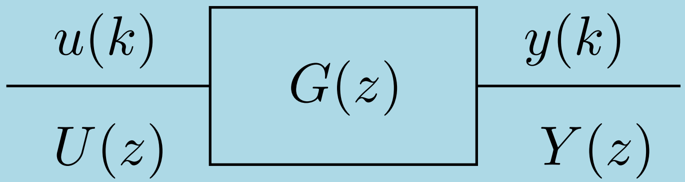
Commande numérique des systèmes

Transmittance des systèmes échantillonnés

G. Iuliana BARA

1 – Systèmes linéaires à temps discret

☞ Modèles des systèmes à temps discret (modèles externes)



➠ Equation aux différences (éq. récurrente) :

$$\begin{aligned} a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m) \end{aligned}$$

pour un système causal

➠ Fonction de transfert du système à temps discret ou transmittance discrète

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

→ Relation biunivoque avec l'équation aux différences

$$G(z) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$$

→ Pôles et zéros du système discret

→ Polynôme caractéristique

→ Gain statique

- Fonction de transfert à temps discret est la transformée en z de la réponse impulsionnelle du système

  Si $u(k) = \delta(k)$ alors $U(z) = 1 \implies Y(z) = G(z)$

- Relation entre la sortie $y(k)$, l'entrée $u(k)$ et la réponse impulsionnelle $g(k)$

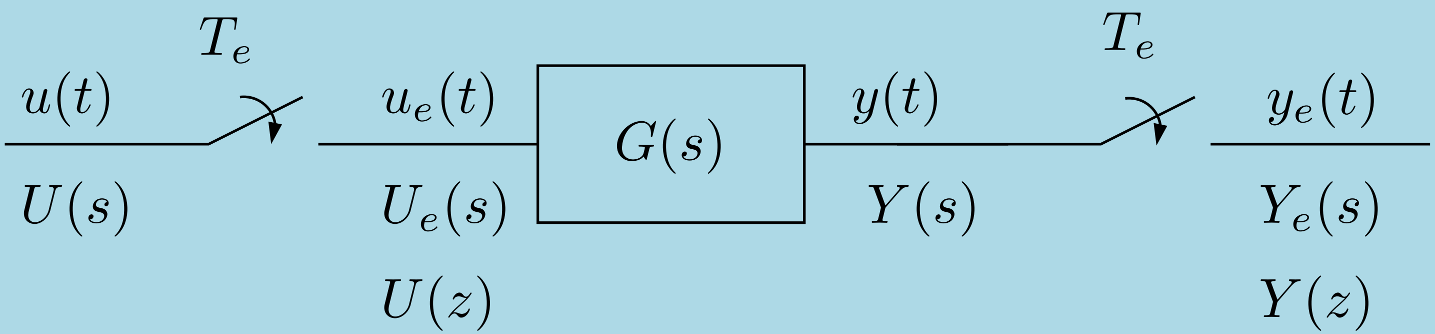
$$y(k) = (g \star u)(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)u(k-n) = \sum_{n=0}^{k} g(n)u(k-n)$$

☞ Propriétés des systèmes à temps discret :

- Système linéaire : obéit au principe de superposition
- Système causal : $y(k_0T_e) \nsim u(kT_e)$ avec $k > k_0$
- Système stationnaire (invariant) : un décalage temporel de l'impulsion unité appliquée à l'entrée provoque le même décalage temporel à la sortie

2 – Transmittance échantillonnée

☞ Système à entrée et sortie échantillonnées



$$
\begin{aligned}
Y_e(s) &= \left(G(s)U_e(s)\right)_e = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right) \\
&= \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right) U_e\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right)
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \quad Y_e(s) = G_e(s)\,U_e(s) \quad \Longrightarrow Y(z) = G(z)\,U(z)$$

☞ Remarques :

- Transmittance échantillonnée $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}\{g(t)\} = \mathcal{Z}\{G(s)\}$
- On a la relation suivante

