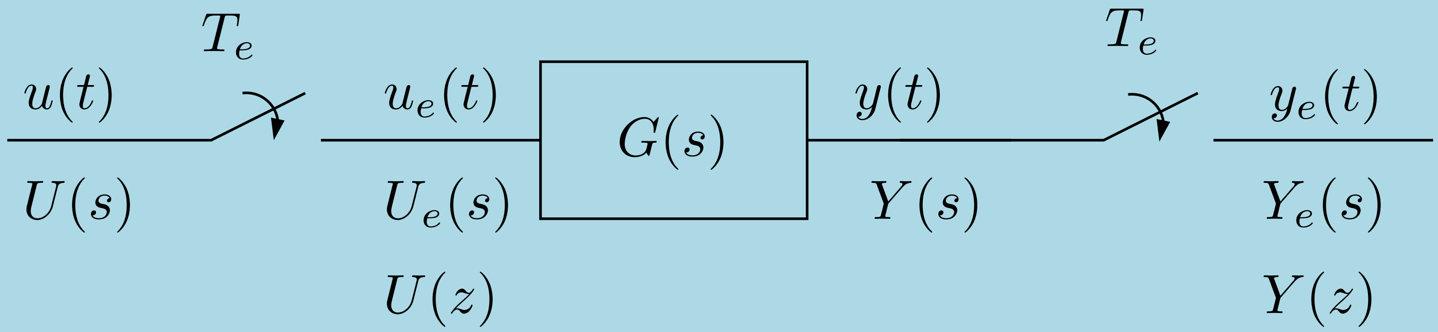
Commande numérique des systèmes

Analyse des systèmes échantillonnés

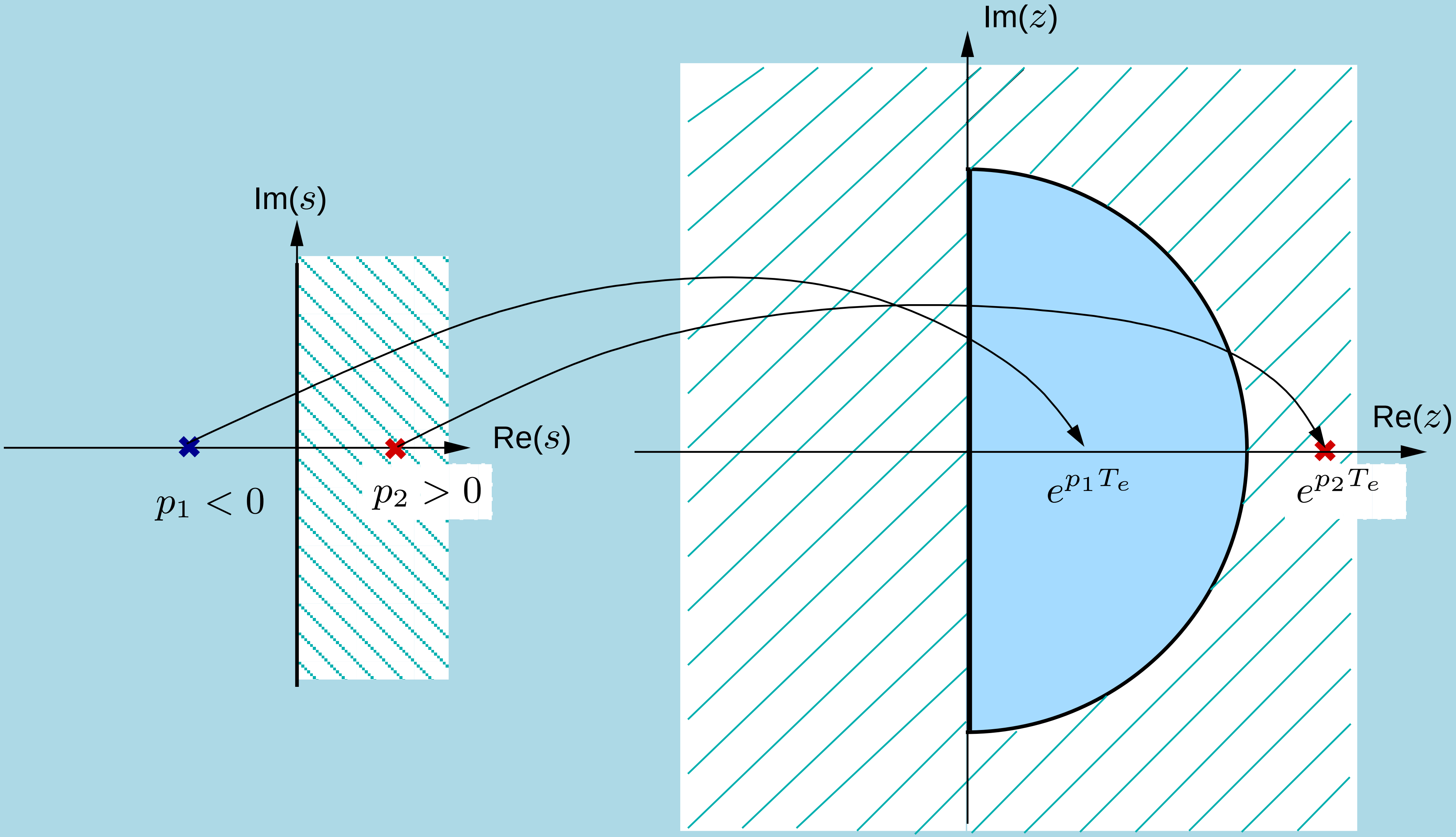
1 – Pôles des systèmes échantillonnés



- Pôles en s du système = pôles de la fonction de transfert $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U_e(s)}$
- Pôles en z = pôles de la transmittance échantillonnée $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$

$$\boxed{\text{Correspondance : } s = p_i \longrightarrow z = e^{p_i T_e}}$$

☞ Systèmes du premier ordre :



