

Commande numérique des systèmes

Analyse des systèmes échantillonnés en BF

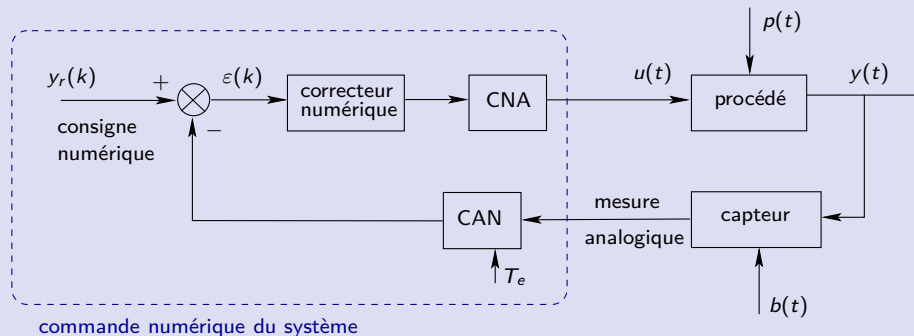
Gabriela Iuliana BARA

Sommaire

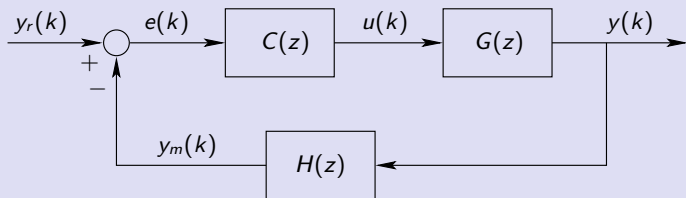
- 1 Systèmes à commande numérique
- 2 Critère de Nyquist
- 3 Marges de stabilité
- 4 Lieu d'Evans
- 5 Précision des systèmes asservis échantillonnés

Systèmes à commande numérique

Principe de la commande



Système asservi équivalant à temps discret



$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \text{ et}$$

$$G(z)H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)H(s)}{s} \right\}$$

Etude de la stabilité du système asservi

$$F_{BF}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)H(z)} = \frac{N_{BF}(z)}{D_{BF}(z)}$$

⇒ étudier les racines du polynôme caractéristique $D_{BF}(z) = 0$ ou de l'équation caractéristique

$$1 + F_{BO}(z) = 0 \quad \text{où} \quad F_{BO}(z) = C(z)G(z)H(z)$$

- **méthodes algébriques** : critère de Jury, transformée en w et critère de Routh
- **méthodes géométriques (ou harmoniques)** :
 - critère de Nyquist
 - lieu d'Evans

Critère de Nyquist

Théorème de Cauchy

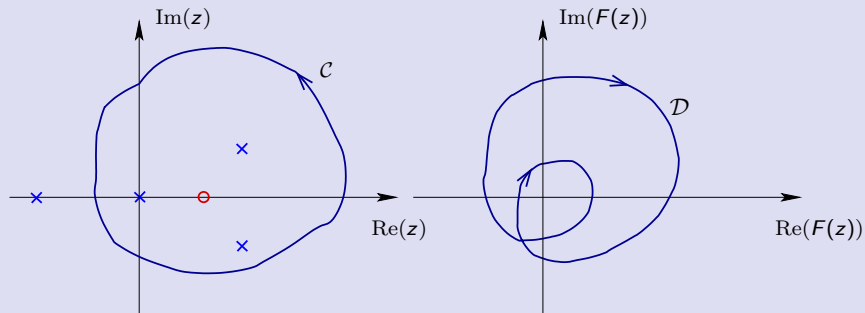
$$\text{Soit } F(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} \quad \text{et } \mathcal{C} \left\{ \begin{array}{l} \text{un contour fermé orienté} \\ \text{qui ne passe pas par } z_i \text{ et } p_i \end{array} \right.$$

