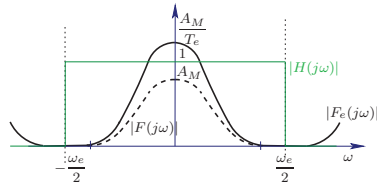


FIGURE 2.7 – Spectre d'un signal à temps continu

Alors, $F(j\omega) = T_e F_e(j\omega) H(j\omega)$ et, en utilisant la transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$f(t) = T_e \mathcal{F}^{-1}\{F_e(j\omega) H(j\omega)\} = T_e (f_e * h)(t)$$

où $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$ et $*$ désigne le produit de convolution.

La réponse impulsionnelle du filtre peut être calculé en utilisant la transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_e}{2}}^{\frac{\omega_e}{2}} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2j\pi t} (e^{jt\frac{\omega_e}{2}} - e^{-jt\frac{\omega_e}{2}}) = \frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{T_e}\right). \end{aligned}$$

En utilisant la définition du produit de convolution, on trouve :

$$\begin{aligned} (f_e * h)(t) &= \int_{\mathbb{R}} f_e(x) h(t-x) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(kT_e) \delta(x - kT_e) h(t-x) dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) h(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) \frac{1}{\pi(t - kT_e)} \sin\left(\frac{\pi(t - kT_e)}{T_e}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) \operatorname{sinc} \frac{t - kT_e}{T_e}$$

où la fonction "sinc" représente le sinus cardinal¹.

2.4.2 Reconstruction approchée

La méthode de reconstruction approchée utilise un *bloqueur d'ordre zéro* (BOZ) (en anglais "zero order hold"). Le BOZ est un système qui permet d'obtenir un signal analogique à partir d'une suite d'échantillons ou d'un signal numérique. En effet, le bloqueur d'ordre zéro maintient à sa sortie la valeur de l'échantillon d'entrée, durant la période d'échantillonnage qui sépare deux échantillons consécutifs. Un exemple est montré par la figure 2.8.

Soit $f(kT_e)$ le signal numérique à l'entrée du BOZ. Alors, le signal bloqué qui se trouve à la sortie du bloqueur s'écrit :

$$f_{BOZ}(t) = f(kT_e) \quad \text{pour } t \in [kT_e, (k+1)T_e).$$

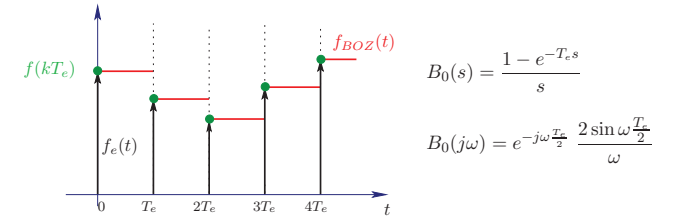


FIGURE 2.8 – Bloqueur d'ordre zéro

D'après ce qui précède, nous pouvons déduire que la réponse impulsionnelle $b_0(t)$ du BOZ est une fenêtre rectangulaire de largeur T_e et d'amplitude unitaire. Donc, cette réponse impulsionnelle peut s'écrire comme :

$$b_0(t) = \mathbb{U}(t) - \mathbb{U}(t - T_e) \quad \text{ou } \mathbb{U}(t) \text{ est la fonction échelon unitaire.}$$

En utilisant la transformée de Laplace, on déduit la fonction de transfert du BOZ :

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s}$$

1. Fonction sinus cardinal : $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

et sa réponse harmonique :

$$\begin{aligned} B_0(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} \\ &= e^{-j\omega \frac{T_e}{2}} \frac{e^{j\omega \frac{T_e}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_e}{2}}}{j\omega} \\ &= e^{-j\omega \frac{T_e}{2}} \frac{2 \sin \omega \frac{T_e}{2}}{\omega}. \end{aligned}$$

EFFET DU BLOQUEUR DANS LA BANDE DE BASE

Suite au bloqueur d'ordre zéro et au filtre passe-bas, la transformée de Fourier du signal bloqué vaut :

$$F_{BOZ}(j\omega) = B_0(j\omega)F_e(j\omega) = \frac{1}{T_e} B_0(j\omega)F(j\omega)$$

parce que dans la bande de base $F(j\omega) = T_e F_e(j\omega)$. Donc,

$$F_{BOZ}(j\omega) = e^{-j\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)} F(j\omega).$$

Sachant que $\frac{\omega T_e}{2} = \pi \frac{\omega}{\omega_e}$ on obtient :

$$F_{BOZ}(j\omega) = \underbrace{e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}_{\text{déphasage}} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)}}_{\text{déformation}} F(j\omega).$$

Il résulte de cette expression que la réponse harmonique du signal bloqué se déduit de celle du signal à temps continu initial par :

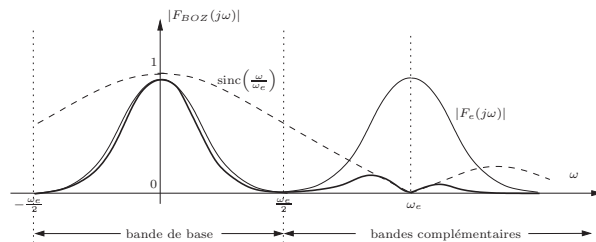


FIGURE 2.9 – Spectre d'un signal échantillonné et bloqué

- une déformation, liée au sinus cardinal ;
- un retard pur d'une demi période d'échantillonnage.

Le spectre du signal bloqué se déduit du spectre du signal à temps continu conformément au schéma de la figure 2.9.

Les lobes additionnels apparaissant au delà de la pulsation de Nyquist peuvent éventuellement être filtrés par un filtre passe-bas.

Transformée en \mathcal{Z}

Dans le cas des signaux à temps discret, la représentation équivalente à la transformée de Laplace des signaux à temps continu est la transformée en \mathcal{Z} .

3.1 Définition

Définition 3.1.1. La transformée en z d'un signal causal à temps discret $f(k)$ est définie par :

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}. \quad (3.1.1)$$

Dans le cas échantillonné, cette transformée découle de la transformée de Laplace du signal échantillonné idéal $f_e(t)$. En effet, en utilisant le changement de variable $z = e^{sT_e}$ dans l'expression (2.2.2) de la transformée de Laplace du signal échantillonné idéal, on obtient :

$$F_e(s) = \frac{\ln z}{T_e} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)z^{-k} = F(z).$$

Par extension (et par abus de notation), on notera également $F(z)$ la transformée en z du signal échantillonné $f_e(t)$ (signal à temps continu) ainsi que du signal $f(t)$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)z^{-k} = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \mathcal{Z}\{f(kT_e)\} = \mathcal{Z}\{f_e(t)\} = \mathcal{Z}\{f(t)\}.$$

La transformée en z est une fonction de la variable complexe z . La transformée en z est généralement définie sur une partie du plan complexe pour laquelle $|z| > R_0$. La valeur R_0 définissant la limite de convergence est appelée *rayon de convergence* de la transformée en z .

Exemple 3.1.1. Calculer la transformée en z de la fonction $f(k) = e^{-akT_e} \mathbb{U}(k)$.

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{Z}\{e^{-akT_e} \mathbb{U}(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT_e} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT_e} z^{-1})^k = 1 + e^{-aT_e} z^{-1} + (e^{-aT_e} z^{-1})^2 + \dots \end{aligned}$$

Il s'agit d'une série géométrique de raison $e^{-aT_e} z^{-1}$ et de premier terme égal à un. La transformée en z existe si et seulement si la série converge et cette série converge en valeur absolue si et seulement si $|e^{-aT_e} z^{-1}| < 1$. On en déduit que la transformée en z existe si et seulement si $|z| > e^{-aT_e}$. Dans ces conditions, elle vaut :

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}.$$

3.2 Correspondance entre les plans en s et en z

Comme il a été expliqué dans la section précédente, la transformée en z d'un signal à temps discret est la transformée de Laplace du signal échantillonné idéal correspondant, en passant par le changement de variable $z = e^{T_e s}$. La correspondance entre le plan en s et le plan en z est basé sur cette relation et elle est illustrée sur la figure 3.1.

Remarque 3.2.1.

- Dans le cas d'un pôle en s réel σ_1 , le point obtenu dans le plan en z sera également réel $e^{\sigma_1 T_e}$.
- Dans le cas d'une paire de pôles complexes conjugués $\sigma_2 \pm j\omega_2$, les points obtenus dans le plan en z auront comme valeurs $e^{\sigma_2 T_e} e^{\pm j\omega_2 T_e}$, donc, un module qui vaut $e^{\sigma_2 T_e}$ et un argument qui vaut $\pm\omega_2 T_e$.
- L'échantillonnage a pour effet de rendre périodique la transformée de Laplace, conformément à l'équation (2.2.2) avec une période égale à $j\omega_e$. On observe que les pôles obtenus par effet de la périodisation se retrouvent finalement en un seul et même point du plan en z car :

$$e^{(\sigma + j\omega + jk\omega_e)T_e} = e^{(\sigma + j\omega)T_e} e^{j2k\pi} = e^{(\sigma + j\omega)T_e}.$$

- Les droites verticales, correspondantes à $\text{Re}(s) = \sigma = \text{constante}$, se transforment en des cercles centrés sur l'origine de rayon $e^{\sigma T_e}$. En particulier, l'axe imaginaire se transforme en un cercle de rayon unité.
- Les droites horizontales, correspondantes à $\text{Im}(s) = \omega = \text{constante}$, donnent des demi-droites rayonnant depuis l'origine du plan en z et faisant un angle ωT_e avec la partie positive de l'axe réel.
- $F(z)$ possède le même nombre des pôles que $F(s)$.
- Le demi-plan en s de gauche correspond à l'intérieur du cercle unité dans le plan en z , tandis que le demi-plan en s de droite devient l'extérieur du cercle unité.

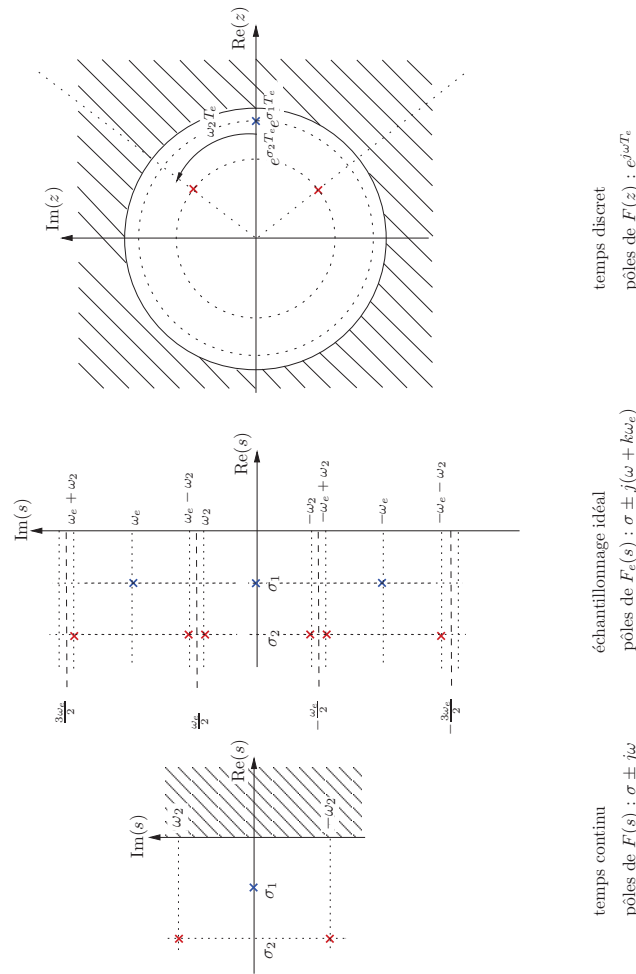


FIGURE 3.1 – Correspondance entre les plan s et z

3.3 Propriétés

Nous présentons dans cette section les propriétés de la transformée en z . La plus part de ces propriétés peuvent se déduire de celles de la transformée de Laplace avec le changement de variable $z = e^{sT_e}$. Notons que ces propriétés sont valables pour toute fonction ou signal à temps discret ainsi que pour tout système à temps discret. Elles sont donc valables aussi dans le cas de signaux provenant de l'échantillonnage de signaux à temps continu.

Soit deux signaux à temps discret $f(k)$, $g(k)$ et soit $F(z)$, $G(z)$ leurs transformées en z respectives.

Linéarité

$$\mathcal{Z}\{\alpha f(k) + \beta g(k)\} = \alpha F(z) + \beta G(z), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Changement d'échelle

$$\mathcal{Z}\{\alpha^k f(k)\} = F\left(\frac{z}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Retard

Dans le cas des signaux causaux, le théorème du retard s'énonce comme suit :

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\mathbb{U}(k)\} = z^{-n}F(z), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En pratique, on doit souvent étudier des systèmes avec des conditions initiales non nulles, ce qui nous amène à traiter des signaux non causaux. Dans le cas des signaux non causaux, le théorème du retard s'écrit :

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\mathbb{U}(k)\} = z^{-n}F(z) + z^{-(n-1)}f(-1) + \dots + z^{-1}f(-n+1) + f(-n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Notons que, dans cette expression, le signal échelon unitaire $\mathbb{U}(k)$ a été rajouté pour souligner le fait qu'on considère des transformées en z monolatérales. Par conséquent, les valeurs $f(k)$ pour $k < -n$ n'apportent aucune contribution à la transformée en z de $f(k-n)$.