☞ Systèmes du second ordre :

$$G(s) = \frac{K\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

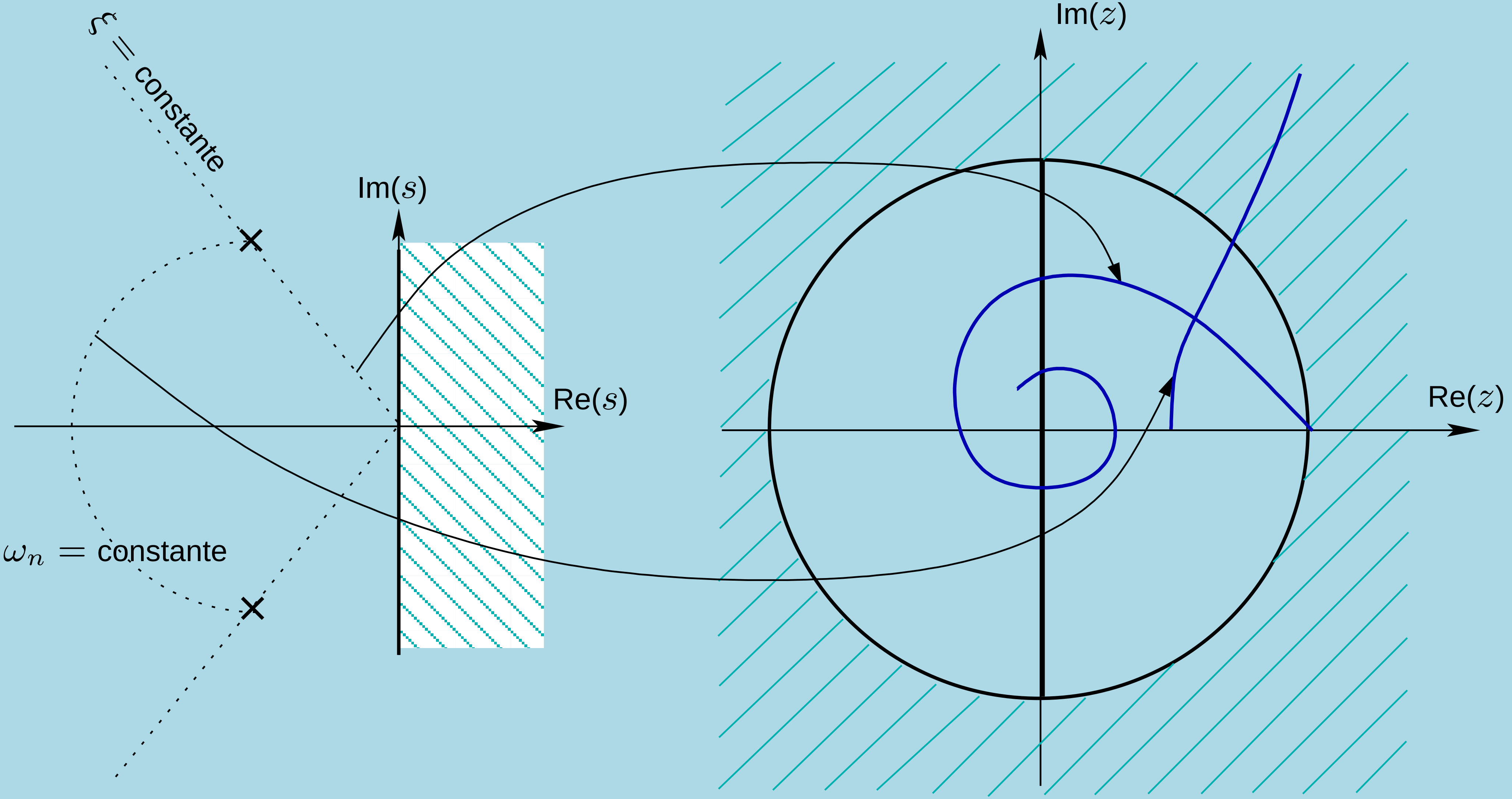
Deux pôles en s complexes conjugués : $s_{1,2} = -(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})\omega_n$

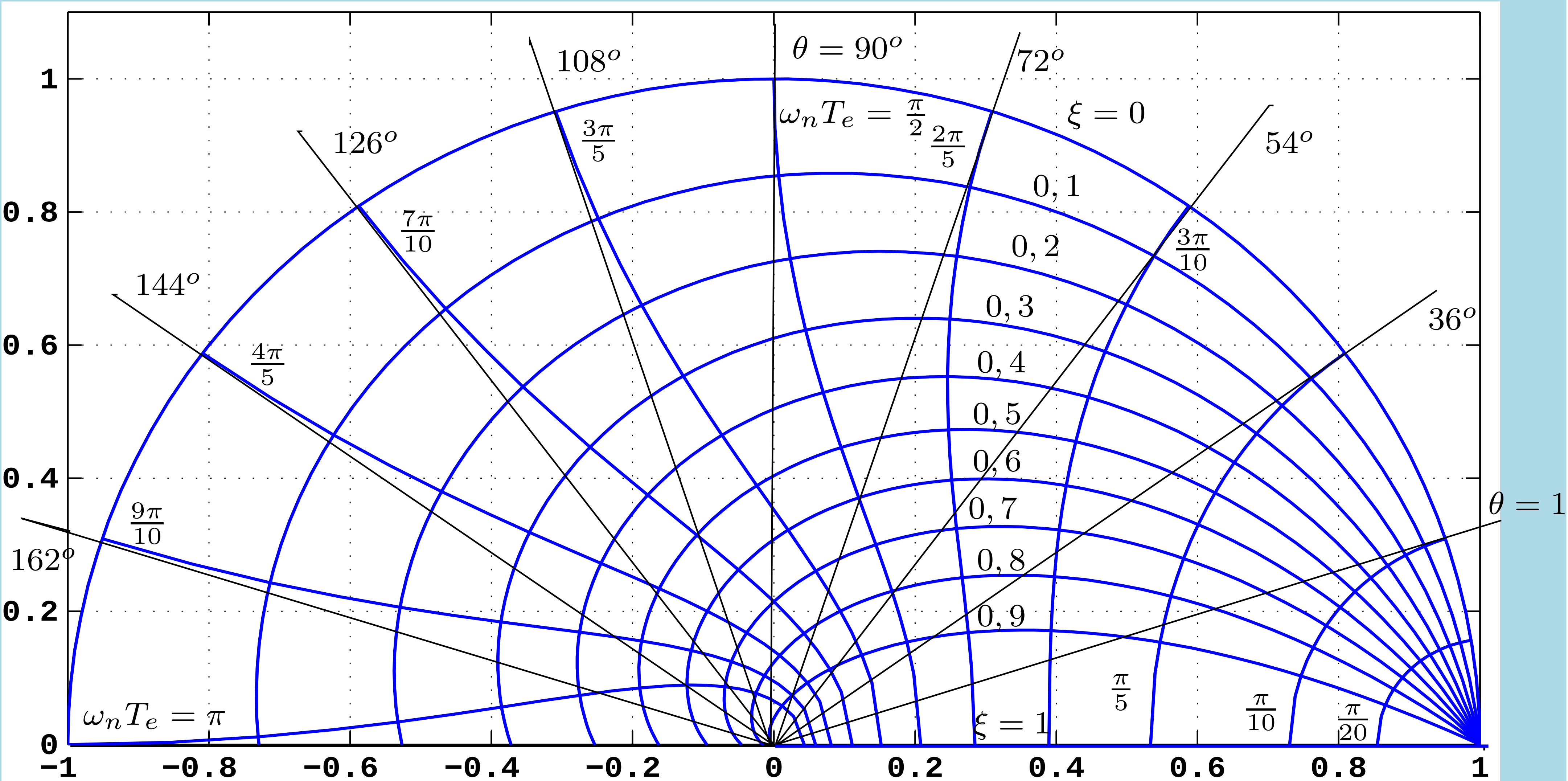
$\Longrightarrow$ pôles en z : $\quad z_{1,2} = e^{-\xi\omega_n T_e}\ e^{\pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n T_e}$

