# Commande numérique des systèmes

## Analyse des systèmes échantillonnés

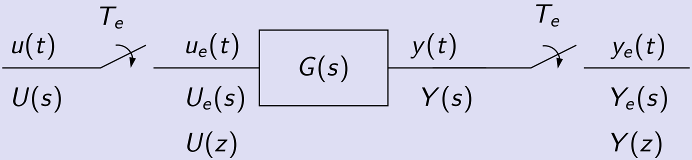
Gabriela Iuliana Bara

# Sommaire


1. Pôles des systèmes échantillonnés
2. Zéros des systèmes échantillonnés
3. Réponse temporelle des systèmes échantillonnés
4. Réponse fréquentielle des systèmes échantillonnés
5. Stabilité des systèmes échantillonnés
6. Commandabilité, observabilité, minimalité

# Pôles des systèmes échantillonnés

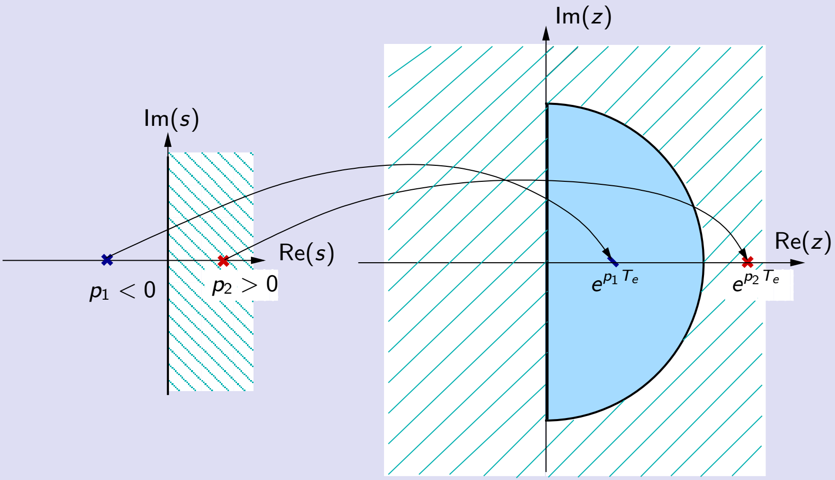
## Correspondance $G(s) \longleftrightarrow G(z)$




- Pôles en $s$ du système $=$ pôles de la fonction de transfert $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U_e(s)}$
- Pôles en $z$ $=$ pôles de la transmittance échantillonnée $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$

$$\boxed{\text{Correspondance : } s = p_i \longrightarrow z = e^{p_i T_e}}$$

## 1 Systèmes du premier ordre



## 2 Systèmes du second ordre

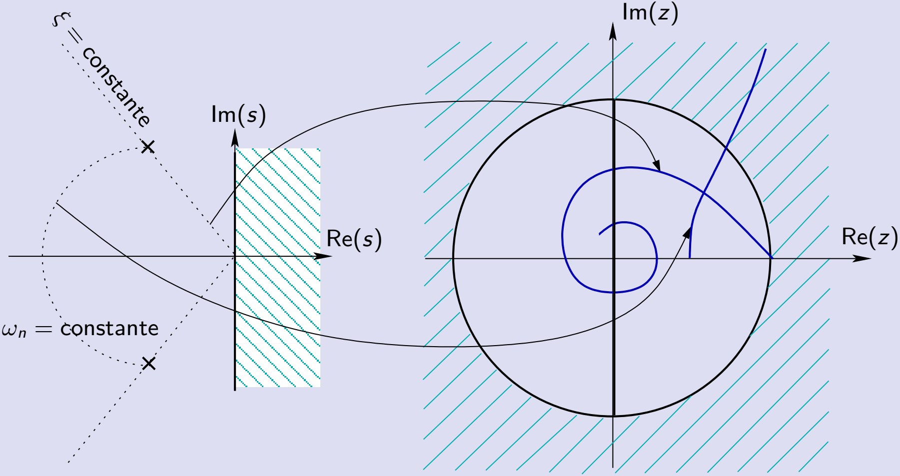
$$\boxed{G(s) = \frac{K\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}}$$

Deux pôles en $s$ complexes conjugués : $s_{1,2} = -(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})\omega_n$