Avance

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\mathbb{U}(k)\} = z^n F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Multiplication par une rampe

$$\mathcal{Z}\{k f(k)\} = -z \frac{dF(z)}{dz}.$$

Multiplication par une exponentielle

$$\mathcal{Z}\{e^{-ak} f(k)\} = F(ze^a).$$

Théorème de la valeur initiale

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$$

Théorème de la valeur finale

Lorsque la valeur finale existe alors cette valeur peut être calculé comme :

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z).$$

Notons que la valeur finale existe si les pôles de la transformée $F(z)$ sont tous à l'intérieur du cercle unité. L'exemple 3.5.1 nous permettra de mieux comprendre cette remarque.

Convolution discrète

Le produit de convolution discrète est défini par :

$$(f \star g)(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(k-n).$$

Si f et g sont causales, alors :

$$\mathcal{Z}\{(f \star g)(k)\} = F(z)G(z). \quad (3.3.1)$$

3.4 Transformée en z inverse

La transformée en z ne contient que des informations aux instants d'échantillonnage. Par conséquent, la transformée en z d'un signal $f(t)$, échantillonné à la période T_e , ne permet pas de retrouver le signal original à temps continu $f(t)$ mais, uniquement le signal à temps discret $f(k)$ constitué des échantillons aux instants $t = kT_e$. Afin d'illustrer cela, considérons deux signaux à temps continu $f(t)$ et $g(t)$ ayant les mêmes valeurs aux instants d'échantillonnage $t = kT_e$. Ces signaux auront la même transformée en z alors que les valeurs entre les instants d'échantillonnage peuvent être différentes, comme le montre la figure 3.2.

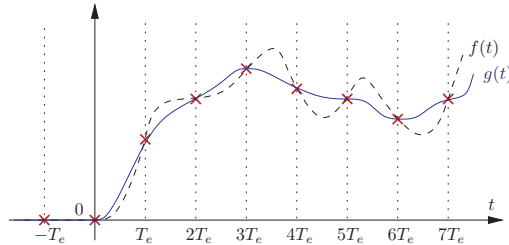


FIGURE 3.2 – Signaux à temps continu ayant même transformée en z après échantillonnage

Le calcul de la *transformée en z inverse* peut se faire à l'aide des tables de transformations. Une courte table de transformées est donnée en annexe A. De manière plus générale, la transformée en z inverse peut être calculée par une des méthodes suivantes :

- décomposition en éléments simples,
- division polynomiale (selon les puissances croissantes de z^{-1}),
- formule d'inversion.

3.4.1 Décomposition en éléments simples

Cette méthode est la plus simple et elle consiste à faire une décomposition en éléments simples de $\frac{F(z)}{z}$. L'idée à la base de cette méthode consiste à faire ressortir dans $F(z)$ des termes dont la transformée en z inverse découle d'une simple utilisation de la table des transformées en z .

Soit $F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ et supposons que $F(z)$ a uniquement des pôles simples réels différents de zéro. Alors, soit $p_i, i = 1, \dots, n$, les pôles de $F(z)$. La décomposition en éléments simples de $\frac{F(z)}{z}$ nous permet d'écrire la transformée en z sous la forme :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \frac{z}{z - p_i}.$$

Alors, en utilisant la table de transformées A, on obtient :

$$f(k) = A_0 \delta(k) + \sum_{i=1}^n A_i p_i^k \mathbb{U}(k).$$

Cette méthode peut également s'utiliser lorsque la fonction $F(z)$ a des pôles complexes et/ou des pôles multiples.

Exemple 3.4.1. On se propose de calculer la transformée en z inverse de :

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - (c+d)z + cd}.$$

On remarque que $\frac{F(z)}{z}$ se factorise en :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-c)(z-d)}.$$

et, en utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient :

$$F(z) = \frac{1}{c-d} \left(\frac{z}{z-c} - \frac{z}{z-d} \right)$$

La transformée en z inverse de $F(z)$ est :

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{c^k - d^k}{c-d} \mathbb{U}(k).$$

En posant $c = e^{-aT_e}$, $d = e^{-bT_e}$, on peut encore écrire cette transformée inverse comme :

$$f(k) = \frac{e^{-akT_e} - e^{-bkT_e}}{e^{-aT_e} - e^{-bT_e}} \mathbb{U}(k).$$

■

Exemple 3.4.2. Soit $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z-1)^2(z-2)}$. La décomposition en éléments simples de $\frac{F(z)}{z}$ s'écrit :

$$\frac{F(z)}{z} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-2}.$$

Alors,

$$f(k) = (-1 - k + 2^{k+1}) \mathbb{U}(k).$$

■

3.4.2 Division polynomiale

Pour utiliser cette technique, il faut écrire la transformée en z sous la forme :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}.$$

La division selon les puissances croissantes de z^{-1} de $N(z)$ par $D(z)$ donne :

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \tag{3.4.1}$$

D'après la propriété sur le retard de la transformée en z , on déduit de l'équation (3.4.1) que :

$$f(k) = c_0 \delta(k) + c_1 \delta(k-1) + c_2 \delta(k-2) + \dots$$

ce qui conduit aux valeurs :

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0, \\ f(1) &= c_1, \\ f(2) &= c_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

L'obtention des coefficients c_i , pour $i = 1, 2, \dots$, qui donnent les valeurs du signal aux instants discrets¹ se fait donc par une simple division :

$$\begin{array}{r|l} b_0 + & b_1 z^{-1} + \dots & a_0 + & a_1 z^{-1} + \dots \\ -(b_0 + & \frac{b_0 a_1}{a_0} z^{-1} + \dots) & \underbrace{\frac{b_0}{a_0}}_{c_0} + & \underbrace{\left(\frac{b_1 a_0 - b_0 a_1}{a_0^2}\right)}_{c_1} z^{-1} + \dots \\ \hline 0 + & \left(b_1 - \frac{b_0 a_1}{a_0}\right) z^{-1} + \dots & & \end{array}$$

¹. ou aux instants d'échantillonnage si la transformée provient d'un signal à temps continu échantillonné.

Exemple 3.4.3. On se propose de calculer la transformée en z inverse de :

$$F(z) = \frac{-z + z^2}{2 + 3z + z^2}.$$

On écrit tout d'abord $F(z)$ comme une fraction rationnelle en z^{-1} , les polynômes ordonné selon les puissances croissantes de z^{-1} :

$$F(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}.$$

ensuite on effectue la division selon les puissances croissantes de z^{-1} :

$$\begin{array}{r|l} 1 - & z^{-1} & 1 + & 3z^{-1} + & 2z^{-2} \\ \hline 1 + & 3z^{-1} + & 2z^{-2} & & \\ - & 4z^{-1} - & 2z^{-2} & & \\ \hline - & 4z^{-1} - & 12z^{-2} - & 8z^{-3} & \\ & & 10z^{-2} + & 8z^{-3} & \\ \hline & & 10z^{-2} + & 30z^{-3} + & 20z^{-4} \\ & & - & 22z^{-3} - & 20z^{-4} \\ & & \dots & & \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(1) &= -4, \\ f(2) &= 10, \\ f(3) &= -22, \\ &\dots \end{aligned}$$

On peut étendre le calcul des termes de $f(k)$ aussi loin qu'on le souhaite. On notera que cette procédure systématique est aisée à programmer. ■

3.4.3 Formule d'inversion

La transformée en z inverse de $F(z)$ s'écrit :

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz,$$

où Γ est un domaine du plan complexe contenant toutes les singularités de $F(z)$. A l'image de la transformée de Laplace inverse, cette intégrale se calcule par la méthode des résidus.

3.5 Application de la transformée en z à la résolution des équations aux différences

Considérons l'équation aux différences :

$$a_0 f(k) + a_1 f(k+1) + \dots + a_n f(k+n) = b_0 g(k) + b_1 g(k+1) + \dots + b_m g(k+m) \text{ avec } m \leq n. \quad (3.5.1)$$

D'après les propriétés de la transformée en z , on calcule la transformée des signaux décalés en temps :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(k)\} &= F(z), \\ \mathcal{Z}\{f(k+1)\} &= zF(z) - zf(0), \\ \mathcal{Z}\{f(k+2)\} &= z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et de même } \mathcal{Z}\{g(k)\} &= G(z), \\ \mathcal{Z}\{g(k+1)\} &= zG(z) - zg(0), \\ \mathcal{Z}\{g(k+2)\} &= z^2G(z) - z^2g(0) - zg(1), \\ &\dots \end{aligned}$$

Par conséquent, si on applique la transformée en z à l'équation aux différences (3.5.1) on obtient :

$$(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) F(z) = (b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m) G(z) + P_n(z),$$

où $P_n(z)$ est un polynôme en z d'ordre maximal n , dépendant des conditions initiales (CI) des signaux $f(k)$ et $g(k)$:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^n a_i z^i \right) f(k) - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{i=k+1}^m b_i z^i \right) g(k)$$

On en déduit que :

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} G(z) + \frac{P_n(z)}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}.$$

En utilisant la transformée en z inverse on peut donc résoudre l'équation aux différences de départ (3.5.1).

Exemple 3.5.1. On se propose de résoudre l'équation aux différences :

$$f(k+2) + 2f(k+1) + f(k) = 0, 8g(k+1) + 0, 4g(k)$$

où :

$$\begin{aligned} f(k) \text{ et } g(k) &\text{ causaux,} \\ g(0) &= 1, \\ g(1) &= 0, 5, \\ g(2) &= -0, 5, \\ g(k) &= 0, \text{ pour } k \geq 3. \end{aligned}$$

La méthode la plus efficace est bien entendu d'appliquer la récurrence :

$$f(k+2) = -2f(k+1) - f(k) + 0, 8g(k+1) + 0, 4g(k).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 0, 8, \\ f(2) &= -0, 8, \\ f(3) &= 0, 6, \\ f(4) &= -0, 6 \\ f(5) &= 0, 6. \end{aligned}$$

La récurrence qui apparaît est très simple et on peut en déduire la forme générale de $f(k)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 0, 8, \\ f(2) &= -0, 8, \\ f(k) &= 0, 6(-1)^{k+1}, \text{ pour } k \geq 3. \end{aligned}$$

Ce résultat pourrait être obtenu à travers un passage par la transformée en z . On modifie tout d'abord l'équation aux différences initiale. Alors,

$$f(k) + 2f(k-1) + f(k-2) = 0, 8g(k-1) + 0, 4g(k-2) \text{ pour } k \geq 2.$$

Si on applique maintenant la transformée en z , on obtient :

$$(1 + 2z^{-1} + z^{-2})F(z) = (0, 8z^{-1} + 0, 4z^{-2})G(z).$$

D'après les valeurs de $g(k)$:

$$G(z) = 1 + 0, 5z^{-1} - 0, 5z^{-2}$$

et donc :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(0, 8z^{-1} + 0, 4z^{-2})(1 + 0, 5z^{-1} - 0, 5z^{-2})}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{0, 4z^{-1}(2 + z^{-1}) 0, 5(2 + z^{-1} - z^{-2})}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{0, 2z^{-1}(1 + z^{-1})(2 + z^{-1})(2 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})^2} = \frac{0, 2(4z^2 - 1)}{z^2(z+1)}. \end{aligned}$$

A partir de la décomposition en éléments simples de $\frac{F(z)}{z}$, nous obtenons :

$$F(z) = 0, 2 \left(3 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{3z}{z+1} \right)$$

En utilisant la table des transformées, nous trouvons :

$$f(k) = 0,6\delta(k) + 0,2\delta(k-1) - 0,2\delta(k-2) - 0,6(-1)^k \mathbb{U}(k).$$

On peut vérifier aisément que cette expression coïncide avec la solution précédente.

A partir de l'expression de $f(k)$, on peut déduire que la valeur finale $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$ n'existe pas parce que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(2k) = -0,6 \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(2k+1) = 0,6.$$

Cela nous permet de mieux comprendre pourquoi on ne peut pas utiliser le théorème de la valeur finale lorsque $F(z)$ a des pôles à l'extérieur du cercle unité, comme il a été souligné dans la section 3.3. ■

Transmittance des systèmes échantillonnés

4.1 Systèmes linéaires à temps discret

Considérons un système à temps discret, linéaire, causal et invariant dans le temps. Ce système fournit en sortie un signal à temps discret $y(k)$ en réponse à un signal à temps discret d'entrée $u(k)$ (voir la figure 4.1). Il peut s'agir, par exemple, d'un filtre numérique ou d'un correcteur numérique.

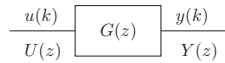


FIGURE 4.1 – Système à temps discret

Dans ce cours, nous abordons deux types de modèles (appelés modèles externes) pour les systèmes discrets. Ces types de modèles peuvent se déduire l'un de l'autre et ils sont décrits soit par des équations aux différences soit par des fonctions de transfert.