- Courbes à ξ = constant :

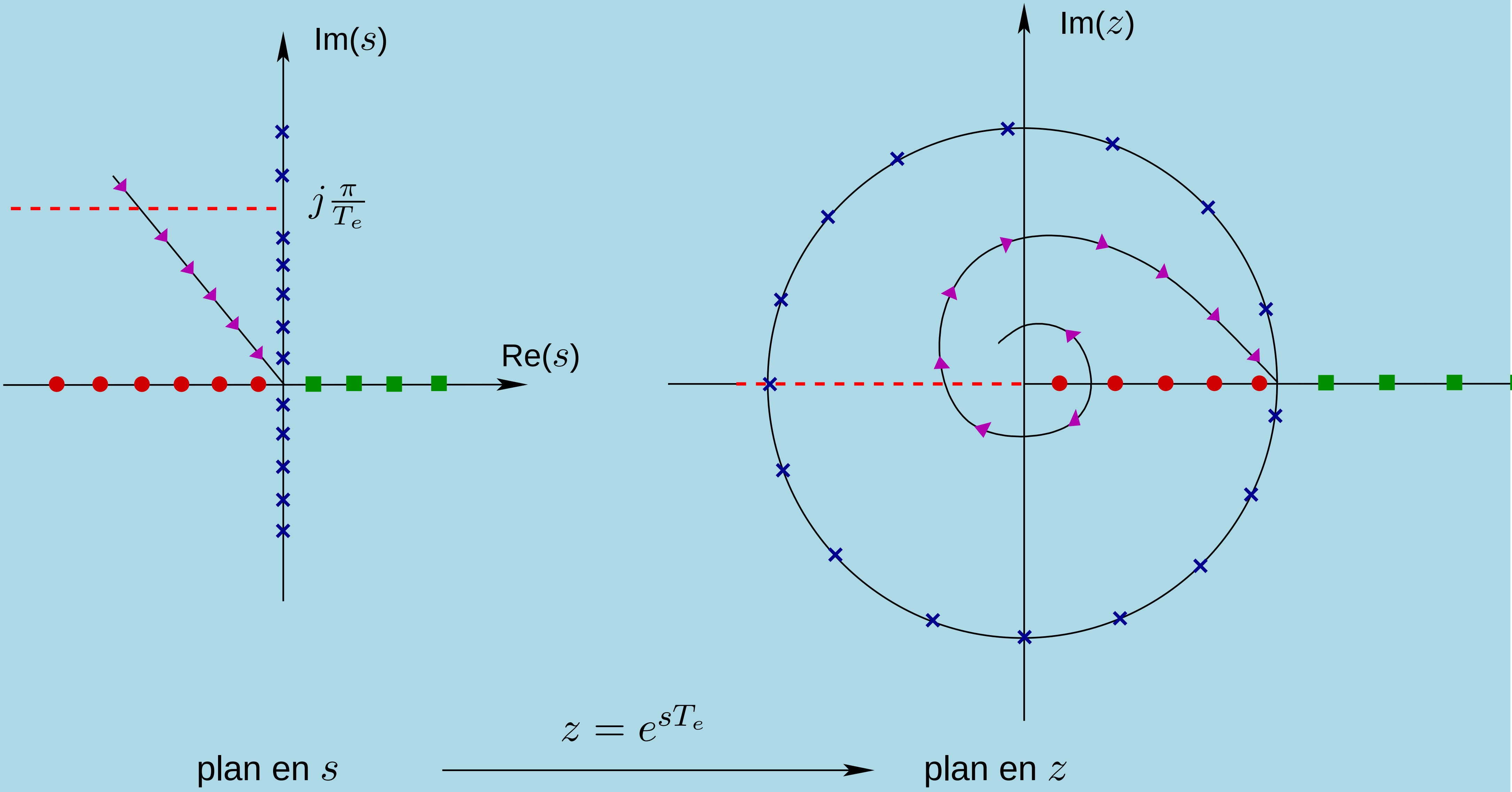
  $z_{1,2} = e^{-\frac{\xi\theta}{\sqrt{1-\xi^2}}}\ e^{\pm j\theta}$ où $\theta = \sqrt{1-\xi^2}\omega_n T_e \Longrightarrow$ spirales logarithmiques

- Courbes ω_n = constant : courbes perpendiculaires aux spirales logarithmiques


ξ = constante
Im(s)
Re(s)
ω_n = constante
Im(z)
Re(z)


$\theta = 90^o$
108^o
72^o
126^o
54^o
144^o
36^o
162^o
$\theta = 1$
$\xi = 0$
0, 1
0, 2
0, 3
0, 4
0, 5
0, 6
0, 7
0, 8
0, 9
$\xi = 1$
$\omega_n T_e = \frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{5}$
$\frac{2\pi}{5}$
$\frac{7\pi}{10}$
$\frac{3\pi}{10}$
$\frac{4\pi}{5}$
$\frac{9\pi}{10}$
$\frac{\pi}{5}$
$\frac{\pi}{10}$
$\frac{\pi}{20}$
$\omega_n T_e = \pi$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

☞ Systèmes d'ordre quelconque :



☞ Systèmes avec retard :

Soit $G(s) = e^{-nT_e} G_1(s)$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\{g(t)\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-nT_e} G_1(s)\}\} \\ &= \mathcal{Z}\{g_1(t - nT_e)\} = z^{-n}\mathcal{Z}\{g_1(t)\} \\ &= z^{-n}\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)\}\} = z^{-n}\mathcal{Z}\{\{G_1(s)\}\} \end{aligned}$$

☞ Exemple :

➠ Système d'ordre 1 :

Soit $G(s) = \dfrac{K}{1+\tau s}$ alors

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = \frac{K}{\tau}\,\frac{z}{z-c} \quad \text{avec} \quad c = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

➠ Système d'ordre 1 précédé par un BOZ :

Soit $G(s) = \dfrac{K}{1+\tau s}$ précédé par un BOZ alors

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\{\frac{G(s)}{s}\} = \frac{K(1-c)}{z-c} \quad \text{avec} \quad c = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