Théorème : Quand le point z décrit complètement la courbe fermée \mathcal{C} dans un sens donné, le point $F(z)$ décrit une courbe \mathcal{D} qui encercle l'origine, dans le même sens que le parcourt de z sur \mathcal{C} , d'un nombre de fois N égal à

$$N = Z - P$$

avec Z , P le nombre de zéros et de pôles à l'intérieur du contour fermé \mathcal{C}

Exemple - théorème de Cauchy

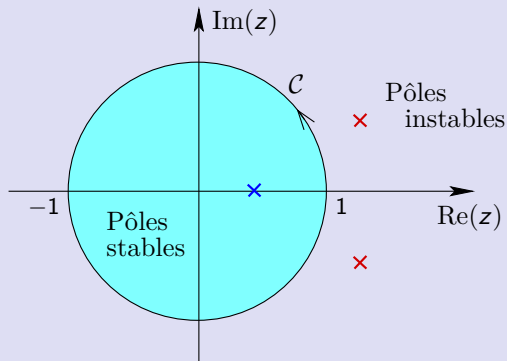
(a) Le contour fermé \mathcal{C} .(b) Le contour \mathcal{D} généré par $F(z)$.

$$P = 3 \text{ et } Z = 1 \text{ alors } N = -2$$

Contour de Nyquist

= le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique :

$$\mathcal{C} = \{z \mid z = e^{j\Omega}, \Omega \in [-\pi, \pi]\}$$



Critère de Nyquist

⇒ application du théorème de Cauchy au contour de Nyquist et à

$$F(z) = 1 + F_{BO}(z)$$

Remarques :

- zéros de $F(z)$ sont les pôles du système en boucle fermée $F_{BF}(z)$
- pôles de $F(z)$ sont les pôles du système en boucle ouverte $F_{BO}(z)$
- le nombre de pôles de $F(z)$ est identique à son nombre de zéros
- les encerclements de $F(z)$ autour de l'origine sont équivalents aux encerclements de $F_{BO}(z)$ autour du point -1

Définition

Lieu de Nyquist de $F_{BO}(z)$ est défini comme la courbe décrite par l'ensemble de points :

$$\{(\operatorname{Re}(F_{BO}(z)), \operatorname{Im}(F_{BO}(z)) \mid z = e^{j\Omega}, \Omega \in [-\pi; \pi])\}$$

Critère de Nyquist

Le système discret en boucle fermée, d'équation caractéristique $1 + F_{BO}(z) = 0$, est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de $F_{BO}(z)$ parcouru de $\Omega = -\pi$ à $\Omega = \pi$ avec $z = e^{j\Omega}$, entoure le point -1 dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de $F_{BO}(z)$

Remarques

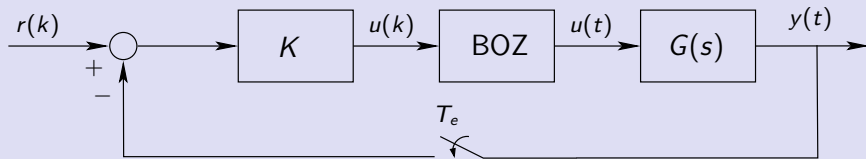
- Pour un système échantillonné, le lieu de Nyquist est parcouru de $\omega = -\frac{\pi}{T_e}$ à $\omega = \frac{\pi}{T_e}$ avec $z = e^{j\omega T_e}$
- On construit le lieu de Nyquist pour Ω variant de 0 à π (respectivement pour ω variant de 0 à $\frac{\pi}{T_e}$ pour la cas échantillonné)
 \implies pour des valeurs négatives de Ω (respectivement de ω) on utilise la *symétrie du lieu de Nyquist* par rapport à l'axe réel

Matlab

nyquist() mais !!!!!