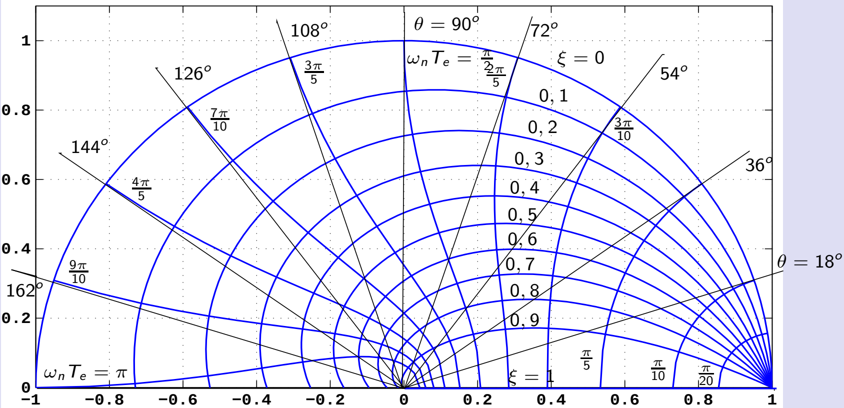
$$\Longrightarrow \text{pôles en } z : \quad z_{1,2} = e^{-\xi\omega_n T_e} \; e^{\pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n T_e}$$

- Courbes à $\xi = $ constant :
  $z_{1,2} = e^{-\frac{\xi\theta}{\sqrt{1-\xi^2}}} \; e^{\pm j\theta}$ où $\theta = \sqrt{1-\xi^2}\omega_n T_e \Longrightarrow$ spirales logarithmiques
- Courbes $\omega_n = $ constant : courbes perpendiculaires aux spirales logarithmiques

## Systèmes du second ordre

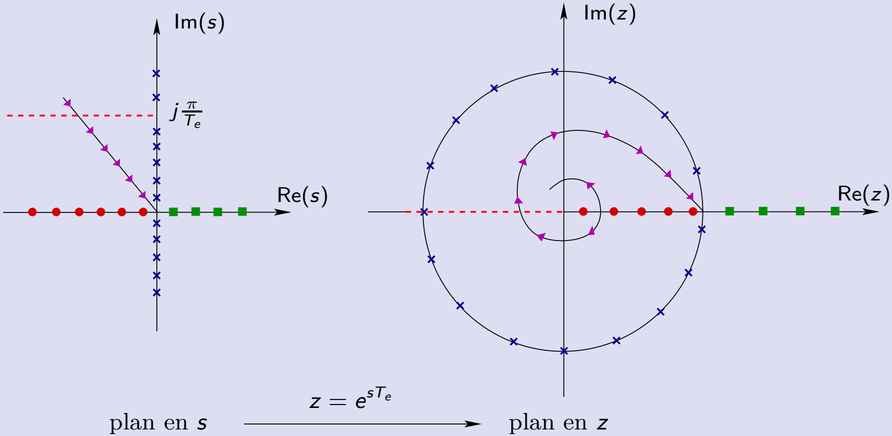


# Abaque de Ziegler-Nichols (systèmes d'ordre 2)




⇝ analyser les caractéristiques de la réponse indicielle du système échantillonné par rapport au système à temps continu

## 3 Systèmes d'ordre quelconque




!!! Un pôle complexe en $s$ ayant une partie imaginaire = multiple entier de $\pi/T_e$ correspond à un pôle réel négatif en $z$

## 4 Systèmes avec retard

Soit $G(s) = e^{-nT_e}G_1(s)$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\{g(t)\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-nT_e}G_1(s)\}\} \\ &= \mathcal{Z}\{g_1(t - nT_e)\} = z^{-n}\mathcal{Z}\{g_1(t)\} \\ &= z^{-n}\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)\}\} = z^{-n}\mathcal{Z}\{G_1(s)\} \end{aligned}$$

## Exemple

- Système d'ordre 1 :

  Soit $G(s) = \dfrac{K}{1+\tau s}$ alors

  $$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = \frac{K}{\tau}\frac{z}{z-c} \quad \text{avec} \quad c = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

  - conservation du no. de pôles

- Système d'ordre 1 précédé par un BOZ :

  Soit $G(s) = \dfrac{K}{1+\tau s}$ précédé par un BOZ alors

  $$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\{\frac{G(s)}{s}\} = \frac{K(1-c)}{z-c} \quad \text{avec} \quad c = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

  - conservation du no. de pôles, du gain statique et de la réponse indicielle

## Dans l'espace d'état

- Pôles en $s$ du système (rappel) :

  Si la matrice d'état $A_c$ est de dimension $n$ et la représentation d'état est minimale alors les valeurs propres de la matrice d'état $A_c$ sont identiques aux pôles de la fonction de transfert $G(s)$.