La modélisation d'un système à temps discret conduit à une relation entrée-sortie qui est caractérisée par une *équation aux différences* linéaire à coefficients constants. Il s'agit de la loi donnant la sortie du système, à l'instant k , en fonction de l'entrée à l'instant k et des entrées et des sorties aux instants précédents. Cette relation peut s'écrire de manière générale :

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

ou encore

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i). \quad (4.1.1)$$

Notons que cette équation est également appelée *équation récurrente*.

La transformée en z , appliquée à l'équation aux différences (4.1.1) en supposant des conditions initiales nulles, donne :

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i z^{-i} \right) Y(z) = \left(\sum_{i=0}^m b_i z^{-i} \right) U(z).$$

Définition 4.1.1. On appelle *fonction de transfert du système à temps discret* ou *transmittance discrète*, la fraction rationnelle :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$

Autrement dit, la transmittance discrète est définie comme le rapport entre la transformée en z du signal de sortie et la transformée en z du signal d'entrée. ♦

En utilisant la relation précédente, cette transmittance discrète peut s'écrire sous la forme suivante :

$$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}. \quad (4.1.2)$$

Remarque 4.1.1. A partir de l'expression (4.1.2), on peut remarquer qu'il existe une relation biunivoque entre la fonction de transfert et l'équation aux différences dans le sens que ces modèles peuvent se déduire l'un de l'autre. Cependant, notons que la fonction de transfert correspond à l'équation aux différences avec des conditions initiales nulles.

Par définition, les *pôles* du système discret sont les racines du polynôme dénominateur de la fonction de transfert et les *zéros* sont les racines du polynôme numérateur. Le numérateur de la fonction de transfert est également appelé *polynôme caractéristique*.

Définition 4.1.2 (Gain statique). Pour une fonction de transfert discrète $G(z)$, son *gain statique* vaut $G(1)$. ♦

Cela veut dire que pour un signal d'entrée constant $u(k) = u_0$ la sortie en régime permanent vaut $G(1)u_0$.

Remarquons que la fonction de transfert à temps discret est la transformée en z de la réponse impulsionnelle du système¹. En effet, la réponse impulsionnelle du système numérique est obtenue en prenant :

$$u(k) = \delta(k) \quad \text{alors} \quad U(z) = 1.$$

Par conséquent, $Y(z) = G(z)$, ce qui implique $y(k) = g(k)$. Donc, la transformée en z de la réponse impulsionnelle du système discret est identique avec la transmittance discrète $G(z)$. Notons qu'on peut calculer la réponse impulsionnelle comme

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}.$$

De plus, la sortie $y(k)$ du système à temps discret résulte du produit de convolution discret de l'entrée $u(k)$ avec la réponse impulsionnelle $g(k)$, soit :

$$y(k) = (g \star u)(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)u(k-n),$$

1. Réponse du système à une impulsion unité discrète

qui s'écrit encore :

$$y(k) = \sum_{n=0}^k g(n)u(k-n)$$

pour un système causal. Ceci découle directement de la définition (4.1.2) de la fonction de transfert du système à temps discret et de la propriété de la convolution discrète (3.3.1).

Exemple 4.1.1. Étant donné le signal à temps discret $f(k)$ de transformée en z :

$$F(z) = \frac{10z + 5}{z^2 - 1, 2z + 0, 2},$$

calculer $f(k)$. La méthode la plus simple pour calculer $f(k)$ est la décomposition en éléments simples de $\frac{F(z)}{z}$ ou la division selon les puissances croissantes de z^{-1} .

Nous proposons de calculer $f(k)$ en utilisant les éléments développés dans le paragraphe précédent. Considérons que $F(z)$ est la fonction de transfert d'un système numérique d'entrée $u(k)$ et de sortie $y(k)$. On a alors :

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{10z + 5}{z^2 - 1, 2z + 0, 2} = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1, 2z^{-1} + 0, 2z^{-2}},$$

d'où l'équation aux différences :

$$y(k) - 1, 2y(k-1) + 0, 2y(k-2) = 10u(k-1) + 5u(k-2).$$

Finalement, la réponse du système à une impulsion unité discrète $u(k) = \delta(k)$ vaut $f(k) = y(k)$ et obéit à l'équation aux différences :

$$f(k) = 1, 2f(k-1) - 0, 2f(k-2) + 10\delta(k-1) + 5\delta(k-2).$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 10, \\ f(2) &= 17, \\ f(3) &= 18, 4, \\ f(4) &= 18, 68, \dots \end{aligned}$$

■

4.2 Modélisation des systèmes échantillonnés

4.2.1 Transmittance échantillonnée

Lorsqu'on travaille avec des signaux à temps discret issus d'un procédé d'échantillonnage, il est possible de se trouver dans le cas du schéma de la figure 4.2.

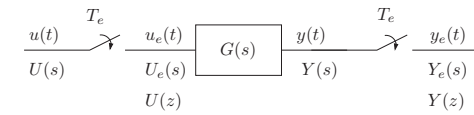


FIGURE 4.2 – Système à temps discret à entrée et sortie échantillonnées

En utilisant l'équivalence entre les transformées de Laplace des signaux échantillonnés et les transformées en z des signaux à temps discret, évaluons :

$$Y_e(s) = (G(s)U_e(s))_e.$$

D'après (2.2.3) :

$$\begin{aligned} Y_e(s) &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right) U_e\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right). \end{aligned}$$

Sachant que :

$$U_e(s) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right)$$

est périodique, de période $\frac{2j\pi}{T_e}$, on peut écrire $U_e\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right) = U_e(s)$ et donc :

$$Y_e(s) = \left(\frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right)\right) U_e(s).$$

On en déduit que :

$$\boxed{Y_e(s) = G_e(s) U_e(s)}.$$

En se basant sur l'équivalence entre transformée de Laplace des signaux échantillonnés et transformée en z des signaux à temps discret (voir section 3.1), on peut également écrire :

$$\boxed{Y(z) = G(z) U(z)}.$$

La fonction de transfert en z du système échantillonné en boucle ouverte représenté à la figure 4.2 est donc :

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}\{g(t)\} = \mathcal{Z}\{G(s)\}}.$$

Remarque 4.2.1.

1. La fonction de transfert en z du système échantillonné est tout simplement la transformée en z de la transmittance continue et

$$\mathcal{Z}\{G(s)\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\}.$$

2. On a la relation suivante

$$\mathcal{Z}\{G(s)U_e(s)\} = G(z)U(z).$$

3. Dans le cas où l'échantillonneur d'entrée est absent (voir figure 4.3) alors

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G(s)U(s)\} \neq G(z)U(z).$$

FIGURE 4.3 – Système à temps discret à sortie échantillonnée

4.2.2 Transmittance échantillonnée des systèmes ouverts

Supposons que le procédé continu est composé de deux sous-systèmes en série, comme présenté à la figure 4.4. Dans ce cas, les deux sous-systèmes ne peuvent pas être dissociés. En effet :

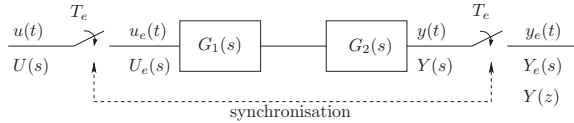


FIGURE 4.4 – Systèmes continus en série et échantillonnage

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)U_e(s) \quad \text{et donc}$$

$$Y_e(s) = (G_1(s)G_2(s)U_e(s))_e = (G_1(s)G_2(s))_e U_e(s).$$

Cela implique :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}U(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\}\}U(z).$$

Donc, de manière générale :

$$(G_1(s)G_2(s))_e \neq (G_1(s))_e (G_2(s))_e.$$

ECHANTILLONNAGE D'UN SYSTÈME CONTINU PRÉCÉDÉ PAR UN BOZ

Soit le système illustré par la figure 4.5, composé d'un processus précédé par un bloqueur d'ordre zéro.

L'association d'un BOZ avec un procédé physique constitue un système à temps continu dont la fonction de transfert est :

$$\frac{Y(s)}{U_e(s)} = B_0(s)G(s) = \left(\frac{1 - e^{-T_e s}}{s}\right) G(s).$$

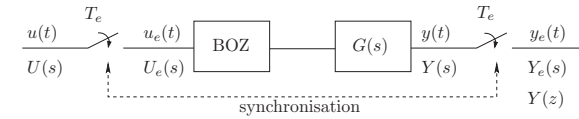


FIGURE 4.5 – Chaîne bloqueur d'ordre zéro et procédé

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{U(z)} &= \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1 - e^{-T_e s}}{s}\right) G(s)\right\}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-T_e s} \frac{G(s)}{s}\right\} \\ &= \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-T_e s} \frac{G(s)}{s}\right\}\right\}. \end{aligned}$$

Sachant que le terme $e^{-T_e s}$ traduit un retard de T_e dans le domaine temporel, on obtient la transmittance échantillonnée suivante pour le système continu précédé par un BOZ :

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}} \quad (4.2.1)$$

avec la notation $\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}$.

Exemple 4.2.1. Considérons maintenant le cas illustré par la figure 4.6.

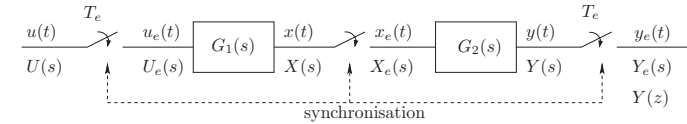


FIGURE 4.6 – Systèmes échantillonnés en série

Alors,

$$X_e(s) = (G_1(s)U_e(s))_e = (G_1(s))_e U_e(s)$$

ce qui implique

$$X(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}U(z).$$

Analogiquement, on a :

$$Y_e(s) = (G_2(s)X_e(s))_e = (G_2(s))_e X_e(s) \implies Y(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)\}X(z).$$

On déduit de ces deux équations que

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}\mathcal{Z}\{G_2(s)\}U(z).}$$

■

4.2.3 Transmittance échantillonnée des systèmes bouclés

Considérons le système bouclé de la figure 4.7. Les propriétés de linéarité de l'échantillonnage nous permettent d'obtenir le schéma équivalent de la figure 4.8.

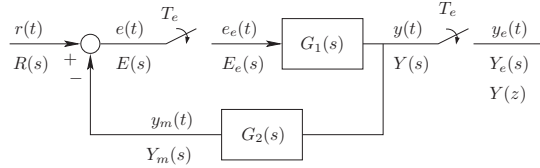


FIGURE 4.7 – Systèmes bouclés

A partir du schéma équivalent, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}\{G_1(s)\}E(z), \\ Y_m(z) &= \mathcal{Z}\{G_2(s)G_1(s)\}E(z) \text{ et} \\ E(z) &= R(z) - Y_m(z). \end{aligned}$$

Cela nous permet de déduire la transmittance échantillonnée suivante pour le système bouclé :

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{G_1(s)\}}{1 + \mathcal{Z}\{G_2(s)G_1(s)\}}.$$

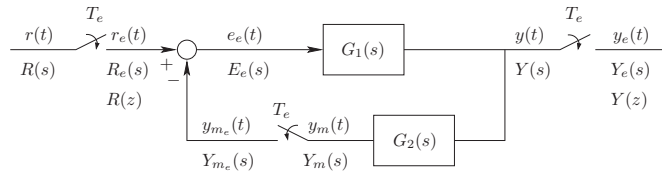


FIGURE 4.8 – Systèmes bouclés

Exemple 4.2.2 (Transmittance d'un système échantillonné bouclé avec correcteur numérique). Considérons maintenant un système bouclé comportant un correcteur numérique $C(z)$. On se propose de calculer la transmittance échantillonnée du système bouclé. On peut déduire les équations correspondant au schéma de la figure 4.9 :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G(s)B_0(s)\} U(z), \quad (4.2.2a)$$

$$Y_m(z) = \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\} U(z), \quad (4.2.2b)$$

$$U(z) = C(z) E(z) \text{ et} \quad (4.2.2c)$$

$$E(z) = R(z) - Y_m(z). \quad (4.2.2d)$$

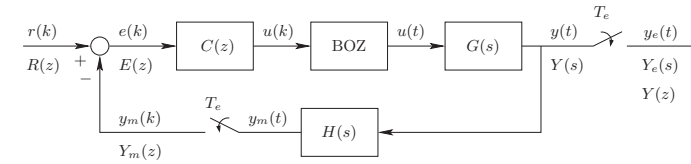


FIGURE 4.9 – Système bouclé avec un correcteur numérique

En utilisant les équations (4.2.2b), (4.2.2c), (4.2.2d), nous obtenons la fonction de transfert entre $E(z)$ et $R(z)$:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\} C(z)}$$

et donc,

$$U(z) = \frac{C(z) R(z)}{1 + \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\} C(z)}.$$

Regroupant ce résultat avec l'équation (4.2.2a), nous obtenons finalement la transmittance échantillonnée du système bouclé :

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z) \mathcal{Z}\{G(s)B_0(s)\}}{1 + C(z) \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\}}$$

Si on tient compte de la fonction de transfert du BOZ, la transmittance échantillonnée vaut :

$$\boxed{\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{(1 - z^{-1}) C(z) \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}{1 + (1 - z^{-1}) C(z) \mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)G(s)}{s}\right\}}} \quad (4.2.3)$$

■

Exemple 4.2.3 (Transmittance des systèmes bouclés en présence de perturbations). Pour cette exemple, on considère le système de la figure 4.10 soumis à la perturbation externe $p(t)$ et au bruit $n(k)$. On se propose de calculer la transmittance échantillonnée pour le système bouclé.