Exemple

Soit le système en BF avec $G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$. Etudier la stabilité du système en BF.



$$G(z) = \frac{1 - c}{z - c} \text{ avec } c = e^{-\frac{T_e}{\tau}} \implies F_{BO}(z) = \frac{K(1 - c)}{z - c}$$

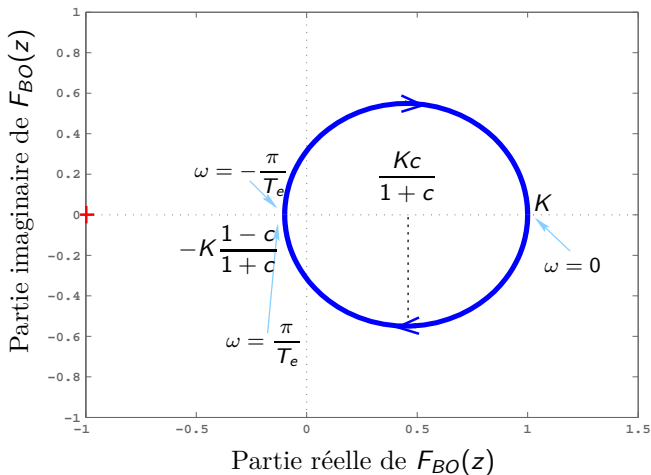
$$z = e^{j\omega T_e} \implies F_{BO}(e^{j\omega T_e}) = \underbrace{\frac{K(1-c)(\cos \omega T_e - c)}{1 - 2c \cos \omega T_e + c^2}}_{\text{partie réelle}} - j \underbrace{\frac{K(1-c) \sin \omega T_e}{1 - 2c \cos \omega T_e + c^2}}_{\text{partie imaginaire}}$$

Alors

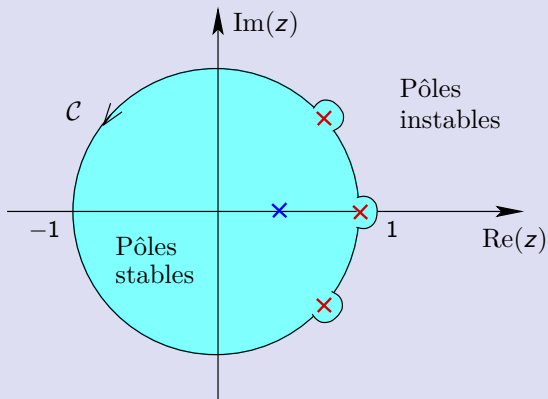
ω	$F_{BO}(e^{j\omega T_e})$
0	K
$\frac{\pi}{T_e}$	$-K \frac{1-c}{1+c}$
$-\frac{\pi}{T_e}$	$-K \frac{1-c}{1+c}$

De plus,

$$\left(\Re(F_{BO}(e^{j\omega T_e})) - \frac{Kc}{1+c} \right)^2 + \left(\Im(F_{BO}(e^{j\omega T_e})) \right)^2 = \left(\frac{K}{1+c} \right)^2$$



Condition de stabilité en BF : $-1 < -K \frac{1-c}{1+c} \implies K < \frac{1+c}{1-c}$

Contour de Nyquist lorsque $F_{BO}(z)$ a des pôles sur le cercle unité

⇒ le lieu de Nyquist présente des branches à l'infini qui se referment par des demi-cercles de rayon infini

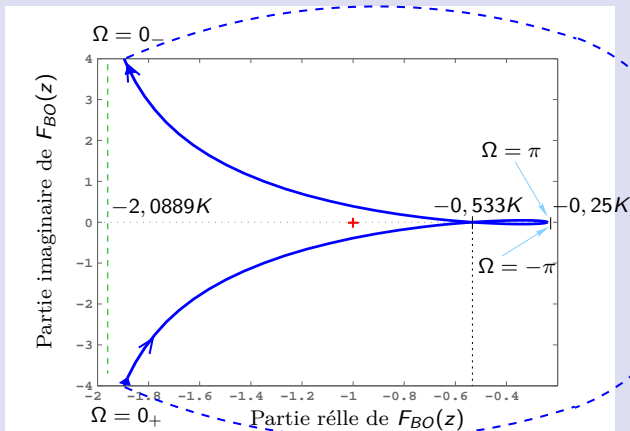
⇒ P comptabilise uniquement les pôles stables du système en boucle ouverte