- Pôles en $z$ :

  Si la matrice d'état $A_d$ est de dimension $n$ et la représentation d'état est minimale (commandable et observable) alors les valeurs propres de la matrice d'état $A_d$ sont identiques aux pôles de la fonction de transfert $G(z)$.

# Zéros des systèmes échantillonnés

## Correspondance $G(s) \longleftrightarrow G(z)$

Pas de relation simple entre les zéros de $G(s)$ et ceux de $G(z)$

- $G(s)$ est à déphasage non minimal $\not\Rightarrow$ $G(z)$ est à déphasage non minimal
- Un système continu sans zéros dans le demi-plan de droite peut donner un système échantillonné avec des zéros en dehors du cercle unité

# Réponse temporelle des systèmes échantillonnés

## Méthodes de calcul

1. A partir de l'équation aux différences
2. A partir de la fonction de transfert

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)U(z)\} \rightsquigarrow \text{décomposition en éléments simples}$$

Soit $p_1$, $p_2$, ..., $p_{n_p}$ les pôles de $G(z)$ avec $m_i$, $i = 1, \ldots, n_p$, l'ordre de multiplicité de chaque pôle

Soit $z_1$, $z_2$, ..., $z_q$ les pôles de $U(z)$

## Méthode #2

Alors,

$$Y(z) = \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n_p} G_i(z)}}_{\text{caract. intrinsèques au } G(z)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{q} U_j(z)}_{\text{régime forcé}}$$

avec $G_i(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij} z}{(z - p_i)^j}$

- Notion de *mode* du système :

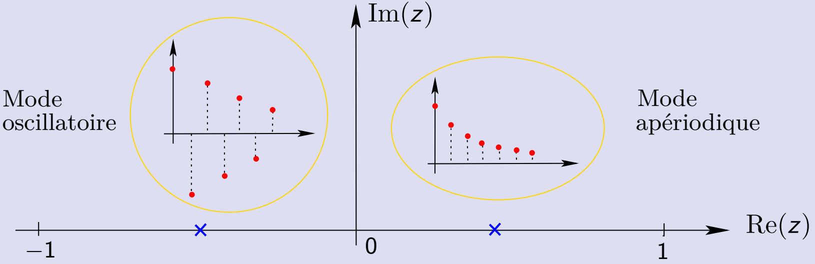
$$\text{pôle } p_i \Longrightarrow \text{ mode } \Longleftarrow \begin{cases} G_i(z) & \text{si } p_i \text{ pôle réel} \\ G_i(z) + G_i^*(z) & \text{si } p_i \text{ et } p_i^* \text{ paire de pôles} \\ & \text{complexes conjugués} \end{cases}$$

## Mode réel $p_i$

Réponse associée au mode réel : $\mathcal{Z}^{-1}\{G_i(z)\} = P_i(k)p_i^k$
avec $P_i(k)$ un polynôme en $k$ d'ordre $m_i - 1$

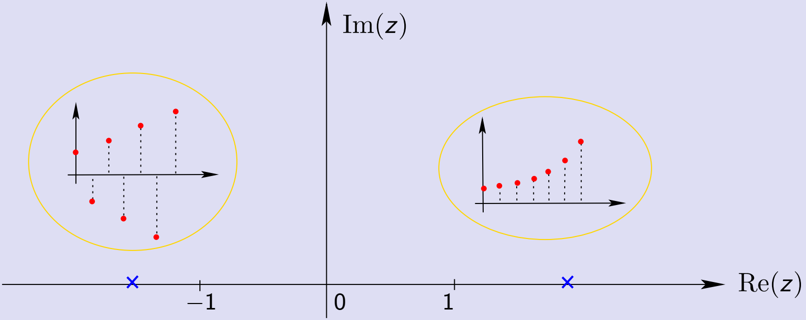
- Si $|p_i| < 1$ alors

$$P_i(k)p_i^k \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad k \longrightarrow \infty \quad \Longrightarrow \quad \textit{modes convergents}$$