Une première méthode de calcul de la transmittance échantillonnée consiste à appliquer l'algèbre des blocs comme pour l'exercice précédent. Alors, $E(z) = R(z) - (N(z) + Y(z))$ et

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)B_0(s)\} C(z)E(z) + \mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\}.$$

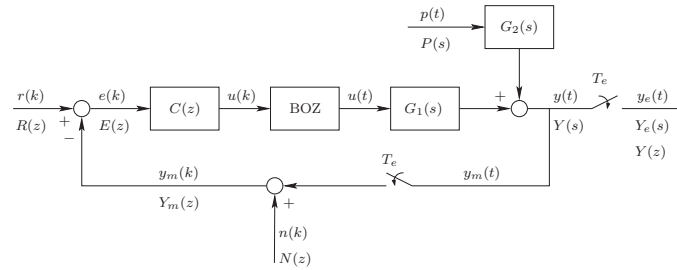


FIGURE 4.10 – Systèmes bouclés en présence de perturbations

En combinant ces deux équations on retrouve la relation suivante pour le système bouclé :

$$Y(z) = \frac{C(z) (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}{1 + C(z) (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}} (R(z) - N(z)) + \frac{1}{1 + C(z) (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}} \mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\} \quad (4.2.4)$$

où $\mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\} = \mathcal{Z}\{(g_2 * p)(t)\}$.

La deuxième méthode consiste à utiliser le théorème de superposition et à appliquer la formule (4.2.3) :

– entrée seule :

$$Y(z) = \frac{(1 - z^{-1})C(z) \mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}{1 + (1 - z^{-1})C(z) \mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}} R(z) ;$$

– bruit seul :

$$Y(z) = - \frac{(1 - z^{-1})C(z) \mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}{1 + (1 - z^{-1})C(z) \mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}} N(z) ;$$

– perturbation seule :

$$Y(z) = \frac{\mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\}}{1 + (1 - z^{-1})C(z) \mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}.$$

En superposant, en sommant ces effets, on obtient la fonction de transfert (4.2.4). ■

Analyse des systèmes échantillonnés

5.1 Réponse des systèmes échantillonnés

Considérons un système échantillonné classique tel qu'il a été rappelé à la figure 5.1. Dans cette section, on étudie la réponse temporelle du système échantillonné ainsi que

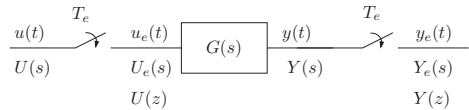


FIGURE 5.1 – Système à temps discret à entrée et sortie échantillonnées

la relation entre le système continu et les pôles et les zéros dans le plan en z .

5.1.1 Pôles

Les pôles en s du système représenté à la figure 5.1 sont les pôles de la fonction de transfert $G(s) = \frac{Y(s)}{U_e(s)}$. Ses pôles en z sont les pôles de la transmittance échantillonnée $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$. Si la fonction $G(s)$ ne comporte que des pôles simples alors elle se décompose en éléments simples sous la forme :

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i}$$

et par conséquent :

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} \mathbb{U}(t).$$

Les pôles en z sont obtenus en appliquant la transformée en z :

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(t)\} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z - e^{p_i T_c}}$$

Par conséquent, à un pôle simple en s de valeur p_i correspond un pôle en z de valeur $e^{p_i T_c}$. Ce résultat a été déjà illustré dans la section 3.2, par la figure 3.1.

Nous rappelons que dans le cas d'un pôle en s initial réel $s = \sigma_1$, le point obtenu dans le plan en z sera réel : $z = e^{\sigma_1 T_c}$. Dans le cas d'une paire de pôles complexes conjugués $\sigma_2 \pm j\omega_2$, les points obtenus dans le plan en z auront pour affixe $e^{\sigma_2 T_c} e^{\pm j\omega_2 T_c}$. Donc, ceux-ci ont pour module $e^{\sigma_2 T_c}$ et pour argument $\omega_2 T_c$.

SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE

Pour les systèmes du premier ordre, la correspondance entre les pôles a été illustrée à la figure 5.2 autant dans le cas d'un pôle stable que dans le cas d'un pôle instable.

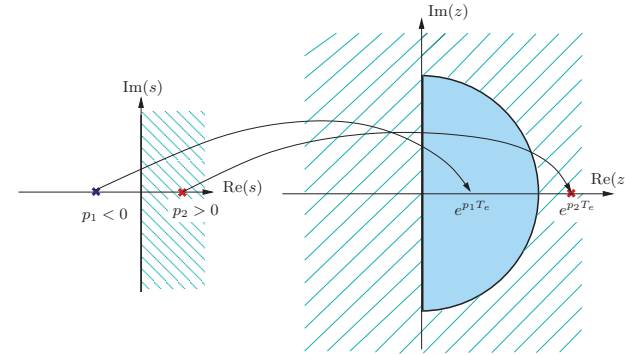


FIGURE 5.2 – Correspondance entre les pôles en s et les pôles en z d'un système ordre 1

A partir de cette correspondance, on peut remarquer que les pôles en z réels négatifs n'ont pas de correspondant sur l'axe réel du plan en s .

SYSTÈMES DU SECOND ORDRE

Soit un système de second ordre de fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{K\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

avec ξ le facteur d'amortissement et ω_n la pulsation naturelle du système.

Dans le cas d'un système du second ordre possédant deux pôles réels, on peut utiliser la transformation précédente.

Dans le cas où le système possède deux pôles en s complexes conjugués :

$$s_{1,2} = -(\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2})\omega_n,$$

on obtient les pôles en z :

$$z_{1,2} = e^{-\xi\omega_n T_c} e^{\pm j\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n T_c}.$$

Courbes à $\xi = \text{constant}$: Si on considère des pôles en s situés sur deux demi-droites à amortissement constant alors :

$$z_{1,2} = e^{-\frac{\xi\theta}{\sqrt{1-\xi^2}}} e^{\pm j\theta}$$

où $\theta = \sqrt{1-\xi^2}\omega_n T_e$. Les deux pôles en z correspondant ont donc pour module $e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\theta}$ et pour argument $\pm\theta$. Cela veut dire que lorsque les pôles en s se déplacent sur les deux demi-droites, les pôles en z se déplacent sur une spirale logarithmique (voir la figure 5.3).

Courbes $\omega_n = \text{constant}$: On considère maintenant la transformation des cercles correspondant aux pôles en s de même pulsation naturelle. On montre que le lieu des pôles en z correspondant est constitué de courbes perpendiculaires aux spirales logarithmiques de même amortissement (on représente en fait les courbes de même $\omega_n T_e$).

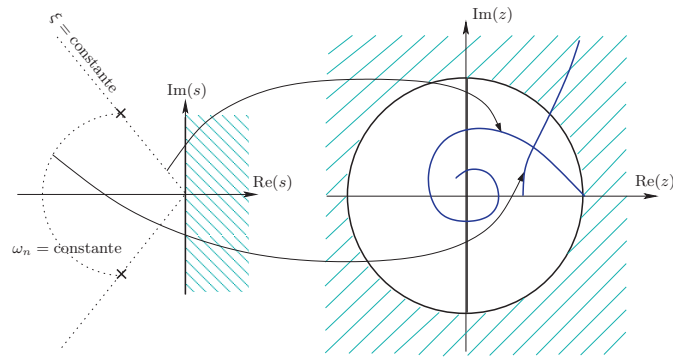


FIGURE 5.3 – Correspondance entre les pôles en s et les pôles en z d'un système d'ordre 2

En réunissant les deux lieux précédents on obtient l'abaque de la figure 5.4. Cet abaque est utilisé lorsqu'on cherche à analyser les caractéristiques de la réponse indicielle du système échantillonné par rapport au système à temps continu.

SYSTÈMES D'ORDRE QUELCONQUE

Dans le cas général d'un système d'ordre quelconque, la correspondance entre les pôles en s et les pôles en z est obtenue en combinant les deux cas précédents. En effet, les correspondances entre les différentes régions du plan s et celles du plan z s'obtient en utilisant la transformation $z = e^{sT_e}$ comme indiquées à la figure 5.5. On distingue plusieurs régions :

- la droite imaginaire dans le plan en s se traduit par le cercle unité dans le plan en z ;

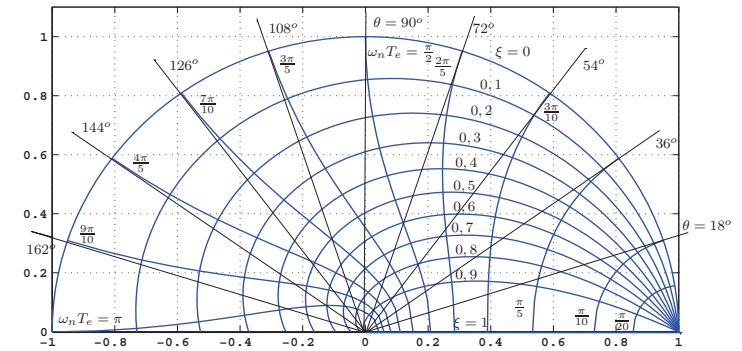


FIGURE 5.4 – Lieu des pôles du plan z pour $\xi = ct$ et $\omega_n T_e = ct$.

- un pôle réel positif en s correspond à un pôle réel positif de valeur supérieure à 1 dans le plan en z ;
- un pôle réel négatif en s correspond à un pôle réel positif de valeur inférieure à 1 dans le plan en z ;
- un pôle complexe en s se retrouve sur une spirale logarithmique dans le plan en z ;
- un pôle complexe ayant une partie imaginaire en s multiple de $\frac{\pi}{T_e}$ correspond à un pôle réel négatif en z .

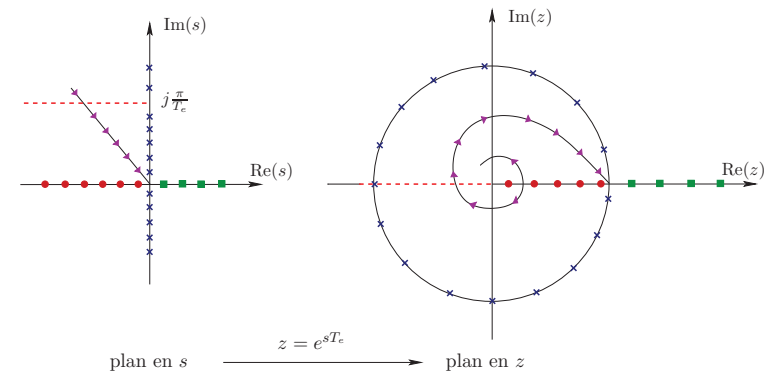


FIGURE 5.5 – Correspondance entre les pôles en s et les pôles en z

5.1.2 Zéros

Il n'existe pas de relation simple entre les zéros de $G(s)$ et ceux de $G(z)$. $G(z)$ peut posséder des zéros et $G(s)$ pas, comme on peut le remarquer dans l'exemple suivant. Considérons le système :

$$g(t) = e^{-at}$$

alors :

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{et}$$

$$G(z) = \frac{z}{z - e^{-aTc}}$$

Ainsi, il existe un zéro en z alors qu'il n'en existe pas en s .

Remarque 5.1.1.

- Si la fonction de transfert $G(s)$ est à déphasage non minimal, cela n'implique pas que la transmittance échantillonnée $G(z)$ est à déphasage non minimal.
- Un système continu sans zéros dans le demi-plan de droite peut donner un système échantillonné avec des zéros en dehors du cercle unité.

5.1.3 Réponse temporelle des systèmes échantillonnés

On peut calculer la réponse temporelle d'un système échantillonné :

- à partir de l'équation aux différences. Le modèle par équation récurrente permet de calculer la réponse point par point et cette modélisation est directement adaptable à l'implémentation dans un ordinateur.
- à partir de la fonction de transfert. En effet, si $G(z)$ est la fonction de transfert et $U(z)$ est la transformée en z de la séquence d'entrée alors, sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la réponse du système échantillonné est donnée par :

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)U(z)\}.$$

Pour calculer l'inverse de la transformée en z on peut se référer aux différentes méthodes vues au sous-chapitre 3.4.

Pour calculer la réponse d'un système échantillonné on utilise la décomposition en éléments simples de $\frac{Y(z)}{z}$. Nous étudions cette décomposition dans le cas général.