Exemple

Soit $F_{BO}(z) = \frac{K(z + 0,4)}{(z - 1)(z - 0,25)}$. Etudier la stabilité du système en BF.

$$z = e^{j\Omega} \implies \begin{cases} \Re e(F_{BO}) = K \frac{(1 + \cos \Omega)(\cos \Omega - 1,65) - (\cos \Omega + 0,4)(\cos \Omega - 0,25)}{2(1,0625 - 0,5 \cos \Omega)} \\ \Im m(F_{BO}) = K \sin \Omega \frac{(\cos \Omega + 0,4)(\cos \Omega - 1) + \sin^2 \Omega + 1,4 \cos \Omega - 0,35}{2(1 - \cos \Omega)(1,0625 - 0,5 \cos \Omega)} \end{cases}$$

Ω	$F_{BO}(e^{j\Omega})$
$\Omega \rightarrow 0^+$	$\Re e \rightarrow -2,0889K$ $\Im m \rightarrow -\infty$
$\Omega \rightarrow 0^-$	$\Re e \rightarrow -2,0889K$ $\Im m \rightarrow \infty$
$\Omega \rightarrow \pi$	$\Re e \rightarrow -0,25K$ $\Im m \rightarrow 0$
$\Omega \rightarrow -\pi$	$\Re e \rightarrow -0,25K$ $\Im m \rightarrow 0$



Condition de stabilité en BF : $-1 < -0,533K \implies K < 1,8762$

Critère de Nyquist pour des systèmes en boucle ouverte stables

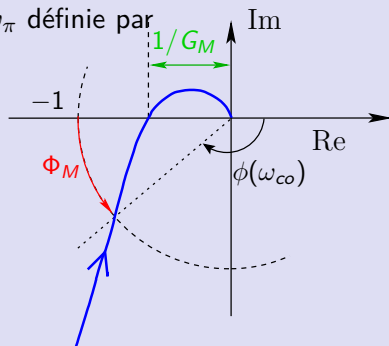
Critère du revers

Si le système en boucle ouverte est stable alors le système bouclé est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de la boucle ouverte n'encercle pas le point -1

Marges de stabilité

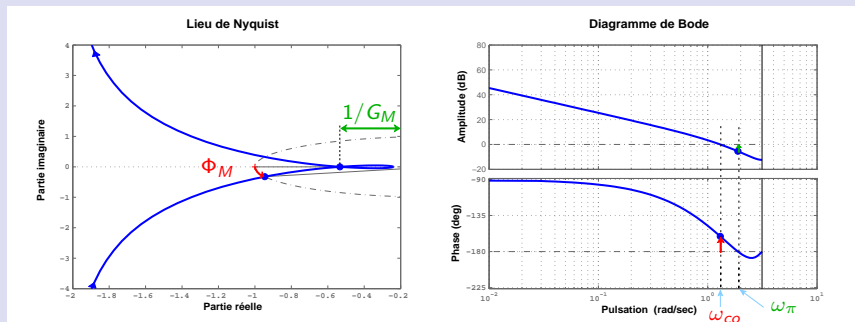
⇒ une "mesure" de la robustesse du système / stabilité

- Marge de phase** : $\Phi_M = 180^\circ + \arg(F_{BO}(e^{j\omega_{co}T_e}))$ avec
pulsation de coupure du gain ω_{co} définie par
 $|F_{BO}(e^{j\omega_{co}T_e})| = 1$ ou $|F_{BO}(e^{j\omega_{co}T_e})|_{dB} = 0$
- Marge de gain** : $G_{M_{dB}} = -F_{BO}(e^{j\omega_{\pi}T_e})_{dB}$ avec
pulsation de coupure du déphasage ω_{π} définie par
 $\arg(F_{BO}(e^{j\omega_{\pi}T_e})) = -\pi$