2 – Zéros des systèmes échantillonnés

☞ Pas de relation simple entre les zéros de $G(s)$ et ceux de $G(z)$

➠ $G(s)$ est à déphasage non minimal $\not\Rightarrow$ $G(z)$ est à déphasage non minimal

➠ Un système continu sans zéros dans le demi-plan de droite peut donner un système échantillonné avec des zéros en dehors du cercle unité

3 – Réponse temporelle des systèmes échantillonnés

- Méthodes de calcul :
  - A partir de l'équation aux différences
  - A partir de la fonction de transfert

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)U(z)\} \Longrightarrow \text{ décomposition en éléments simples}$$

Soit $p_1, p_2, \ldots, p_{n_p}$ les pôles de $G(z)$ avec $m_i, i = 1, \ldots, n_p$, l'ordre de multiplicité de chaque pôle

Soit $z_1, z_2, \ldots, z_q$ les pôles de $U(z)$

Alors,

$$Y(z) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_p} G_i(z)}_{\text{caract. intrinsèques au } G(z)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{q} U_j(z)}_{\text{régime forcé}}$$

avec $G_i(z) = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij} z}{(z - p_i)^j}$

$\rightarrow$ Notion de *mode* du système :

$$\text{pôle } p_i \Longrightarrow \text{ mode } \Longleftarrow \begin{cases} G_i(z) & \text{si } p_i \text{ pôle réel} \\ G_i(z) + G_i^*(z) & \text{si } p_i \text{ et } p_i^* \text{ paire de pôles} \\ & \text{complexes conjugués} \end{cases}$$

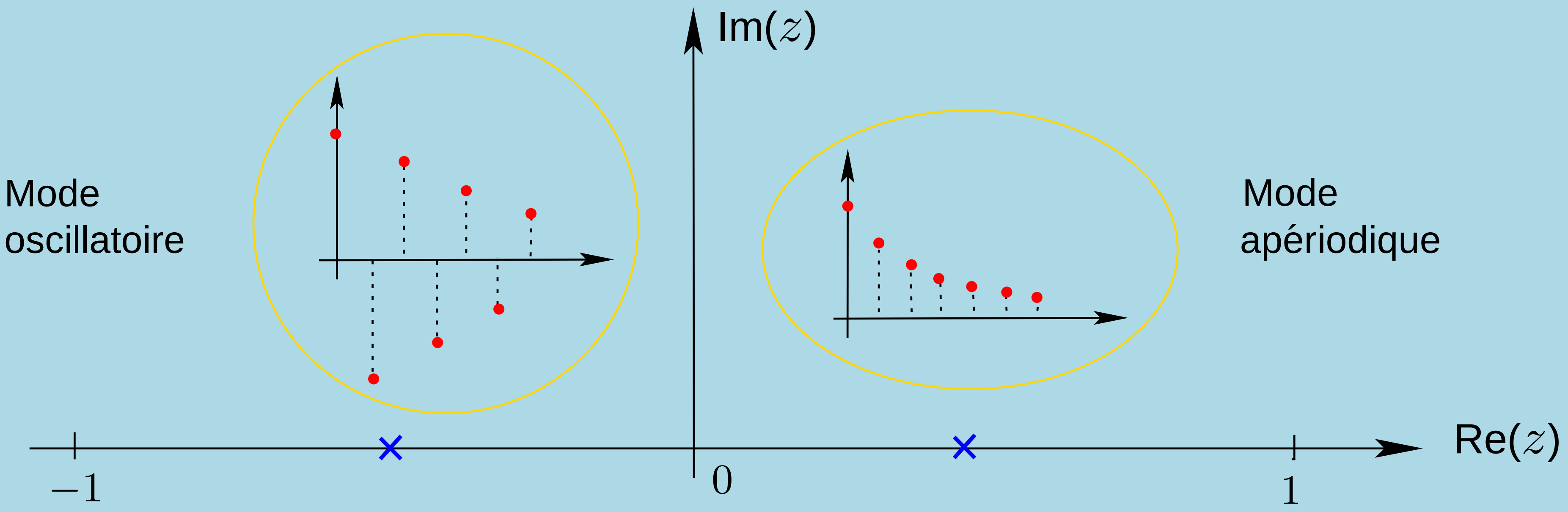
- Mode réel p_i :