Soit $G(z)$ la fonction de transfert du système échantillonné et soit p_1, p_2, \dots, p_{n_p} les pôles de $G(z)$ avec $m_i, i = 1, \dots, n_p$, l'ordre de multiplicité de chaque pôle. On définit également l'entrée quelconque $U(z)$ du système qui est caractérisée par un polynôme dénominateur ayant les racines z_1, z_2, \dots, z_q . Alors, la décomposition en éléments simples de $\frac{Y(z)}{z} = \frac{G(z)U(z)}{z}$ permet d'écrire :

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{n_p} G_i(z) + \underbrace{\sum_{j=1}^q U_j(z)}_{\text{régime forcé}} .$$

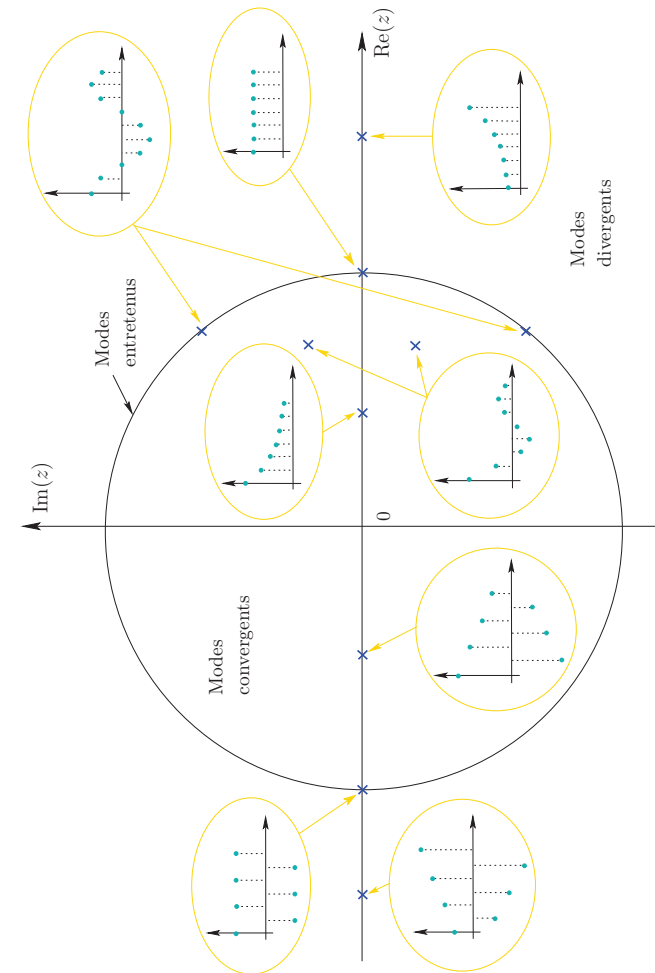


FIGURE 5.6 – Réponse temporelle en fonction de la position des pôles dans le plan z

Les derniers termes de cette expression représentent le *régime forcé* du système et dépendent essentiellement du type d'entrée. Les termes $G_i(z)$, même s'ils dépendent du choix du signal d'entrée, décrivent les caractéristiques intrinsèques au système $G(z)$. On s'intéresse par la suite à l'expression des termes $G_i(z)$ qui s'écrivent :

$$G_i(z) = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}z}{(z-p_i)^j}.$$

La transformée en z inverse s'écrit :

$$\mathcal{Z}^{-1}\{G_i(z)\} = P_i(k)p_i^k$$

avec $P_i(k)$ un polynôme en k d'ordre $m_i - 1$. Comme ce terme constitue une suite géométrique des puissances de p_i , l'évolution de ce terme dépend essentiellement de la valeur de p_i .

A chaque pôle p_i on associe un *mode* et on va décrire la réponse du système en fonction de ces modes. Notons qu'il a autant des modes dans le système que des pôles distincts.

MODE RÉEL

Un mode réel p_i correspond à un pôle réel p_i . En utilisant la théorie des suites, nous pouvons trouver la contribution de ce mode à la réponse du système. Alors, indépendamment du polynôme $P_i(k)$, on a :

- Si $|p_i| < 1$ alors

$$P_i(k)p_i^k \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \longrightarrow \infty.$$

On parle d'un *mode convergent* et la vitesse de convergence dépend de la valeur de p_i (convergence exponentielle). Si $p_i > 0$ alors la suite $\{P_i(k)p_i^k\}$ garde le même signe et le mode est appelé *mode apériodique*. Par contre, si $p_i < 0$ alors la suite peut changer de signe et, dans ce cas, on parle d'un *mode oscillatoire*. Si $p_i = 0$ ($m_i = 1$) alors la suite converge vers zéro en une seule itération et on obtient ce qu'on appelle une *réponse pile*.

- Si $|p_i| > 1$ alors

$$P_i(k)p_i^k \longrightarrow \pm\infty \text{ lorsque } k \longrightarrow \infty.$$

On parle alors d'un *mode divergent* et la vitesse de divergence dépend de la valeur de p_i (divergence exponentielle).

- Si $|p_i| = 1$ et $P_i(k)$ est un polynôme constant¹ alors la contribution de ce mode est un signal constant. On parle alors de *mode entretenu*. Si $P_i(k)$ est de degré non nul alors $P_i(k)p_i^k$ diverge quand $k \longrightarrow \infty$ (divergence polynomiale).

MODE COMPLEXE

Pour un pôle complexe p il existe un pôle p^* complexe conjugué de p , de même ordre de multiplicité. Alors un mode complexe est associé à la paire de pôles complexes conjugués. La contribution de ce mode complexe à la réponse du système est de la forme :

$$P_\alpha(k)p^k + P_\beta(k)p^{*k}.$$

1. Cela est possible uniquement lorsque l'ordre de multiplicité $m_i = 1$

On peut montrer que cette forme peut s'écrire également comme étant $P(k)|p|^k \sin(k\theta + \phi)$ où $P(k)$ est un polynôme à coefficients réels, θ est l'argument du pôle p et ϕ est un déphasage. Par conséquent, la contribution de ce mode à la réponse du système est de type oscillant et elle dépend du module du pôle :

- Si $|p| > 1$ la réponse associée à ce mode diverge (divergence exponentielle). Dans ce cas, on parle d'un *régime oscillant non amorti*.
- Si $|p| < 1$ alors la réponse converge et le régime transitoire associé à cette réponse est appelé *régime oscillant amorti*.
- Si $|p| = 1$ et le pôle est de multiplicité 1 alors on a un pôle entretenu et donc, la réponse est oscillante sans convergence ni divergence. Si $P(k)$ est de degré non nul alors le mode est divergent.

SUPERPOSITION DES MODES

Les contributions des différents types de modes ont été regroupées à la figure 5.6. La réponse globale du système est obtenue en superposant les contributions de tous les modes du système et de la réponse forcée. Remarquons que, alors qu'un système à temps continu peut avoir qu'une seule source d'oscillations, un système à temps discret peut en avoir deux. Celles-ci sont la présence des pôles complexes conjugués et la présence des pôles à partie réelle négative.

5.2 Réponse fréquentielle

Pour étudier la *réponse en fréquence* (harmonique) des systèmes échantillonnés, nous considérons le système de la figure 5.1.

Nous savons que :

$$Y_e(s) = G_e(s)U_e(s) \quad \text{et} \quad Y(z) = G(z)U(z)$$

avec la relation suivante entre les deux fonctions de transfert

$$G(z) = G_e\left(s = \frac{1}{T_e} \ln z\right) \quad \text{et} \quad G_e(s) = G(z = e^{T_e s}).$$

La réponse fréquentielle du système échantillonné est obtenue :

- soit à partir de $G_e(s)$ en remplaçant s par $j\omega$
- soit à partir de $G(z)$ en remplaçant z par $e^{j\omega T_e}$.

Par la suite, on étudie la réponse harmonique à partir de $G(z)$. En effet, si on considère une entrée sinusoïdale causale $u(t) = U_0 \sin(2\pi ft) \mathbb{U}(t)$ alors $u(k) = U_0 \sin(2\pi \nu k) \mathbb{U}(k)$ avec $\nu = fT_e$ et :

- $y(k)$ tend vers $U_0 G(\nu) \sin(2\pi \nu k + \phi(\nu))$ et
- $y(kT_e)$ tend vers $U_0 G(\omega T_e) \sin(\omega T_e k + \phi(\omega))$.

Pour un système discret, la réponse fréquentielle en module et en phase est donnée par :

$$\begin{cases} |G(z)|_{z=e^{2\pi\nu j}} & \text{en faisant } z \text{ parcourir le cercle unité} \\ \arg(G(z))_{z=e^{2\pi\nu j}} & \text{c'est à dire pour } \nu \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Dans le cas d'un système échantillonné, la réponse fréquentielle en module et en phase est donnée par :

$$\begin{cases} |G(z)|_{z=e^{j\omega T_e}} & \text{en faisant } z \text{ parcourir le cercle unité} \\ \arg(G(z))_{z=e^{j\omega T_e}} & \text{c'est à dire pour } \omega \in [-\frac{\pi}{T_e}; \frac{\pi}{T_e}]. \end{cases}$$

Le tracé de la réponse fréquentielle est également appelé *diagramme de Bode*. A partir de la formule (2.2.3) qui s'applique également dans le cas des systèmes échantillonnés, on déduit que le diagramme de Bode est périodique de période $\nu = 1$ (respectivement $\omega = \frac{2\pi}{T_e}$) et symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$ (respectivement $\frac{\pi}{T_e}$). C'est pour cela que, généralement, on trace le diagramme de Bode uniquement pour $\nu \in [0; \frac{1}{2}]$ (respectivement $\omega \in [0; \frac{\pi}{T_e}]$) avec (souvent) une échelle linéaire.

Remarque 5.2.1. Les règles de construction du diagramme de Bode asymptotique ne s'applique pas.

Exemple 5.2.1. Soit la fonction de transfert d'un système à temps continu $G(s) = \frac{1}{s+5}$. Comme le but final est de construire un correcteur numérique pour ce système alors celui-ci sera précédé par un BOZ dans la boucle de commande. Pour calculer la transmittance échantillonnée du système on utilise la formule (4.2.1) et donc :

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{1-c}{5(z-c)} = \frac{0,07869}{z-0,6065}$$

avec $c = e^{-5T_e}$ et la période d'échantillonnage $T_e = 0,1$.

La figure 5.7 montre la réponse fréquentielle en module et en phase du système continu et du système échantillonné. On remarque une distorsion de gain dans la réponse fréquentielle du système échantillonné due au recouvrement de spectre et une perte de phase due au bloqueur.

■

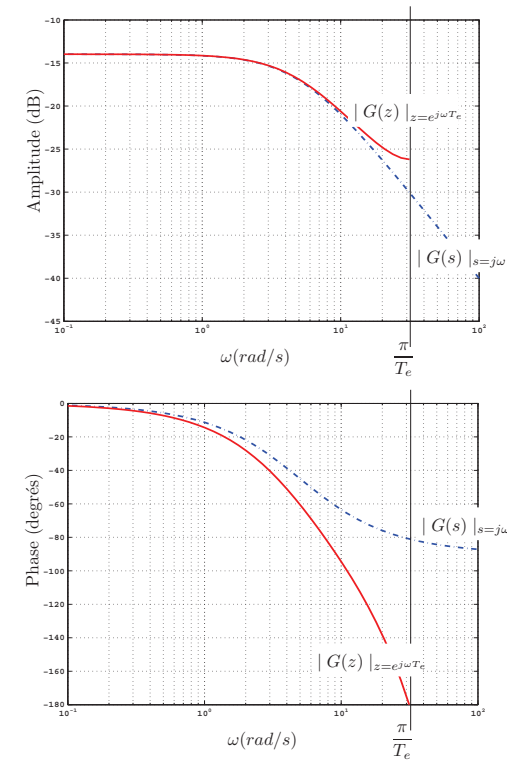


FIGURE 5.7 – Réponse fréquentielle d'un système échantillonné

5.3 Stabilité

5.3.1 Critère général de stabilité

Nous présentons la notion de stabilité “entrée bornée-sortie bornée” (en anglais bounded input-bounded output ou BIBO) pour les systèmes à temps discrets.

Définition 5.3.1 (Stabilité BIBO). Un système défini par ses entrées-sorties est *BIBO stable* si pour toute entrée bornée

$$\| u(k) \|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} | u(k) | < \infty$$

la sortie est bornée

$$\| y(k) \|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} | y(k) | < \infty$$

◆

Cette définition d'ordre très général est difficile à appliquer en pratique. Le théorème suivant montre que l'étude de la stabilité BIBO d'un système linéaire se réduit à étudier les modes du système.

Théorème 5.3.1 (Stabilité). *Un système linéaire invariant à temps discret est stable si et seulement si tous ses pôles sont de module strictement inférieur à un.* ■

Lorsqu'on ne peut pas calculer les pôles par une méthode numérique alors nous pouvons utiliser deux autres critères algébriques de stabilité.

5.3.2 Critères algébriques de stabilité

CRITÈRE DE JURY

Le critère de Jury adresse le problème de stabilité d'un système linéaire à temps discret à partir de la connaissance du polynôme caractéristique.

Soit le système à temps discret de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \text{ avec } D(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \text{ et } a_n > 0.$$

Lorsque les coefficients de $D(z)$ sont réels, le critère de Jury permet de conclure sur la stabilité du système sans calculer les racines du dénominateur ou du polynôme caractéristique $D(z)$.