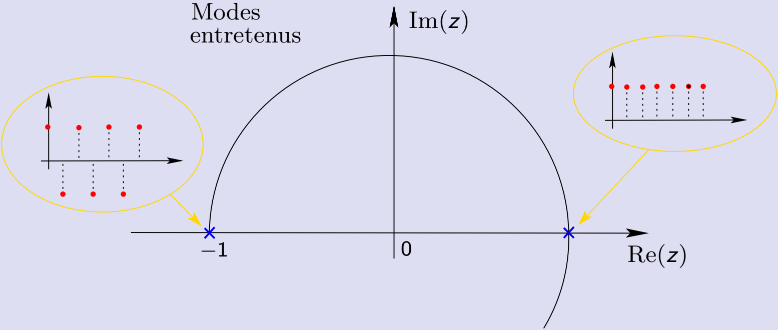


- Si $|p_i| > 1$ alors

$$P_i(k)p_i^k \longrightarrow \pm\infty \quad \text{lorsque} \quad k \longrightarrow \infty \quad \Longrightarrow \quad \textit{modes divergents}$$



- Si $|p_i| = 1$ et $P_i(k)$ est un polynôme constant $(m_i = 1) \Longrightarrow$ *modes entretenus*




- Si $|p_i| = 1$ et $P_i(k)$ est de degré non nul $\Longrightarrow$ divergence polynomiale

## Mode complexe associé aux pôles $p$ et $p^*$

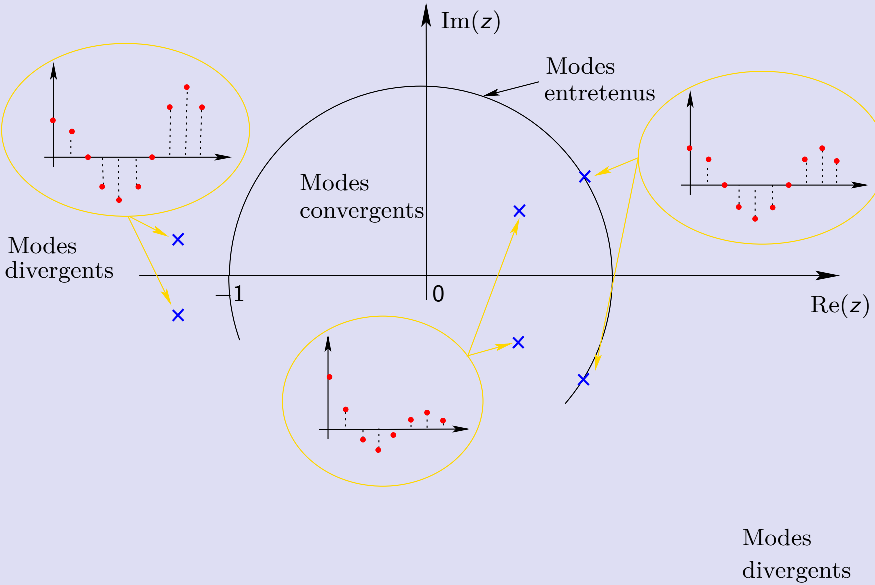
Réponse associée au mode complexe :

$$P_\alpha(k)p^k + P_\beta(k){p^*}^k = P(k)|p|^k \sin(k\theta + \phi)$$

avec $P(k)$ un polynôme en $k$ à coefficients réels, d'ordre $m_i - 1$

- Si $|p| < 1 \quad \Longrightarrow \quad$ *régime oscillant amorti*
- Si $|p| > 1 \quad \Longrightarrow \quad$ *régime oscillant non amorti*
- Si $|p| = 1$ de multiplicité 1 $\quad \Longrightarrow \quad$ *mode oscillant entretenu*

  Si $|p| = 1$ de multiplicité $> 1$ ($P(k)$ est de degré non nul) $\quad \Longrightarrow$ *mode oscillant divergent*


Im($z$)
Modes
entretenus
Modes
convergents
Modes
divergents
−1
0
Re($z$)
Modes
divergents

## Réponse globale par superposition des modes

$$= \sum \text{ contributions de tous les modes du système } + \text{ réponse forcée}$$

$\rightsquigarrow$ Deux sources d'oscillations :