réponse associée au mode réel $\mathcal{Z}^{-1}\{G_i(z)\} = P_i(k)p_i^k$

avec $P_i(k)$ un polynôme en k d'ordre $m_i - 1$

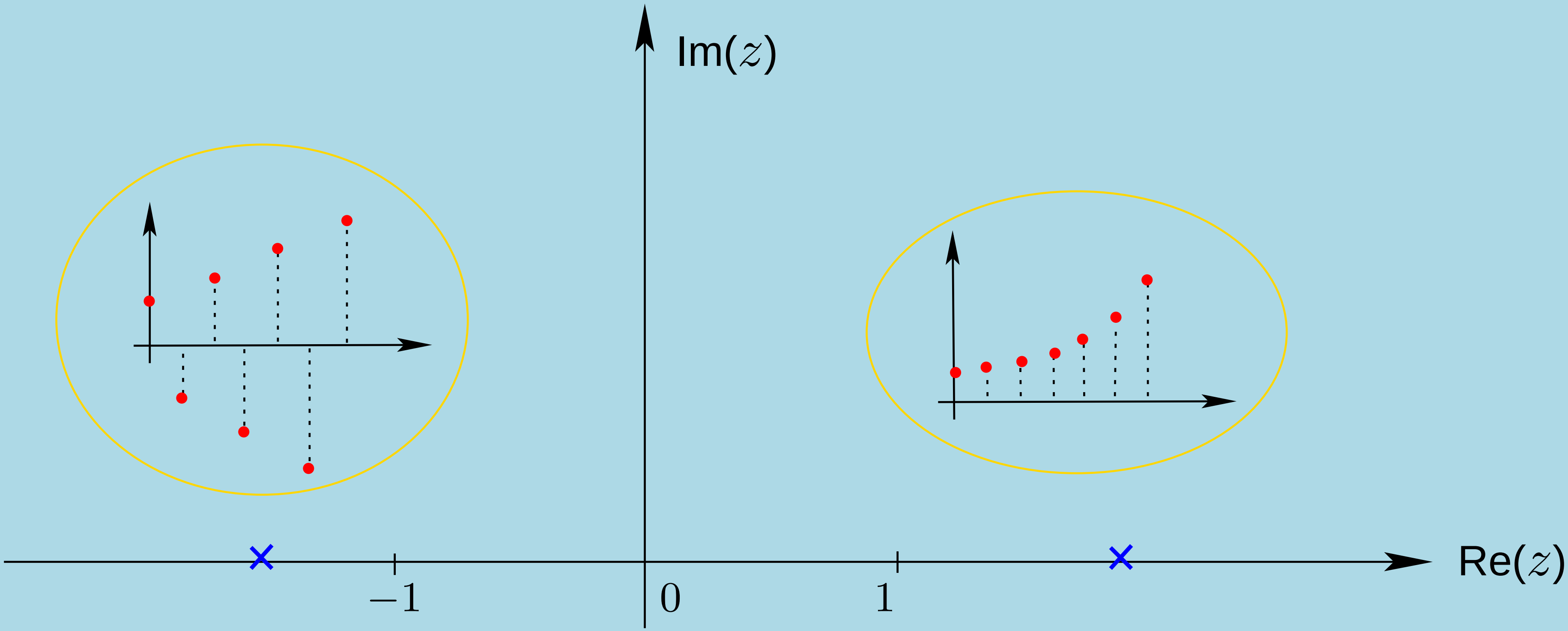
$\rightarrow$ Si $|p_i| < 1$ alors

$$P_i(k)p_i^k \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad k \longrightarrow \infty \quad \Longrightarrow \quad \textit{modes convergents}$$



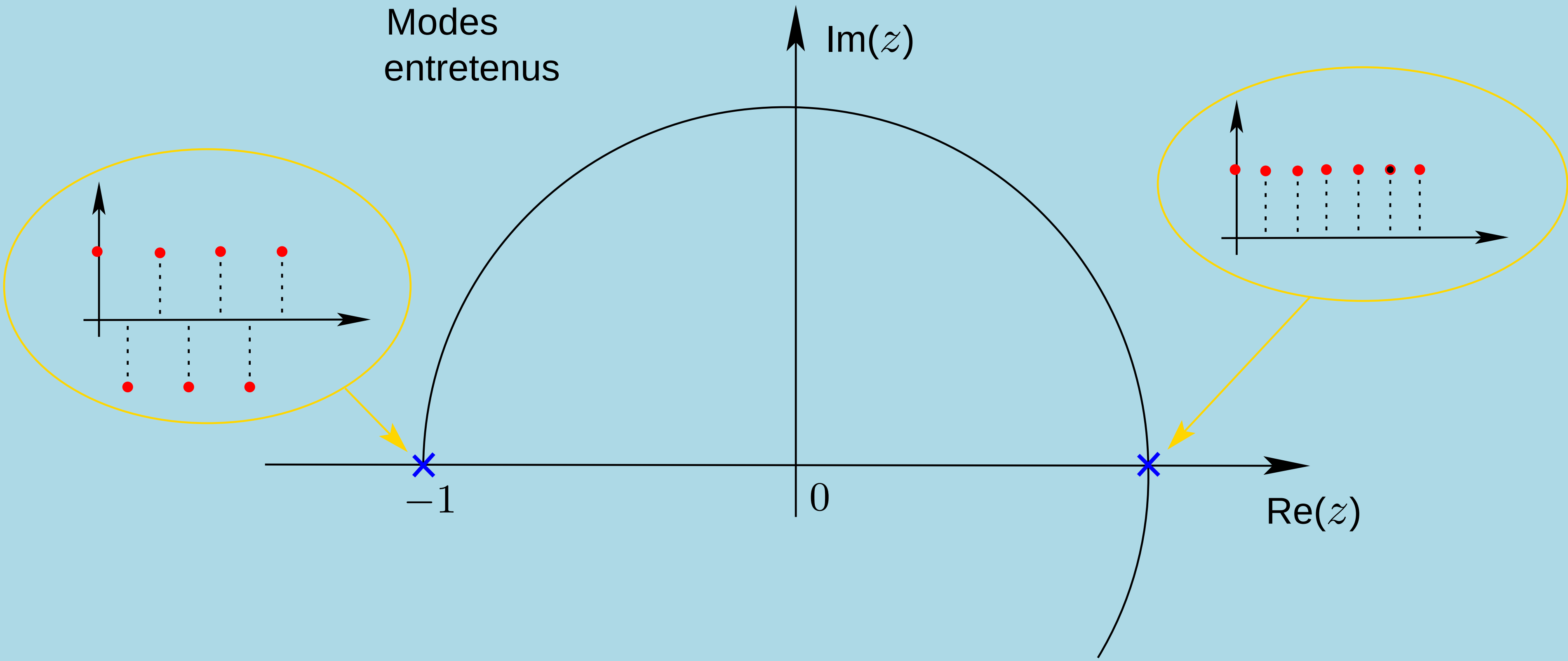
$\rightarrow$ Si $|p_i| > 1$ alors

$$P_i(k)p_i^k \longrightarrow \pm\infty \quad \text{lorsque} \quad k \longrightarrow \infty \quad \Longrightarrow \quad \textit{modes divergents}$$



→ Si $|p_i| = 1$ et $P_i(k)$ est un polynôme constant ($m_i = 1$) $\Longrightarrow$ *modes entretenus*

→ Si $|p_i| = 1$ et $P_i(k)$ est de degré non nul $\Longrightarrow$ divergence polynomiale



➠ Mode complexe associé aux pôles p et p^* :