Théorème 5.3.2 (Critère de Jury). *Soit :*

$$\begin{cases} a_{0,i} = a_i, \forall i = 0, 1, \dots, n, \\ a_{j+1,i} = \begin{vmatrix} a_{j,0} & a_{j,n-j-i} \\ a_{j,n-j} & a_{j,i} \end{vmatrix}, \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \text{ et } 0 \leq i \leq n-j-1. \end{cases}$$

Le polynôme $D(z)$, à coefficients réels, a ses racines de module inférieur à l'unité si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

1. $|a_0| - a_n < 0;$
2. $D(1) > 0;$
3. $(-1)^n D(-1) > 0;$
4. $|a_{j,0}| - |a_{j,n-j}| > 0, \forall j = 1, 2, \dots, n-2.$

■

Etudions ce critère sur les cas des systèmes d'ordre inférieur ou égal à quatre :

Cas $n = 1$: Alors, $D(z) = a_0 + a_1z$ et les conditions du théorème 5.3.2 sont

1. $|a_0| < a_1;$
2. $a_0 + a_1 > 0;$
3. $-a_0 + a_1 > 0.$

La condition 4 du théorème 5.3.2 ne s'applique pas car $n < 3$.

Cas $n = 2$: Alors, $D(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ et les conditions du théorème 5.3.2 s'écrivent

1. $|a_0| < a_2;$
2. $a_0 + a_1 + a_2 > 0;$
3. $a_0 - a_1 + a_2 > 0;$

Comme pour le cas précédent, la condition 4 du théorème 5.3.2 ne s'applique pas car $n < 3$.

Cas $n = 3$: Alors, $D(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3$ et les conditions du théorème 5.3.2 devient

1. $|a_0| < a_3;$
2. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0;$
3. $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0;$

4. Pour écrire facilement cette quatrième condition on établit le tableau suivant :

a_0		a_1		a_2		a_3	
a_3		a_2		a_1		a_0	
$a_{1,0} =$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}$	$a_{1,1} =$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}$	$a_{1,2} =$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$		

La première et la deuxième lignes de ce tableau sont construites en utilisant les coefficients de $D(z)$ dans l'ordre croissant et respectivement décroissant des puissances de z . Par la suite, la troisième ligne contient uniquement trois coefficients et chaque coefficient $a_{1,j}$ est calculé comme étant le déterminant de la matrice construite avec la première et la $(n-j+1)$ -ème colonnes de deux lignes précédentes. Alors, la condition 4 s'écrit $|a_0^2 - a_3^2| > |a_0a_2 - a_3a_1|$ qui est équivalente à

$$a_3^2 - a_0^2 > |a_0a_2 - a_3a_1|.$$

Cas $n = 4$: Alors, $D(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$ et les conditions du théorème 5.3.2 s'écrivent

1. $|a_0| < a_4;$
2. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0;$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$a_{1,0} = \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_4 & a_0 \end{vmatrix}$	$a_{1,1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_4 & a_1 \end{vmatrix}$	$a_{1,2} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix}$	$a_{1,3} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_4 & a_3 \end{vmatrix}$	
$a_{1,3}$	$a_{1,2}$	$a_{1,1}$	$a_{1,0}$	
$a_{2,0} = \begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,3} \\ a_{1,3} & a_{1,0} \end{vmatrix}$	$a_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,2} \\ a_{1,3} & a_{1,1} \end{vmatrix}$	$a_{2,2} = \begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} \\ a_{1,3} & a_{1,2} \end{vmatrix}$		

TABLE 5.1 – Tableau pour le critère de Jury ($n = 4$)

- $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0$;
- On construit le tableau 5.1.

Les trois premières lignes de ce tableau sont construites comme pour le cas précédent. La quatrième ligne est construite à partir des valeurs calculées $a_{1,j}$ dans l'ordre décroissant de j . Par la suite, la cinquième ligne contient uniquement trois coefficients et chaque coefficient $a_{2,j}$ est calculé comme étant le déterminant de la matrice construite avec la première et la $(n - j + 1)$ -ème colonnes de deux lignes précédentes. Donc, la condition 4 s'écrit :

$$\begin{cases} |a_{1,0}| > |a_{1,3}| \iff a_4^2 - a_0^2 > |a_0 a_3 - a_1 a_4| \text{ et} \\ |a_{2,0}| > |a_{2,2}|. \end{cases}$$

TRANSFORMÉE EN w ET CRITÈRE DE ROUTH

Le critère de Routh est utilisé pour les systèmes à temps continu. Donc, il ne s'applique pas tel quel aux systèmes à temps discret. Pour pouvoir l'appliquer on utilise la transformée en w :

$$w = \frac{z-1}{z+1} \iff z = \frac{1+w}{1-w}.$$

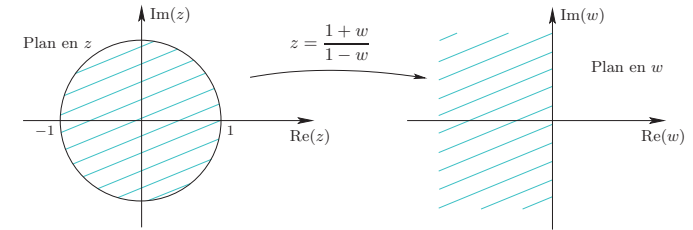
Si $z = e^{j\omega T_e}$ alors :

$$\begin{aligned} w &= \frac{e^{j\omega T_e} - 1}{e^{j\omega T_e} + 1} = \frac{e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} e^{j\frac{\omega T_e}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}{e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} e^{j\frac{\omega T_e}{2}} + e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}} \\ &= j \frac{\sin(\frac{\omega T_e}{2})}{\cos(\frac{\omega T_e}{2})} = j \tan(\frac{\omega T_e}{2}). \end{aligned}$$

Donc, pour $\omega T_e \in [-\pi, \pi]$ on obtient $w \in j[-\infty, \infty]$. Cela signifie que le cercle unité est envoyé sur l'axe imaginaire. De plus,

$$|z| = \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{Re}(w))^2 + \operatorname{Im}(w)^2}}{\sqrt{(1 - \operatorname{Re}(w))^2 + \operatorname{Im}(w)^2}}$$

et $|z| < 1$ est équivalent à $\operatorname{Re}(w) < 0$. Par conséquent, la transformée en w associe à l'intérieur du cercle unité du plan en z le demi-plan gauche du plan en w , comme on peut le voir sur la figure 5.8.

FIGURE 5.8 – Correspondance entre le plan en z et le plan en w

La condition de stabilité du théorème 5.3.1, portant sur l'étude du polynôme dénominateur $D(z)$ de la fonction de transfert, est modifiée. On admet que la stabilité est vérifiée si le polynôme en w :

$$D'(w) = (1-w)^n D\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$$

vérifie le critère de Routh (voir [2], [9] pour des rappels sur le critère de Routh). Notons que, généralement, cette méthode est très calculatoire et par conséquent, utilisée uniquement pour des systèmes d'ordre très faible.

Analyse des systèmes échantillonnés en boucle fermée

6.1 Structure des systèmes à commande numérique

Le pilotage par ordinateur des procédés physiques, notamment leur asservissement, est de plus en plus utilisé dans le milieu industriel pour des raisons de coût et de rapidité d'implémentation. La commande numérique du procédé est illustrée au schéma de la figure 6.1.

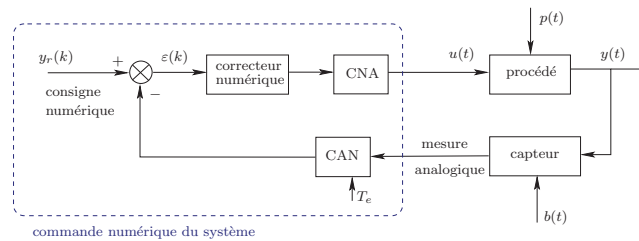


FIGURE 6.1 – Commande numérique d'un procédé

Le principe d'un *système à commande numérique* est de remplacer la commande analogique du système par des algorithmes mis en œuvre sur ordinateur. Le ordinateur nécessitant un certain temps pour effectuer ces opérations, on introduit alors un découpage temporel des signaux au niveau du ordinateur. Les systèmes à commande numérique considérés présentent donc un caractère hybride temps continu - temps discret. Par conséquent, il est nécessaire de réaliser une *interface* entre le ordinateur et le procédé et cette interface est obtenue à l'aide :

- d'un *convertisseur numérique-analogique* (CNA) pour convertir les signaux numériques issus du ordinateur dans des signaux analogiques constituant l'entrée du procédé ;
- d'un *convertisseur analogique-numérique* (CAN) pour convertir les mesures effectuées sur le procédé et les fournir au ordinateur. Il peut arriver que le capteur soit

lui-même discret et qu'il n'y ait donc pas de conversion analogique-numérique à faire.

Dans ce chapitre, nous étudions deux critères de stabilité pour les systèmes asservis ainsi que la notion de précision. Pour cela, remarquons d'abord que le système de la figure 6.1 comporte une partie numérique et une partie analogique. Afin d'étudier la stabilité du système en boucle fermée on doit utiliser le même formalisme mathématique pour tout le système. Alors, le système asservi équivalent comportant des transmittance

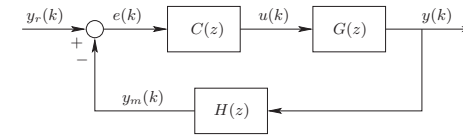


FIGURE 6.2 – Système asservi discret.

échantillonné a été représenté à la figure 6.2. Notons que tout système à commande numérique peut être représenté comme le système de la figure 6.2 en calculant les fonctions $G(z)$ et $H(z)$ de manière appropriée. En effet, nous avons :

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \text{ et}$$

$$G(z)H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)H(s)}{s} \right\}.$$

avec $G(s)$ et $H(s)$ les fonctions de transfert du procédé et du capteur. La première fonction de transfert $G(z)$ représente la transmittance échantillonnée de la partie {CNA + $G(s)$ + échantillonneur} tandis que la deuxième expression représente la transmittance échantillonnée de la partie {CNA + $G(s)H(s)$ + échantillonneur}. De ces deux équations, on peut déduire l'expression de $H(z)$ comme étant :

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)H(s)}{s} \right\}}{\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}}.$$

La fonction de transfert du système en boucle fermée est :

$$F_{BF}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)H(z)} = \frac{N_{BF}(z)}{D_{BF}(z)}.$$

Étudier la stabilité du système asservi revient à étudier les racines du polynôme caractéristique $D_{BF}(z) = 0$ ou de l'équation caractéristique

$$1 + F_{BO}(z) = 0$$

où $F_{BO}(z) = C(z)G(z)H(z)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte. Notons que, conformément à la section 5.3, le système en boucle fermée est stable si les racines du

polynôme caractéristique ou de l'équation caractéristique sont à l'intérieur du cercle unité.

Nous présentons, par la suite, deux *méthodes géométriques* (ou harmoniques) pour l'étude de la stabilité du système asservi.

6.2 Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist est la première *méthode géométrique* que nous étudions. Elle est basée sur le théorème de Cauchy.

6.2.1 Théorème de Cauchy

Soit $F(z)$ une fraction rationnelle en z :

$$F(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)}$$

et soit \mathcal{C} un contour fermé orienté qui ne passe par aucun pôle ou zéro de $F(z)$.

Théorème 6.2.1 (*Théorème de Cauchy*). *Quand le point z décrit complètement la courbe fermée \mathcal{C} dans un sens donné, le point $F(z)$ décrit une courbe \mathcal{D} qui encercle l'origine, dans le même sens que le parcours de z sur \mathcal{C} , d'un nombre de fois N égal à*

$$N = Z - P$$

où Z et P désignent respectivement le nombre de zéros et de pôles à l'intérieur du contour fermé \mathcal{C} (en comptant l'ordre de multiplicité de chaque pôle ou zéro). ■

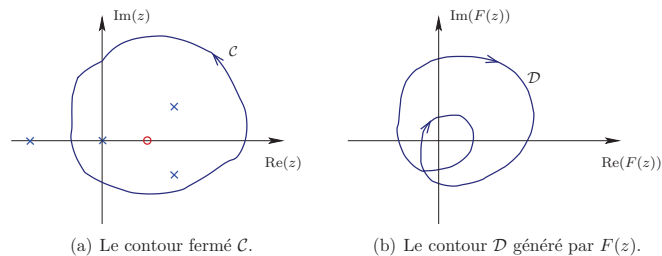


FIGURE 6.3 – Illustration du théorème de Cauchy.

Exemple 6.2.1. Afin d'illustrer le théorème de Cauchy, considérons une fonction $F(z)$ ayant quatre pôles et un zéro ainsi qu'un contour \mathcal{C} tels qu'ils ont été représentés sur la

figure 3(a). Le point z se déplace sur le contour \mathcal{C} dans le sens trigonométrique. Comme le nombre de pôles et de zéros à l'intérieur du contour est, respectivement,

$$P = 3 \text{ et } Z = 1 \text{ alors } N = -2.$$

Donc, $F(z)$ décrit une courbe \mathcal{D} en entourant deux fois l'origine dans le sens trigonométrique négatif (parce que N est négatif), comme on peut le voir sur la figure 3(b). ■

6.2.2 Contour de Nyquist

Le *contour de Nyquist* est défini comme étant le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique (voir la figure 6.4). Donc, le contour fermé \mathcal{C} s'écrit comme :

$$\mathcal{C} = \{z \mid z = e^{j\Omega}, \Omega \in [-\pi, \pi]\}.$$

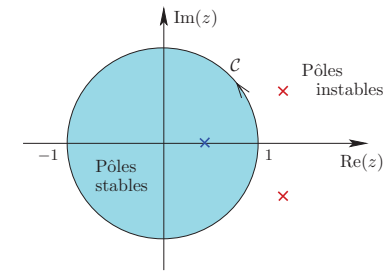


FIGURE 6.4 – Contour de Nyquist.