Exemple

Soit la transmittance échantillonnée en BO : $F_{BO}(z) = \frac{K(z + 0,4)}{(z - 1)(z - 0,25)}$



Lieu d'Evans

Définition du *lieu d'Evans* ou du *lieu des racines*

Les courbes décrites par les pôles du système asservi lorsque $C(z) = K_c$ varie qui correspondent aux courbes décrites par les racines de l'équation caractéristique (de l'asservissement) lorsque K_c varie

⇒ étudier les racines du polynôme caractéristique $D_{BF}(z) = 0$ ou de l'équation caractéristique

$$1 + F_{BO}(z) = 0 \quad \text{où} \quad F_{BO}(z) = C(z)G(z)H(z) \text{ avec } C(z) = K_c$$

Règles de construction du lieu d'Evans

- Construction basée uniquement sur la fonction de transfert $F_{BO}(z)$

$$F_{BO}(z) = K_c G(z) H(z) = \underbrace{K_c K_g}_K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)}$$

- Equation caractéristique du lieu d'Evans

$$\frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} = -\frac{1}{K} \quad \text{lorsque } K \text{ varie de } 0 \text{ à } \infty$$

Un point M d'affixe z_M appartient au lieu des racines ssi :

$$\textcircled{1} \text{ condition du module } \frac{\prod_{i=1}^m |z_M - z_i|}{\prod_{j=1}^n |z_M - p_j|} = \frac{1}{K}$$

$\textcircled{2}$ condition de l'angle

$$\sum_{i=1}^m \arg(z_M - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(z_M - p_j) = \pi(1 + 2\lambda) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{N} \text{ quelconque}$$

Règle 1

- *Nombre de branches du lieu* : n branches ; Le nombre de branches est identique au nombre de pôles de la boucle ouverte
- *Points de départ* : les n branches partent, pour $K = 0$, des n pôles $\{p_j\}$ de $F_{BO}(z)$
- *Points d'arrivée* : les n branches aboutissent, pour $K \rightarrow \infty$, aux m zéros $\{z_i\}$ et aux $n - m$ zéros à l'infini de $F_{BO}(z)$.
Donc, le lieu comporte $n - m$ branches qui vont à l'infini

Règle 2

Le lieux des racines est *symétrique* par rapport à l'axe réel

Règle 3 : branches du lieu appartenant à l'axe réel

Un point M de l'axe réel appartient au lieu si le nombre de pôles et zéros réels de la boucle ouverte, comptés avec leur ordre de multiplicité, et situés à la droite du point M , est impair

Règle 4 : Asymptotes des branches à l'infini

Les $n - m$ asymptotes des branches partant à l'infini font avec l'axe réel des angles :

$$\alpha_\lambda = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{n - m}, \quad \lambda = 0, 1, \dots, (n - m - 1)$$

Ces $n - m$ asymptotes s'intersectent avec l'axe réel en un seul point d'abscisse :

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

Règle 5 : points de séparation

Correspondent à l'intersection du lieu avec l'axe réel et traduit l'existence d'une racine réelle multiple qui a la propriété d'annuler la dérivée de $F_{BO}(z)$:

$$\frac{d F_{BO}(z)}{d z} = 0$$

⇒ **condition nécessaire mais pas suffisante**

Angle des branches au point de séparation

Si N branches du lieu d'Evans se coupent en un point de séparation alors l'angle entre deux demi-branches voisines est égal à $\frac{\pi}{N}$

Règle 6

- *Angle de départ d'une branche* :

Soit p_k un pôle de multiplicité n_k , alors les n_k branches partant de p_k font des angles β_k par rapport à l'horizontale et

$$\beta_k = \frac{1}{n_k} \left(\sum_{i=1}^m \arg(p_k - z_i) - \sum_{j=1, j \neq k}^n \arg(p_k - p_j) - \pi(1 + 2\lambda) \right),$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, (n_k - 1)$$