réponse associée au mode complexe

$$P_\alpha(k)p^k + P_\beta(k){p^*}^k = P(k)|p|^k \sin(k\theta + \phi)$$

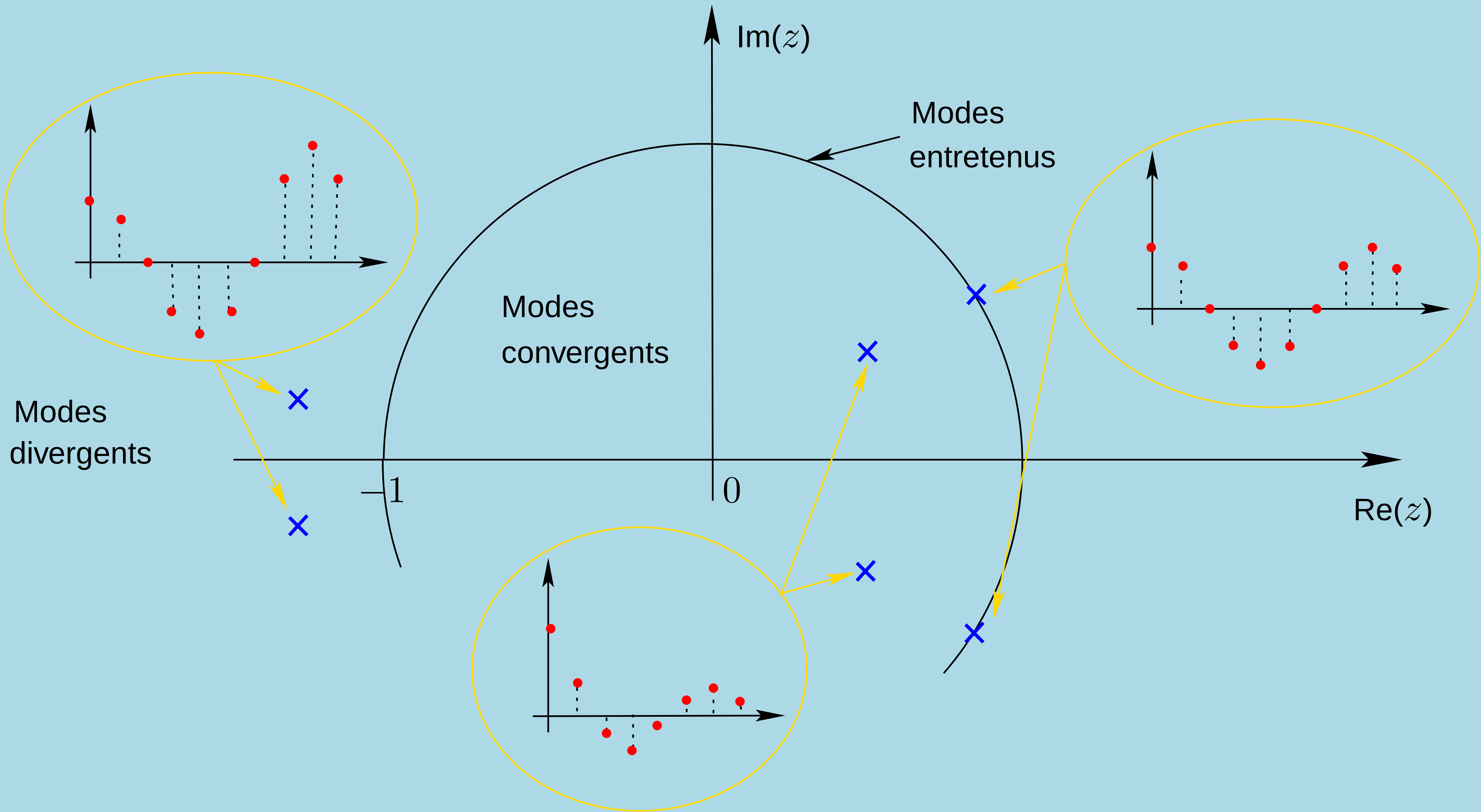
avec $P(k)$ un polynôme en k à coefficients réels, d'ordre $m_i - 1$

→ Si $|p| < 1 \quad \Longrightarrow$ *régime oscillant amortie*

→ Si $|p| > 1 \quad \Longrightarrow$ *régime oscillant non amortie*

→ Si $|p| = 1$ de multiplicité $1 \quad \Longrightarrow$ *mode oscillant entretenu*

Si $|p| = 1$ de multiplicité > 1 ($P(k)$ est de degré non nul) $\Longrightarrow$ *mode oscillant divergent*


Im(z)
Modes
entretenus
Modes
convergents
Modes
divergents
-1
0
Re(z)

➠ Superposition des modes :

$$\sum \text{contributions de tous les modes du système} + \text{réponse forcée}$$

$\rightarrow$ Deux sources d'oscillations :

- présence des pôles complexes conjugués
- présence des pôles à partie réelle négative

4 – Réponse fréquentielle des systèmes échantillonnés

☞ Système discret :

Soit le système discret, causal $G(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\}$

si $u(k) = U_0 \sin(2\pi\nu k)\, \mathbb{U}(k) \longrightarrow \begin{cases} \text{en régime stationnaire} \\ y(k) = U_0\, G(\nu)\ \sin(2\pi\nu k + \phi(\nu)) \end{cases}$

Réponse fréquentielle en module et en phase (*diagramme de Bode*) :

$$\begin{cases} \mid G(z) \mid_{z\,=\,e^{j2\pi\nu}} & \text{en faisant } z \text{ parcourir le cercle unité} \\ \arg(G(z))_{z\,=\,e^{j2\pi\nu}} & \text{c'est à dire pour } \nu \in [-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}] \end{cases}$$

☞ Système échantillonné :

Soit le système échantillonné $G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$

si $u(kT_e) = U_0 \sin(\omega T_e k)\, \mathbb{U}(k) \longrightarrow \begin{cases} \text{en régime stationnaire} \\ y(k) = U_0\, G(\omega) \sin(\omega T_e k + \phi(\omega)) \end{cases}$

Réponse fréquentielle en module et en phase (*diagramme de Bode*) :