Par la suite, on va appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $F(z)$ et au contour de Nyquist. Étant donné que la fonction $F(z) = 1 + F_{BO}(z)$, quelques remarques s'imposent :

- les zéros de $F(z)$ sont également les pôles du système en boucle fermée $F_{BF}(z)$;
- les pôles de $F(z)$ sont les pôles du système en boucle ouverte $F_{BO}(z)$;
- comme $F_{BO}(z)$ représente un système causal, le degré de son numérateur est inférieur ou égal au degré de son dénominateur et par conséquent, le nombre de pôles de $F(z)$ est identique à son nombre de zéros ;
- les encerclements de $F(z)$ autour de l'origine sont équivalents aux encerclements de $F_{BO}(z)$ autour du point -1 .

6.2.3 Critère de Nyquist

Le *lieu de Nyquist* de $F_{BO}(z)$ est défini comme la courbe décrite par l'ensemble de points :

$$\{(\operatorname{Re}(F_{BO}(z)), \operatorname{Im}(F_{BO}(z))) \mid z = e^{j\Omega}, \Omega \in [-\pi; \pi]\}.$$

Compte tenu des éléments précédents, le critère de Nyquist s'énonce comme suit.

Théorème 6.2.2 (Critère de Nyquist). *Le système discret en boucle fermée, d'équation caractéristique $1 + F_{BO}(z) = 0$, est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de $F_{BO}(z)$ parcouru de $\Omega = -\pi$ à $\Omega = \pi$ avec $z = e^{j\Omega}$, entoure le point -1 dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de $F_{BO}(z)$.* ■

Démonstration – Soit n le nombre des pôles de $F_{BO}(z)$ et P le nombre de pôles stables de $F_{BO}(z)$ (le nombre des pôles à l'intérieur du contour de Nyquist). Alors, n est aussi égal au nombre de zéros de $1 + F_{BO}(z)$ et au nombre de pôles de $F_{BF}(z)$.

Comme le contour de Nyquist tourne dans le sens trigonométrique, par le théorème de Cauchy, $1 + F_{BO}(z)$ encercle l'origine dans le sens trigonométrique N fois avec $N = Z - P$ où Z et P représentent respectivement le nombre de zéros stables et de pôles stables de $1 + F_{BO}(z)$. Mais, le système bouclé est stable si et seulement si les zéros de $1 + F_{BO}(z)$ sont stables donc si et seulement si $Z = n$. La démonstration est terminée si on observe que $N = n - P$ est aussi le nombre de pôles instables de $F_{BO}(z)$ et que les encerclements de l'origine par $1 + F_{BO}(z)$ sont équivalents aux encerclements du point -1 par $F_{BO}(z)$. ♦

Remarque 6.2.1. Lorsqu'il s'agit d'un système échantillonné, le lieu de Nyquist est parcouru de $\omega = -\frac{\pi}{T_e}$ à $\omega = \frac{\pi}{T_e}$ avec $z = e^{j\omega T_e}$.

Remarque 6.2.2. En pratique, on construit le lieu de Nyquist pour Ω variant de 0 à π (respectivement pour ω variant de 0 à $\frac{\pi}{T_e}$ pour la cas échantillonné). La partie correspondant à des valeurs négatives de Ω (respectivement de ω) est tracée en se basant sur la symétrie du lieu de Nyquist par rapport à l'axe réel.

6.2.4 Contour de Nyquist pour des pôles de la $F_{BO}(z)$ sur le cercle unité

Lorsque la transmittance en boucle ouverte comporte des pôles sur le cercle unité alors le contour de Nyquist est obtenu en contournant ces pôles par des demi-cercles de rayon $\rho \rightarrow 0$, situés à l'extérieur du cercle unité. Un exemple a été illustré sur la figure 6.5 pour un transmittance en boucle ouverte ayant trois pôles sur le cercle unité.

En effet, lorsque la boucle ouverte a des pôles sur le cercle unité, le lieu de Nyquist présente des discontinuités. En contournant ces pôles par des demi-cercles à l'extérieur du cercle unité alors, il résulte pour le lieu de $F_{BO}(z)$ des branches à l'infini qui se referment par des demi-cercles de rayon infini.

Remarque 6.2.3. En construisant le contour de Nyquist de cette manière, les pôles qui se trouvent sur le cercle unité ne seront pas comptabilisés dans P . P comptabilise uniquement les pôles stables du système en boucle ouverte.

6.2.5 Critère de Nyquist pour des systèmes en boucle ouverte stables

Si la transmittance du système en boucle ouverte comporte uniquement des pôles stables alors le critère de Nyquist s'énonce comme suit.

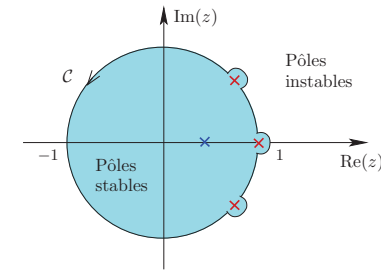


FIGURE 6.5 – Contour de Nyquist.

Théorème 6.2.3 (Critère de Nyquist pour des systèmes en boucle ouverte stables). *Si le système en boucle ouverte est stable alors le système bouclé est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de la boucle ouverte n'encercle pas le point -1 .* ■

Ce critère est également connu sous le nom du *critère du revers*.

6.3 Lieu d'Evans

Le lieu d'Evans constitue une deuxième méthode géométrique pour l'étude de la stabilité d'un système asservi.

Soit le système asservi de la figure 6.2 avec un correcteur proportionnel $C(z) = K_c$. Alors, la transmittance du système en boucle ouverte est :

$$F_{BO}(z) = K_c G(z) H(z) = \frac{N_{BO}(z)}{D_{BO}(z)}$$

et la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$F_{BF}(z) = \frac{K_c G(z)}{1 + K_c G(z) H(z)} = \frac{N_{BF}(z)}{D_{BF}(z)}$$

Nous rappelons que les pôles de du système asservi sont les racines de $D_{BF}(z)$ c'est-à-dire les racines de l'équation caractéristique :

$$1 + K_c G(z) H(z) = 1 + F_{BO}(z) = 0.$$

On remarque que les racines de cette équation sont fonction de K_c . Cela veut dire que les pôles du système en boucle fermée sont fonction du gain K_c .

6.3.1 Définition du lieu d'Evans

Il est intéressant d'étudier la position des pôles du système asservi lorsque le gain K_c varie. On peut alors faire la synthèse du correcteur proportionnel par placement des pôles c'est à dire on peut déduire les valeurs de K_c pour lesquelles l'asservissement satisfait un cahier de charges (par exemple : asservissement stable, rapide ou suffisamment amorti ...).

Définition 6.3.1. Les courbes décrites par les pôles du système asservi lorsque K_c varie correspondent aux courbes décrites par les racines de l'équation caractéristique (de l'asservissement) lorsque K_c varie. L'ensemble de ces courbes est appelé *lieu des racines* ou *lieu d'Evans*. ♦

Il est possible de tracer approximativement l'emplacement des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée en fonction du gain K_c avec des règles simples. Ces règles sont présentées par la suite.

6.3.2 Règles de construction du lieu d'Evans

Les règles de construction du lieu des racines se basent uniquement sur la fonction de transfert en boucle ouverte $F_{BO}(z)$ qui s'écrit sous forme factorisée comme :

$$F_{BO}(z) = K_c G(z) H(z) = \underbrace{K_c K_g}_K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)}$$

avec z_i pour $i = 1, \dots, m$ et p_j pour $j = 1, \dots, n$ les zéros et respectivement les pôles de la boucle ouverte.

Par la suite on se place dans l'hypothèse où $K \in \mathbb{R}_+$. Alors, le lieu d'Evans représente l'ensemble des points du plan convexe définis par les racines de $1 + F_{BO}(z) = 0$ lorsque K varie de 0 à ∞ . Cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} = -\frac{1}{K} \quad (6.3.1)$$

et elle est également appelée équation caractéristique du lieu d'Evans.

D'après l'équation (6.3.1), un point M d'affixe z_M appartient au lieu des racines si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\frac{\prod_{i=1}^m |z_M - z_i|}{\prod_{j=1}^n |z_M - p_j|} = \frac{1}{K}$ appelée la *condition du module* ;
2. $\sum_{i=1}^m \arg(z_M - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(z_M - p_j) = \pi(1 + 2\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{N}$ quelconque, appelée la *condition de l'angle*.

Les règles de construction du lieu des racines sont énoncées par la suite. Notons que, dans l'application de ces règles, les zéros et les pôles sont comptés avec leur ordre de multiplicité.

Règle 1 :

Nombre de branches du lieu : n branches ; Le nombre de branches est identique au nombre de pôles de la boucle ouverte.

Points de départ : les n branches partent, pour $K = 0$, des n pôles $\{p_j\}$ de $F_{BO}(z)$.

Points d'arrivée : les n branches aboutissent, pour $K \rightarrow \infty$, aux m zéros $\{z_i\}$ et aux $n - m$ zéros à l'infini de $F_{BO}(z)$.

Donc, le lieu comporte $n - m$ branches qui vont à l'infini.

Règle 2 : Le lieu des racines est *symétrique* par rapport à l'axe réel.

Règle 3 : *Branches du lieu appartenant à l'axe réel* : un point M de l'axe réel appartient au lieu si le nombre de pôles et zéros réels de la boucle ouverte, comptés avec leur ordre de multiplicité, et situés à la droite du point M, est impair.

Règle 4 : *Asymptotes des branches à l'infini* : les $n - m$ asymptotes des branches partant à l'infini font avec l'axe réel des angles :

$$\alpha_\lambda = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{n - m}, \quad \lambda = 0, 1, \dots, (n - m - 1).$$

Ces $n - m$ asymptotes s'intersectent avec l'axe réel en un seul point d'abscisse :

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}.$$

Règle 5 :

Points de séparation : correspondent à l'intersection du lieu avec l'axe réel ; Un point de séparation sur l'axe réel traduit l'existence d'une racine réelle multiple qui a la propriété d'annuler la dérivée de $F_{BO}(z)$:

$$\frac{d F_{BO}(z)}{d z} = 0.$$

Notons que cette condition est une condition nécessaire mais pas suffisante. Par conséquent, pour trouver un point de séparation il faut résoudre l'équation précédente et ensuite vérifier que la (ou les) solution (s) de cette équation appartient au lieu des racines.

Angle des branches au point de séparation : si N branches du lieu d'Evans se coupent en un point de séparation alors l'angle entre deux demi-branches voisines est égal à $\frac{\pi}{N}$.

Règle 6 : Dans certains cas, par exemple lorsque la fonction de transfert en boucle ouverte comporte des zéros ou des pôles complexes conjugués, on a besoin de connaître l'angle de départ ou d'arrivée d'une branche afin de construire correctement le lieu des racines. Ces angles se déterminent en utilisant la condition de l'angle.

Angle de départ d'une branche : soit p_k un pôle de multiplicité n_k , alors les n_k branches partant de p_k font des angles β_k par rapport à l'horizontale et

$$\beta_k = \frac{1}{n_k} \left(\sum_{i=1}^m \arg(p_k - z_i) - \sum_{j=1, j \neq k}^n \arg(p_k - p_j) - \pi(1 + 2\lambda) \right), \quad \lambda = 0, 1, \dots, (n_k - 1).$$

Angle d'arrivée d'une branche : soit z_k un zéro de multiplicité m_k , alors les m_k branches arrivant en z_k font des angles γ_k par rapport à l'horizontale et

$$\gamma_k = \frac{1}{m_k} \left(- \sum_{i=1, i \neq k}^m \arg(z_k - z_i) + \sum_{j=1}^n \arg(z_k - p_j) - \pi(1+2\lambda) \right), \quad \lambda = 0, 1, \dots, (m_k - 1).$$

Règle 7 : *Graduation du lieu en valeur de K* : La valeur de K en tout point M, d'affixe z_M , du lieu d'Evans se calcule en utilisant l'équation caractéristique ou la condition du module.

Remarque 6.3.1. Les intersections du lieu d'Evans avec le cercle unité peuvent se déterminer en utilisant le critère de Jury. La détermination de ces point d'intersection permet de trouver la valeur de K à la limite de stabilité ou les valeurs de K pour lesquelles les système asservi reste stable.

Exemple 6.3.1. Soit la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$F_{BO}(z) = K \frac{z + 0,5}{(z - 1)(z - 0,5)}.$$

Les règles du lieu des racines s'appliquent comme suit.

Règle 1 :

Nombre des branches : $n = 2$ branches ;
Points de départ : les pôles de la boucle ouverte $\{1; 0,5\}$;
Points d'arrivée : le zéro de la boucle ouverte $\{-0,5\}$ et le zéros à l'infini $\Rightarrow 1$ branche à l'infini.