- *Angle d'arrivée d'une branche* :

Soit z_k un zéro de multiplicité m_k , alors les m_k branches arrivant en z_k font des angles γ_k par rapport à l'horizontale et

$$\gamma_k = \frac{1}{m_k} \left(- \sum_{i=1, i \neq k}^m \arg(z_k - z_i) + \sum_{j=1}^n \arg(z_k - p_j) - \pi(1 + 2\lambda) \right),$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, (m_k - 1)$$

Règle 7 : *Graduation du lieu en valeur de K*

La valeur de K en tout point M , d'affixe z_M , du lieu d'Evans se calcule en utilisant l'équation caractéristique ou la condition du module

Matlab

```
rltool()
```

Exemple

$$\text{Soit } F_{BO}(z) = K \frac{z + 0,5}{(z - 1)(z - 0,5)}$$

Règle 1 : Nombre des branches : $n = 2$ branches

Points de départ : les pôles de la boucle ouverte $\{1; 0,5\}$

Points d'arrivée : le zéro de la boucle ouverte $\{-0,5\}$ et le zéro à l'infini

\implies 1 branche à l'infini

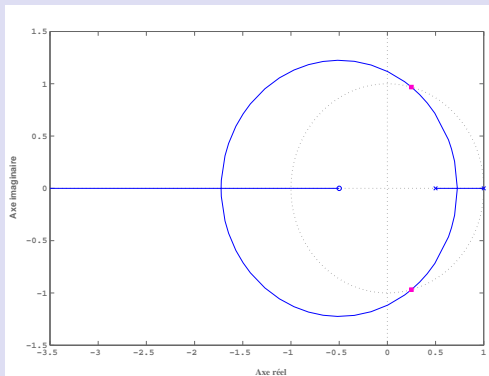
Règle 3 : Branches du lieu appartenant à l'axe réel : tout point M d'abscisse z_M avec $z_M \in [0,5 \ 1] \cup (-\infty \ -0,5]$

Règle 4 : Asymptote de la branches à l'infini : $\alpha_0 = \pi$

Règle 5 : Points de séparation :

$$\frac{d F_{BO}(z)}{d z} = 0 \implies z_1 = 0,72 \text{ et } z_2 = -1,72$$

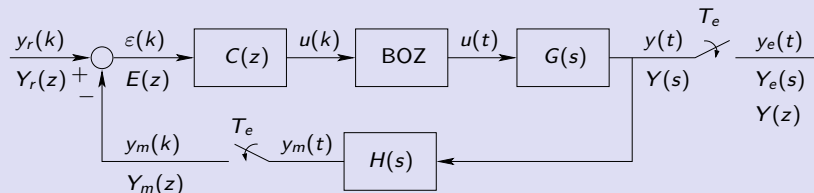
Angles des branches aux points de séparations = $\pm \frac{\pi}{2}$



Condition de stabilité ???

Précision des systèmes asservis échantillonnés

Expression de l'erreur



Le signal d'erreur :

$$\varepsilon(k) = y_r(k) - y_m(k) \implies E(z) = \frac{Y_r(z)}{1 + C(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)H(s)}{s} \right\}}$$

- Erreur en régime permanent :
théorème de la valeur finale (BF stable)

$$\Rightarrow \varepsilon_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{Y_r(z)}{1 + F_{BO}(z)}$$

avec la fonction de transfert en BO

$$F_{BO}(z) = C(z)(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)H(s)}{s} \right\}$$

- *Classe du système en boucle ouverte* :

$$\text{Soit } F_{BO}(z) = \frac{1}{(z-1)^c} \frac{A(z)}{B(z)} \quad \text{avec} \quad \frac{A(1)}{B(1)} = K$$

et c = classe du système en BO = nombre d'intégrateurs de la BO

Erreur statique

- **Entrée échelon** : $y_r(k) = E_0\mathbb{U}(k) \implies$ *écart permanent d'ordre 0*

$$Y_r(z) = \frac{E_0 z}{z-1} \implies \varepsilon_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{E_0}{1 + F_{BO}(z)} = \begin{cases} \frac{E_0}{1+K} & \text{si } c = 0 \\ 0 & \text{si } c > 0 \end{cases}$$