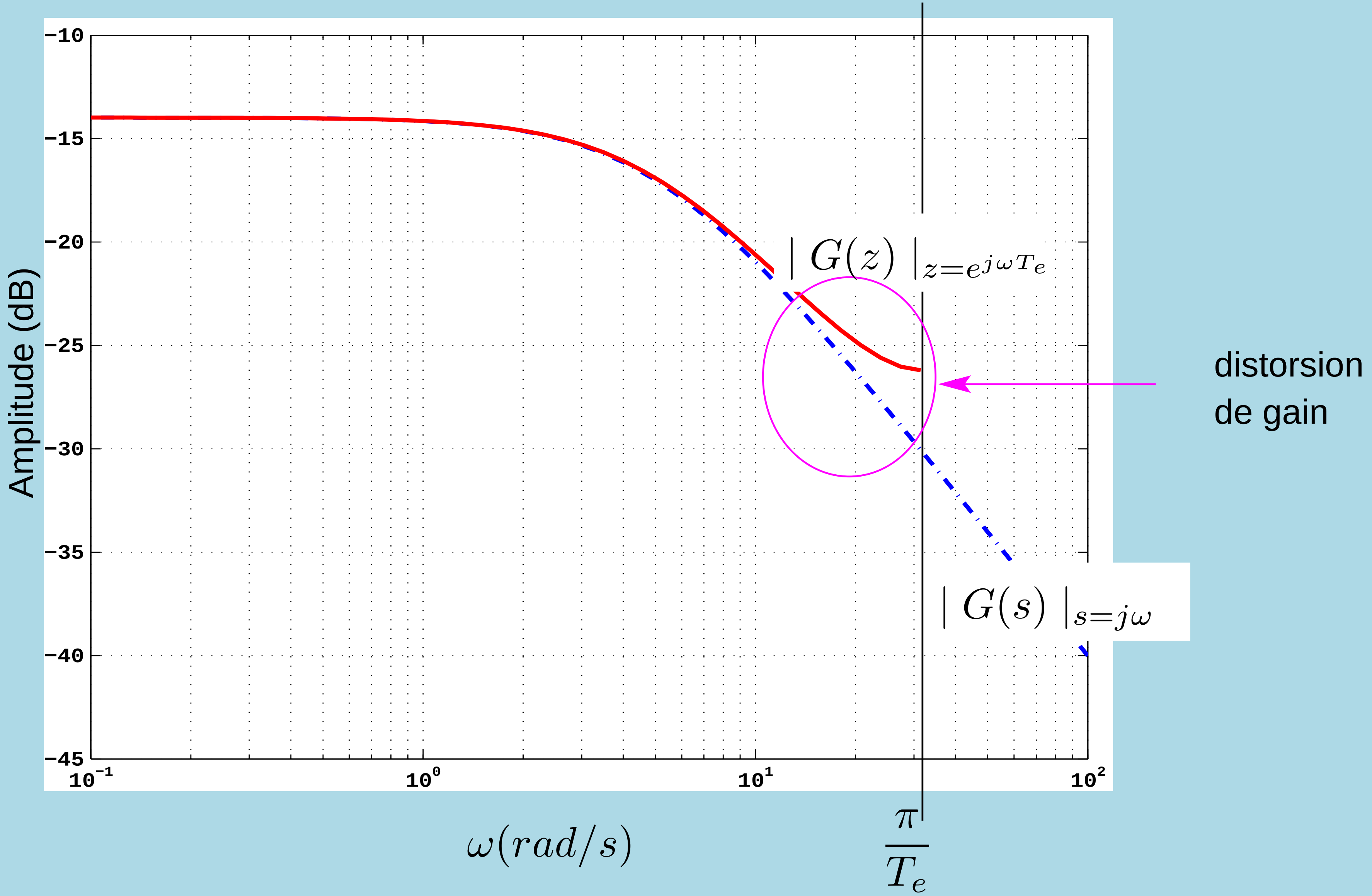
$$\begin{cases} \mid G(z) \mid_{z\, =\, e^{j\omega T_e}} & \text{en faisant } z \text{ parcourir le cercle unité} \\ \arg(G(z))_{z\, =\, e^{j\omega T_e}} & \text{c'est à dire pour } \omega \in [-\dfrac{\pi}{T_e};\ \dfrac{\pi}{T_e}] \end{cases}$$

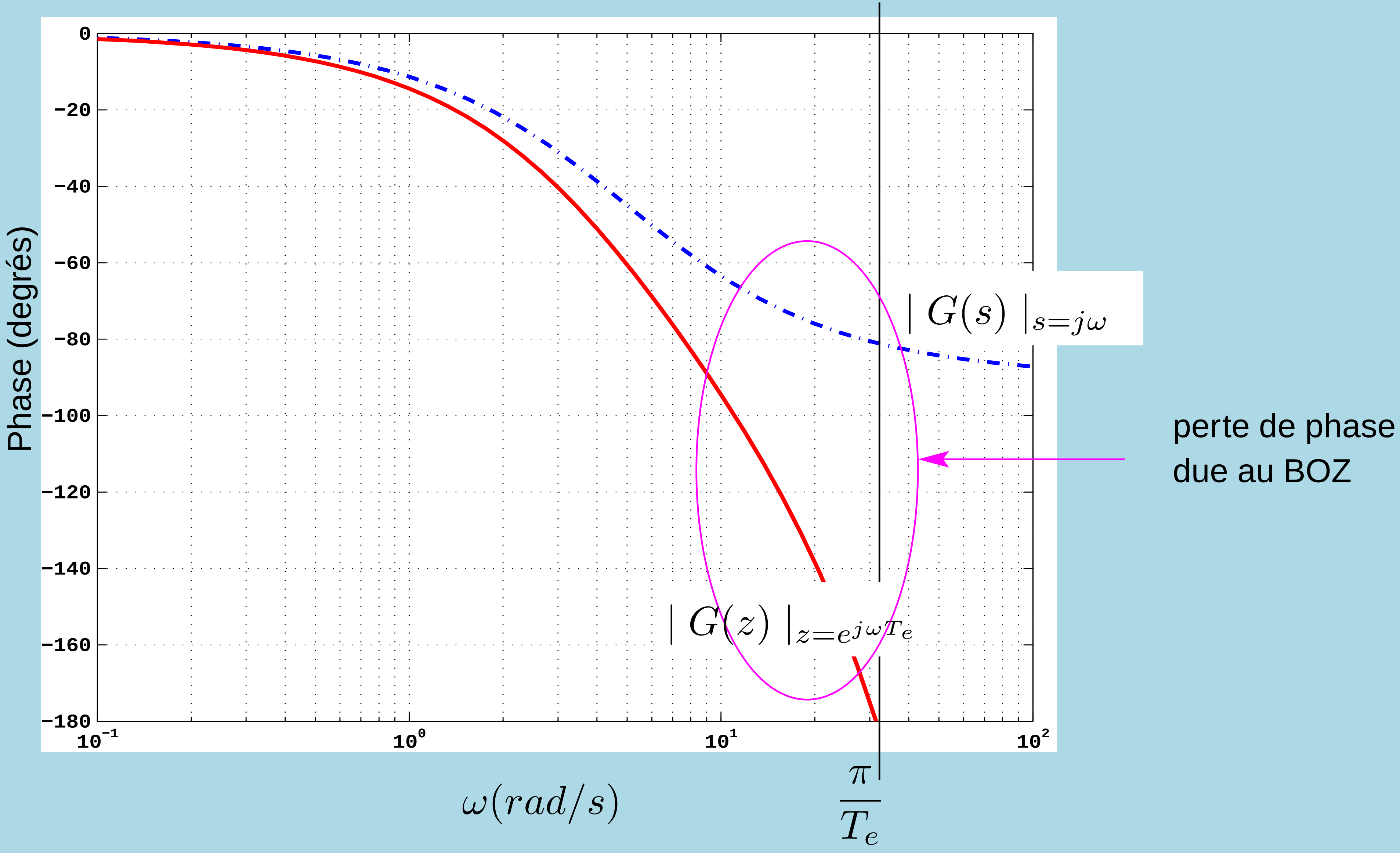
☞ Exemple :

Soit $G(s) = \dfrac{1}{s+5}$ précédé par un BOZ alors

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{1-c}{5(z-c)} = \frac{0,07869}{z - 0,6065}$$

avec $c = e^{-5T_e}$ et la période d'échantillonnage $T_e = 0,1$


-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-45
Amplitude (dB)
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
$\omega (rad/s)$
$\frac{\pi}{T_e}$
$| G(z) |_{z=e^{j\omega T_e}}$
$| G(s) |_{s=j\omega}$
distorsion
de gain


Phase (degrés)
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120
−140
−160
−180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
$\mid G(s) \mid_{s=j\omega}$
$\mid G(z) \mid_{z=e^{j\omega T_e}}$
$\omega(rad/s)$
$\dfrac{\pi}{T_e}$
perte de phase
due au BOZ

5 – Stabilité des systèmes échantillonnés

☞ Définition de la stabilité BIBO :

Un système définit par ses entrées-sorties est *BIBO stable* si pour toute entrée bornée

$$\| u(k) \|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} | u(k) | < \infty$$

la sortie est bornée

$$\| y(k) \|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} | y(k) | < \infty$$

☞ Théorème sur la stabilité :

Un système linéaire invariant à temps discret est *stable* si et seulement si tous ses pôles sont de module strictement inférieur à un.