- présence des pôles complexes conjugués
- présence des pôles réels négatifs

# Réponse fréquentielle des systèmes à temps discret

## Système discret

Soit le système discret, causal $G(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\}$

si $u(k) = U_0 \sin(2\pi\nu k)\ \mathbb{U}(k) \longrightarrow \begin{cases} \text{en régime stationnaire} \\ y(k) = U_0\ G(\nu)\ \sin(2\pi\nu k + \phi(\nu)) \end{cases}$

Réponse fréquentielle en module et en phase (*diagramme de Bode*) :

$$\begin{cases} \mid G(z) \mid_{z\,=\,e^{j2\pi\nu}} & \text{en faisant } z \text{ parcourir le cercle unité} \\ \\ \arg(G(z))_{z\,=\,e^{j2\pi\nu}} & \text{c'est à dire pour } \nu \in [-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}] \end{cases}$$

## Système échantillonné

Soit le système échantillonné $G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$

si $u(kT_e) = U_0 \sin(\omega T_e k)\ \mathbb{U}(k) \rightarrow \begin{cases} \text{en régime stationnaire} \\ y(k) = U_0\ G(\omega) \sin(\omega T_e k + \phi(\omega)) \end{cases}$

Réponse fréquentielle en module et en phase (*diagramme de Bode*) :

$$\begin{cases} \mid G(z) \mid_{z\,=\,e^{j\omega T_e}} & \text{en faisant } z \text{ parcourir le cercle unité} \\ \arg(G(z))_{z\,=\,e^{j\omega T_e}} & \text{c'est à dire pour } \omega \in [-\dfrac{\pi}{T_e};\ \dfrac{\pi}{T_e}] \end{cases}$$

## Exemple

Soit $G(s) = \dfrac{1}{s+5}$ précédé par un BOZ alors

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{1-c}{5(z-c)} = \frac{0,07869}{z - 0,6065}$$

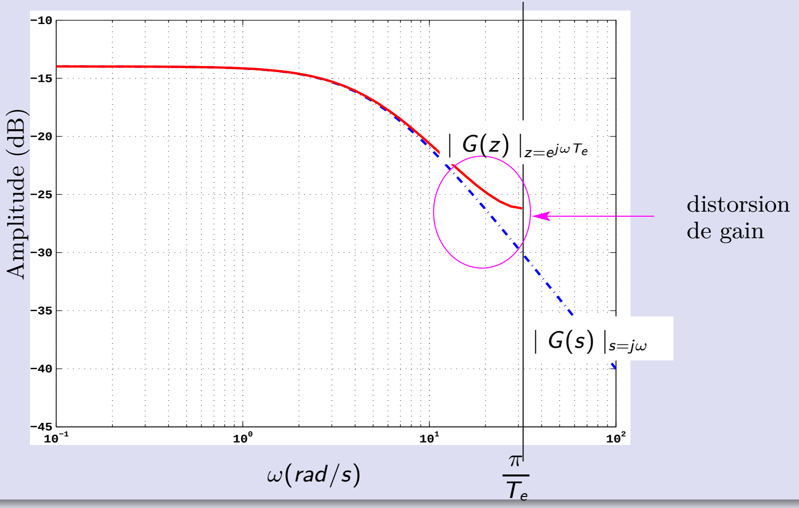
avec $c = e^{-5T_e}$ et la période d'échantillonnage $T_e = 0,1$

## Remarque

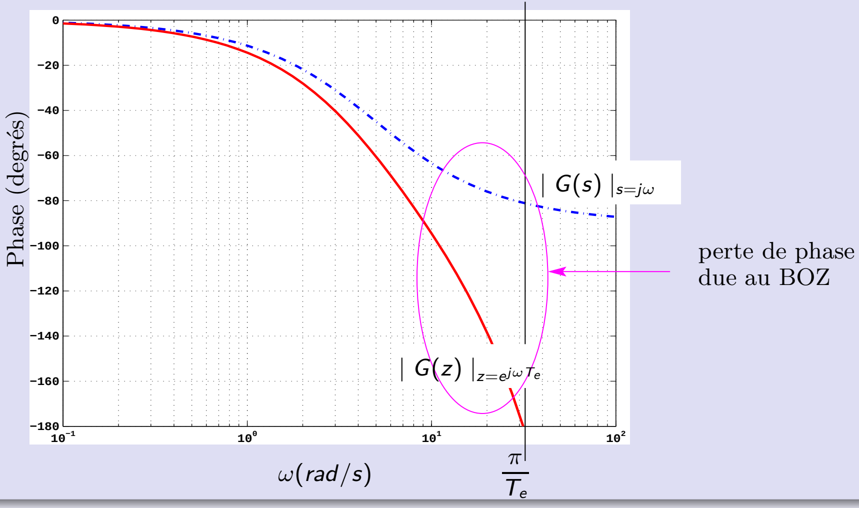
Les règles de construction du diagramme de Bode asymptotique ne s'applique pas