- **Entrée rampe** : $y_r(k) = V_0 k \mathbb{U}(k) \implies$ *écart permanent d'ordre 1*

$$Y_r(z) = \frac{V_0 z}{(z-1)^2} \implies \varepsilon_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{V_0}{(z-1)(1 + F_{BO}(z))} = \begin{cases} \infty & \text{si } c = 0 \\ \frac{V_0}{K} & \text{si } c = 1 \\ 0 & \text{si } c > 1 \end{cases}$$

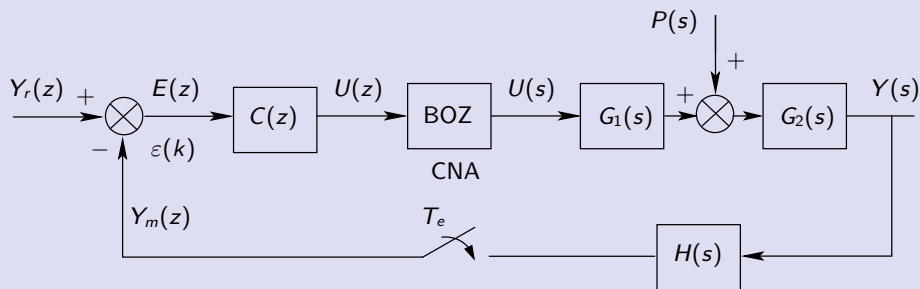
- **Entrée parabolique** : $y_r(k) = W_0 k^2 \mathbb{U}(k) \implies$ *écart permanent d'ordre 2*

$$Y_r(z) = \frac{W_0 z(z+1)}{(z-1)^3} \implies \varepsilon_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{W_0(z+1)}{(z-1)^2(1 + F_{BO}(z))} = \begin{cases} \infty & \text{si } c \leq 1 \\ 2 \frac{W_0}{K} & \text{si } c = 2 \\ 0 & \text{si } c > 2 \end{cases}$$

Conclusion

On peut annuler un écart permanent d'ordre n si et seulement si la classe de la boucle ouverte est au moins $n + 1$.

Erreur due aux perturbations



$$Y(z) = \frac{C(z) (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_1(s) G_2(s)}{s} \right\}}{1 + F_{BO}(z)} Y_r(z) + \frac{\mathcal{Z} \{ G_2(s) P(s) \}}{1 + F_{BO}(z)}$$

$$\text{avec } F_{BO}(z) = C(z) (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_1(s) G_2(s) H(s)}{s} \right\}$$

Erreur d'asservissement générée par la perturbation :

$$Y_r(z) = 0 \implies E(z) = -Y_m(z) = -\frac{\mathcal{Z}\{H(s)G_2(s)P(s)\}}{1 + F_{BO}(z)}$$

Supposons que :

- $F_{BO}(z)$ est de classe c alors

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^c F_{BO}(z) = K_2$$

- perturbation de type échelon : $P(s) = \frac{E_0}{s}$
- $G_2(s)H(s)$ contient c_2 intégrateurs alors

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^{c_2+1} \mathcal{Z}\{H(s)G_2(s)P(s)\} = K_1$$

En utilisant le théorème de la valeur finale, alors

$$\varepsilon_{\infty} = -E_0 \frac{K_1 \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^{c-c_2}}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^c + K_2}$$

Conclusion

Pour obtenir une erreur statique nulle en présence d'une perturbation de type échelon (rejet de la perturbation), il faut et il suffit que $c > c_2$, c'est-à-dire qu'il y ait au moins un intégrateur en amont du point d'application de la perturbation (soit dans $C(z)$, soit dans $G_1(s)$).