Règle 3 : Branches du lieu appartenant à l'axe réel : tout point M d'abscisse z_M avec $z_M \in [0,5 \ 1] \cup (-\infty \ -0,5]$.

Règle 4 : Asymptote de la branches à l'infini : $\alpha_0 = \pi$;

Règle 5 : Points de séparation :

$$\frac{d F_{BO}(z)}{d z} = 0 \Rightarrow z_1 = 0,72 \text{ et } z_2 = -1,72.$$

Les angles des branches aux points de séparations sont $\pm \frac{\pi}{2}$. Le lieu des racines à été tracé à la figure 6.6.

■

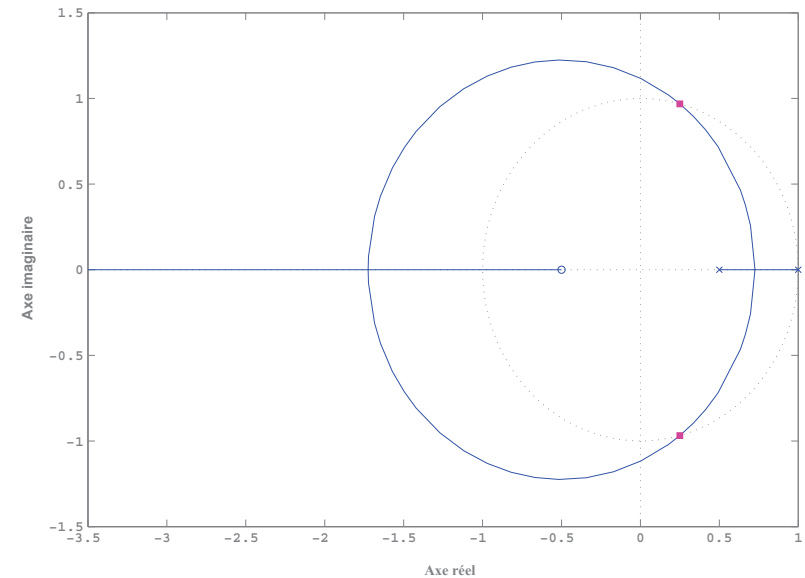


FIGURE 6.6 – Lieu des racines.

6.4 Précision des systèmes asservis échantillonnés

L'erreur d'asservissement est définie comme étant l'écart entre la consigne et la grandeur à régler. L'analyse de l'erreur en régime permanent est très importante parce qu'elle nous donne une mesure de la qualité de l'asservissement en termes de précision statique. Dans cette section nous étudions l'erreur permanente d'asservissement en supposant que le système bouclé est BIBO stable.

6.4.1 Expression de l'erreur

Soit le système à commande numérique présenté à la figure 6.1. Ce système est décrit de manière détaillée par le schéma équivalent de la figure 6.7.

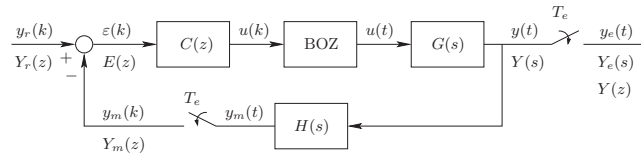


FIGURE 6.7 – Système en boucle fermée avec un correcteur numérique

Le signal d'erreur est :

$$\varepsilon(k) = y_r(k) - y_m(k).$$

En utilisant les résultats de l'exercice 4.2.2, la transformée en z du signal d'erreur vaut :

$$E(z) = \frac{Y_r(z)}{1 + C(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\}}. \quad (6.4.1)$$

EXPRESSION GÉNÉRALE DE L'ERREUR

D'après le théorème de la valeur finale pour les systèmes à temps discret (voir les propriétés de la transformée en z , section section 3.3), on peut calculer l'expression de l'erreur en régime établi par :

$$\varepsilon_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z). \quad (6.4.2)$$

Rappelons que cette relation est valable à condition que l'ensemble des pôles de $E(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

En utilisant (6.4.1) et (6.4.2), l'expression de l'erreur du système asservi est :

$$\varepsilon_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{Y_r(z)}{1 + F_{BO}(z)}. \quad (6.4.3)$$

avec la fonction de transfert en boucle ouverte $F_{BO}(z) = C(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\}$.

CLASSE DU SYSTÈME

Dans le cas d'un système à temps discret, une intégration est caractérisée par la présence d'un pôle en $z = e^0 = 1$. Ainsi, si la somme des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert du système considéré est nulle alors le système comporte au moins un intégrateur.

Mettons maintenant en évidence le pôle $z = 1$ de multiplicité c de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$F_{BO}(z) = \frac{1}{(z-1)^c} \frac{A(z)}{B(z)} \quad (6.4.4)$$

avec $A(z)$, $B(z)$ des polynômes de degrés appropriés. Soit la constante K définie par $\frac{A(1)}{B(1)}$. L'entier c est appelé la *classe du système* en boucle ouverte.

La précision du système asservi peut être calculée de manière systématique à l'aide de (6.4.3) et (6.4.4) pour différents types d'entrées :

Entrée échelon : Dans ce cas l'erreur statique est également appelée *écart permanent d'ordre 0*. Alors, l'entrée s'écrit comme :

$$Y_r(z) = \frac{E_0 z}{z-1}$$

et donc

$$\varepsilon_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{E_0}{1 + F_{BO}(z)} = \begin{cases} \frac{E_0}{1 + K} & \text{si } c = 0 \\ 0 & \text{si } c > 0 \end{cases}.$$

Entrée rampe : L'entrée s'écrit comme :

$$Y_r(z) = \frac{V_0 z}{(z-1)^2}$$

et donc

$$\varepsilon_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{V_0}{(z-1)(1 + F_{BO}(z))} = \begin{cases} \infty & \text{si } c = 0 \\ \frac{V_0}{K} & \text{si } c = 1 \\ 0 & \text{si } c > 1 \end{cases}.$$

Dans ce cas l'erreur statique est appelée *écart permanent d'ordre 1*.

Ces résultats peuvent s'étendre au cas des entrées polynomiales de degré supérieur ou égal à deux. Le tableau 6.1 regroupe les résultats pour des entrées polynomiales de degré inférieur ou égal à deux.

Remarque 6.4.1. A partir du tableau 6.1, nous pouvons déduire que la précision statique vis-à-vis de la consigne dépend de la classe du système en boucle ouverte c 'est à dire du nombre d'intégrateurs de la boucle ouverte. On peut annuler un écart permanent d'ordre n si et seulement si la classe de la boucle ouverte est au moins $n + 1$.

Entrée	Echelon $Y_r(z) = \frac{E_0 z}{z-1}$ $y_r(k) = E_0 \mathbb{U}(k)$	Rampe $Y_r(z) = \frac{V_0 z}{(z-1)^2}$ $y_r(k) = V_0 k \mathbb{U}(k)$	Parabole $Y_r(z) = \frac{W_0 z(z+1)}{(z-1)^3}$ $y_r(k) = W_0 k^2 \mathbb{U}(k)$
classe 0	$\frac{E_0}{1+K}$	∞	∞
classe 1	0	$\frac{V_0}{K}$	∞
classe 2	0	0	$2 \frac{W_0}{K}$

TABLE 6.1 – Précision des systèmes à commande numérique en fonction de leur classe

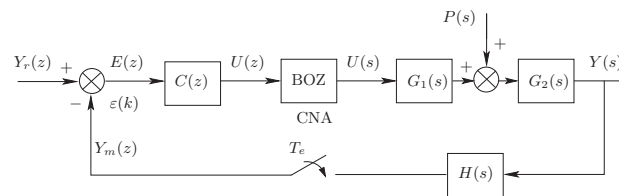


FIGURE 6.8 – Commande numérique en présence de perturbations

6.4.2 Erreur due aux perturbations

Soit le système bouclé précédant soumis à une perturbation externe $p(t)$, comme représenté à la figure 6.8.

Soit c_2 le nombre d'intégration dans $G_2(s)H(s)$ (inférieur à la classe c du système en boucle ouverte). On montre que pour un échelon de perturbation d'amplitude E_0 :

$$\varepsilon_\infty = -E_0 \frac{K_1 \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^{c-c_2}}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^c + K_2}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

Remarque 6.4.2. Pour obtenir une erreur statique nulle en présence d'une perturbation de type échelon (rejet de la perturbation), il faut et il suffit que $c > c_2$, c'est-à-dire qu'il y ait au moins un intégrateur en amont du point d'application de la perturbation (soit dans $C(z)$, soit dans $G_1(s)$).

Ce résultat s'étend évidemment au cas de perturbations de type rampe, parabole ...

Annexe **A**

Table de transformées en z

$f(t)$	$F(s)$	$f(kT_e)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta(k)$	1
$\mathbb{U}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathbb{U}(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$t \mathbb{U}(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$kT_e \mathbb{U}(k)$	$\frac{zT_e}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2}t^2 \mathbb{U}(t)$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kT_e)^2 \mathbb{U}(k)$	$\frac{T_e^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-at} \mathbb{U}(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$c^k \mathbb{U}(k), c = e^{-aT_e}$	$\frac{z}{z-c}$
$te^{-at} \mathbb{U}(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kT_e c^k \mathbb{U}(k), c = e^{-aT_e}$	$\frac{cT_e z}{(z-c)^2}$
$(1 - e^{-at}) \mathbb{U}(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$(1 - c^k) \mathbb{U}(k), c = e^{-aT_e}$	$\frac{z(1-c)}{(z-1)(z-c)}$

$\sin(\omega t) \mathbb{U}(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega kT_e) \mathbb{U}(k)$	$\frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$
$\cos(\omega t) \mathbb{U}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega kT_e) \mathbb{U}(k)$	$\frac{z(z - \cos(\omega T_e))}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$
$e^{-at} \sin(\omega t) \mathbb{U}(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$c^k \sin(\omega kT_e) \mathbb{U}(k), c = e^{-aT_e}$	$\frac{cz \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2zc \cos(\omega T_e) + c^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t) \mathbb{U}(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$c^k \cos(\omega kT_e) \mathbb{U}(k), c = e^{-aT_e}$	$\frac{z(z - c \cos(\omega T_e))}{z^2 - 2zc \cos(\omega T_e) + c^2}$
		$a^{kT_e} \sin(\omega kT_e) \mathbb{U}(k)$	$\frac{a^{T_e} z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2za^{T_e} \cos(\omega T_e) + a^{2T_e}}$
		$a^{kT_e} \cos(\omega kT_e) \mathbb{U}(k)$	$\frac{z(z - a^{T_e} \cos(\omega T_e))}{z^2 - 2za^{T_e} \cos(\omega T_e) + a^{2T_e}}$

Bibliographie

- [1] K.J. Aström and B. Wittenmark. *Computer controlled systems : theory and design*. Prentice-Hall, 1984.
- [2] B. Bayle. *Systèmes et asservissements à temps continu*. Cours 1ère année, Ecole Nationale Supérieure de Physique, 2004-2005.
- [3] P. de Larminat. *Automatique : commande des systèmes linéaires*. Hermes, 1996.
- [4] G.F. Franklin, J.D. Powell, and L.M. Workman. *Digital control of dynamic systems*. Addison-Wesley Series in Electrical and Computer Engineering : Control Engineering, 1990.
- [5] E. Godoy and E. Ostertag. *Commande numérique des systèmes*. Technosup, 2004.
- [6] J.R. Leigh. *Applied digital control : theory, design and implementation*. Prentice-Hall, 1992.
- [7] R. Longchamp. *Commande numérique de systèmes dynamiques*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1995.
- [8] R.H Middleton and G.C. Goodwin. *Digital control and estimation : a unified approach*. Prentice-Hall, 1990.
- [9] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus*. Technosup, 2004.

Index des notions

Asservissement numérique, 51

Bloqueur d'ordre zéro, 12

Bruit de quantification, 7

Classe du système, 62

Condition de l'angle, 58

Condition du module, 57

Contour de Nyquist, 54

Convertisseur analogique-numérique, 51

Convertisseur numérique-analogique, 51

Critère de Jury, 47

Critère du revers, 56

Diagramme de Bode, 45

Ecart permanent d'ordre 0, 62

Ecart permanent d'ordre 1, 62

Equation aux différences, 27

Equation récurrente, 27

Fonction de transfert d'un système à temps discret, 28

fonction de transfert échantillonnée en boucle ouverte, 30

Fréquence de Nyquist, 10

Gain statique d'un système discret, 28

Lieu d'Evans, 57

Lieu de Nyquist, 54

Lieu des racines, 57

Mode d'un système discret, 43

Polynôme caractéristique, 28

Pulsation d'échantillonnage, 9

Pulsation de Nyquist, 9

Rayon de convergence, 15

Repliement spectral, 10

Réponse en fréquence, 44

Spectre d'un signal, 8

Stabilité BIBO, 47

Stabilité des systèmes discrets, 47

Système continu précédé par un BOZ, 31

Théorème de Cauchy, 53

Théorème de l'échantillonnage, 10

Transformée de Fourier, 8

Transformée de Fourier inverse, 11

Transformée en w , 49

Transformée en z , 15

Transformée en z inverse, 19

Transmittance discrète, 28

Échantillonneur idéal, 5

Équation aux différences, 23