☞ Critère de Jury :

Soit le système à temps discret de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{avec} \quad D(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad \text{et} \quad a_n > 0$$

Notations :

$$\begin{cases} a_{0,i} = a_i, \ \forall i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \\ a_{j+1,i} = \begin{vmatrix} a_{j,0} & a_{j,n-j-i} \\ a_{j,n-j} & a_{j,i} \end{vmatrix} \\ \qquad \forall j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \ \text{et} \ 0 \leqslant i \leqslant n-j-1 \end{cases}$$

Le polynome $D(z)$, à coefficients réels, a ses racines de module inférieur à l'unité si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

1. $|a_0| - a_n < 0$
2. $D(1) > 0$
3. $(-1)^n\, D(-1) > 0$
4. $|a_{j,0}| - |a_{j,n-j}| > 0, \forall j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2$

- Système d'ordre 1 :

$D(z) = a_0 + a_1 z$ et les conditions du critère sont

1. $|a_0| < a_1$
2. $a_0 + a_1 > 0$
3. $-a_0 + a_1 > 0$

- Système d'ordre 2 :

$D(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ et les conditions du critère s'écrivent

1. $|a_0| < a_2$
2. $a_0 + a_1 + a_2 > 0$
3. $a_0 - a_1 + a_2 > 0$

- Système d'ordre 3 :

$D(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ et les conditions du critère devient

1. $|a_0| < a_3$
2. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0$
3. $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0$
4. $|a_0^2 - a_3^2| > |a_0 a_2 - a_3 a_1| \Longleftrightarrow a_3^2 - a_0^2 > |a_0 a_2 - a_3 a_1|$

a_0	a_1	a_2	a_3
a_3	a_2	a_1	a_0
$a_{1,0} = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}$	$a_{1,1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}$	$a_{1,2} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$	

☞ Transformée en w et critère de Routh :

➠ Transformée en w :

$$w = \frac{z-1}{z+1} \Longleftrightarrow z = \frac{1+w}{1-w}$$

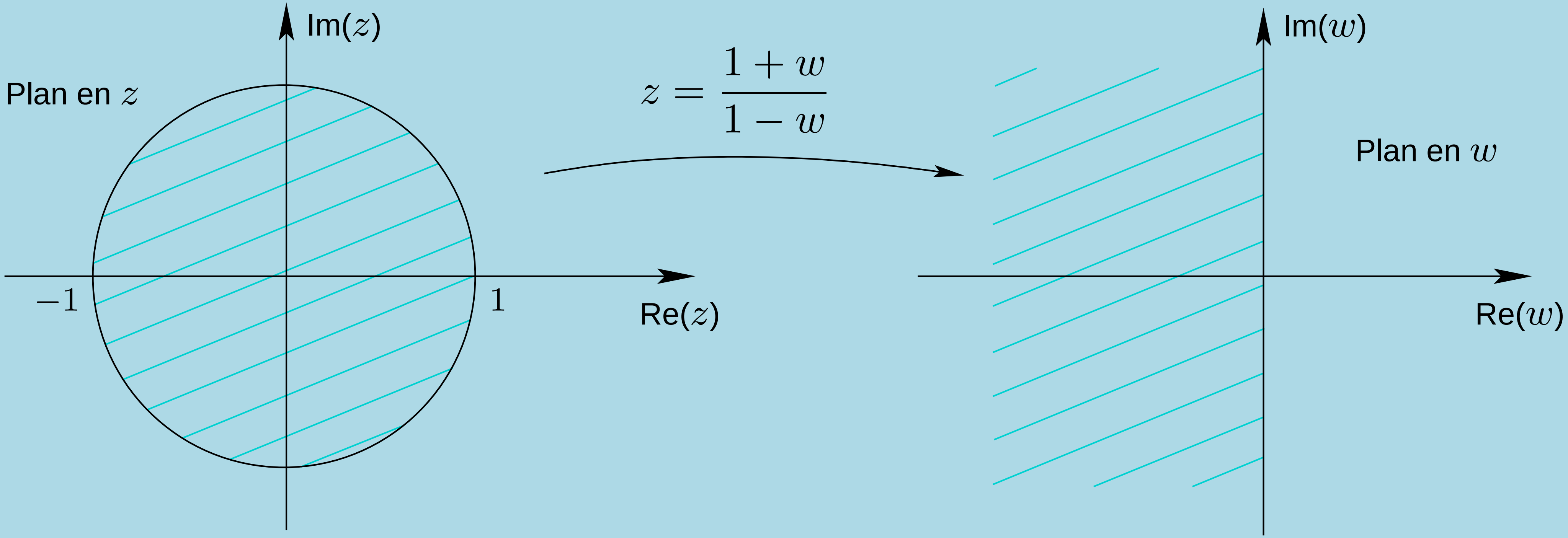
Si $z = e^{j\omega T_e}$ alors :

$$w = \frac{e^{i\omega T_e} - 1}{e^{i\omega T_e} + 1} = j\tan(\frac{\omega T_e}{2})$$

donc, pour $\omega T_e \in [-\pi,\ \pi]$ on obtient $w \in j[-\infty,\ \infty]$

De plus,

$$|z| = \frac{\sqrt{(1+\mathrm{Re}(w))^2+\mathrm{Im}(w)^2}}{\sqrt{(1-\mathrm{Re}(w))^2+\mathrm{Im}(w)^2}} \implies |z|<1 \iff \mathrm{Re}(w)<0$$



- Transformée en w et critère de Routh :

  Le polynôme dénominateur $D(z)$ de la fonction de transfert est stable si le polynôme en w :

  $$D(z)\big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \text{ a des racines à partie rélle négative}$$

  càd si $D'(w) = (1-w)^n D\left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)$ vérifie le critère de Routh