## Implémentation MATLAB

- Réponse fréquentielle : `bode(sys)`



Amplitude (dB)
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-45
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
$\mid G(z) \mid_{z=e^{j\omega T_e}}$
$\mid G(s) \mid_{s=j\omega}$
distorsion
de gain
$\omega(rad/s)$
$\frac{\pi}{T_e}$


0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
Phase (degrés)
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
$\omega(rad/s)$
$\frac{\pi}{T_e}$
$|\ G(s)\ |_{s=j\omega}$
$|\ G(z)\ |_{z=e^{j\omega T_e}}$
perte de phase
due au BOZ

# Stabilité des systèmes échantillonnés

## Stabilité externe ou BIBO

Un système définit par ses entrées-sorties est *BIBO stable* si pour toute entrée bornée

$$\| u(k) \|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} | u(k) | < \infty$$

la sortie est bornée

$$\| y(k) \|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} | y(k) | < \infty$$

$\rightsquigarrow$ $\exists$ une constante $\beta$ telle que $\| y(k) \|_\infty < \beta \| u(k) \|_\infty$

## Théorème sur la stabilité externe

Un système linéaire invariant à temps discret est *stable* $(y(k) \to 0)$ si et seulement si tous ses pôles sont de module strictement inférieur à un.

## Stabilité interne (stabilité au sens de Lyapunov)

$$x(k) \to 0 \quad \equiv \quad \lim_{k\to\infty} \Phi(k, k_0) = \lim_{k\to\infty} A^{k-k_0} = 0$$

## Théorème sur la stabilité interne

Un système linéaire invariant à temps discret est *internement stable* si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'état sont de module strictement inférieur à un :

$$\boxed{|\sigma(A) < 1|}\,^{a}$$

[a] $\sigma(A)$ est le spectre de la matrice d'état $A$ du système à temps discret

## Relation entre la stabilité interne et celle externe

$$\text{stabilité interne} \longrightarrow \text{stabilité externe}$$

Pour une représentation d'état minimale,

$$\text{stabilité interne} \longleftrightarrow \text{stabilité externe}$$

## Exemple

Soit le système

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} -1,3 & 0,6 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

- Instabilité interne : $\sigma(A) = \{-1,5;\ 0,2\}$
- Stabilité externe BIBO : $G(z) = \dfrac{1}{z - 0,2}$

$\rightsquigarrow$ Le système est BIBO stable mais instable internement

# Critère algébrique pour l'analyse de stabilité externe

## Critère de Jury

Soit le système à temps discret de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{avec} \quad D(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad \text{et} \quad a_n > 0$$

Notations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{0,i} & = & a_i, \ \forall i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \\ a_{j+1,i} & = & \begin{vmatrix} a_{j,0} & a_{j,n-j-i} \\ a_{j,n-j} & a_{j,i} \end{vmatrix} \\ & & \forall j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \ \text{ et } \ 0 \leqslant i \leqslant n-j-1 \end{array} \right.$$

## Critère de Jury

Le polynome $D(z)$, à coefficients réels, a ses racines de module inférieur à l'unité si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

1. $|a_0| - a_n < 0$
2. $D(1) > 0$
3. $(-1)^n \; D(-1) > 0$
4. $|a_{j,0}| - |a_{j,n-j}| > 0, \forall j = 1,\; 2,\; \ldots,\; n-2$

## Exemples

- Système d'ordre 1 :

  $D(z) = a_0 + a_1 z$ et les conditions du critère sont

  1. $|a_0| < a_1$
  2. $a_0 + a_1 > 0$
  3. $-a_0 + a_1 > 0$

- Système d'ordre 2 :

  $D(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ et les conditions du critère s'écrivent

  1. $|a_0| < a_2$
  2. $a_0 + a_1 + a_2 > 0$
  3. $a_0 - a_1 + a_2 > 0$

## Exemples

- Système d'ordre 3 :

  $D(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ et les conditions du critère deviennent

  1. $|a_0| < a_3$
  2. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0$
  3. $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0$
  4. $|a_0^2 - a_3^2| > |a_0 a_2 - a_3 a_1| \iff a_3^2 - a_0^2 > |a_0 a_2 - a_3 a_1|$

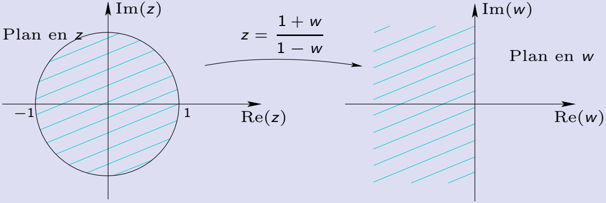
| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
| $a_{1,0} = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}$ | $a_{1,1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}$ | $a_{1,2} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$ | |

## Transformée en $w$ et critère de Routh

- Transformée en $w$ : $\boxed{w = \dfrac{z-1}{z+1} \iff z = \dfrac{1+w}{1-w}}$

  Si $z = e^{j\omega T_e}$ alors $w = \dfrac{e^{i\omega T_e} - 1}{e^{i\omega T_e} + 1} = j\tan(\dfrac{\omega T_e}{2})$
  donc, pour $\omega T_e \in [-\pi,\ \pi]$ on obtient $w \in j[-\infty,\ \infty]$
  De plus,

$$|z| = \frac{\sqrt{(1+\mathrm{Re}(w))^2 + \mathrm{Im}(w)^2}}{\sqrt{(1-\mathrm{Re}(w))^2 + \mathrm{Im}(w)^2}} \quad \Longrightarrow \quad |z| < 1 \iff \mathrm{Re}(w) < 0$$



## Transformée en $w$ et critère de Routh

Le polynôme dénominateur $D(z)$ de la fonction de transfert est stable si le polynôme en $w$ :

$$D(z)|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \text{ a des racines à partie rélle négative}$$

càd si $D'(w) = (1-w)^n D\left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)$ vérifie le critère de Routh

# Commandabilité, observabilité, minimalité

## Commandabilité des systèmes discrets

Le système discret ou la paire $(A, B)$ est *commandable* si pour tout $x(t_0)$ et pour un état final $x_1$, il existe une commande $u(t)$ qui transfère le système de l'état initial $x(t_0)$ à l'état final $x_1$ dans un temps fini.

$$\forall (x(t_0), x_1) \quad \exists \, \infty > t_1 > t_0 \text{ et } u(t) \text{ définie sur } [t_0, t_1] \text{ tels que } x(t_1) = x_1$$

Conditions équivalentes :

1. $(A, B)$ commandable
2. $\mathrm{rang}\, \mathcal{C} = \mathrm{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$ (condition de Kalman)
3. $\mathrm{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = n$ pour $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ (critère de Popov)

## Observabilité des systèmes discrets

Le système discret ou la paire $(C, A)$ est *observable* si, pour $k_1 > k_0$, l'état initial $x(k_0)$ peut être déterminé à partir de la commande $u(k)$ et de la sortie $y(k)$ pour la séquence $\{k_0, \dots, k_1\}$

Conditions équivalentes :

1. $(C, A)$ observable
2. $\operatorname{rang} \mathcal{O} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$
3. $\operatorname{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$ pour $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ (critère de Popov)

## Minimalité

Une représentation d'état de dimension $n$ est minimale si et seulement si elle est complètement commandable et observable.

## Implémentation MATLAB

- Modèles : `tf(num,conv(den1,den2),Te)`, `ss(A,B,C,D,Te)`
- Zéros : `tzero(A,B,C,D)`
- Valuers propres (pôles) : `eig(A)`, `tzero(A,[],[],[])`
- Commandabilité : `rank(ctrb(A,B))`, `tzero(A,B,[],[])`
- Observabilité : `rank(obsv(A,C))`, `tzero(A,[],C,[])`
- Réalisation minimale : `minreal(G)`, `ss(sys,'minimal')`