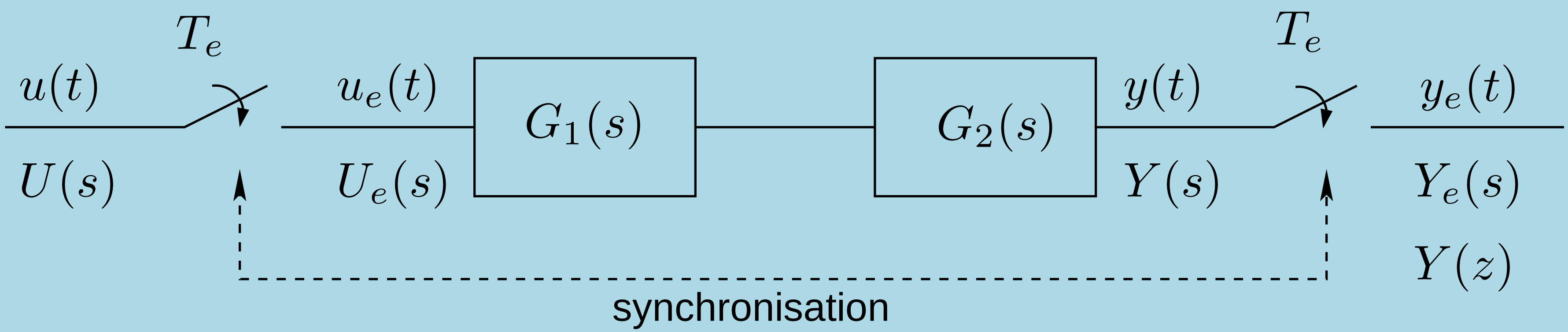
$$\mathcal{Z}\{G(s)U_e(s)\} = G(z)U(z)$$

- Si l'échantillonneur d'entrée est absent alors

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G(s)U(s)\} \neq G(z)U(z)$$

3 – Transmittance échantillonnée des systèmes ouverts

☞ Sous-systèmes en série :



$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)U_e(s) \quad \text{et donc}$$

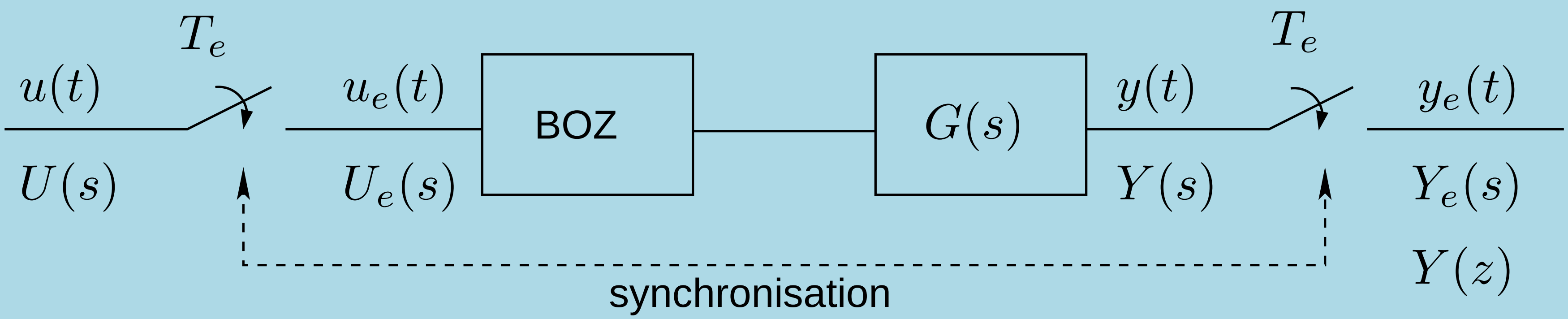
$$Y_e(s) = (G_1(s)G_2(s)U_e(s))_e = (G_1(s)G_2(s))_e\,U_e(s)$$

$$\Longrightarrow Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}U(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\}\}U(z)$$

➠ De manière générale :

$$\boxed{\left(G_1(s)G_2(s)\right)_e \neq \left(G_1(s)\right)_e \left(G_2(s)\right)_e}$$

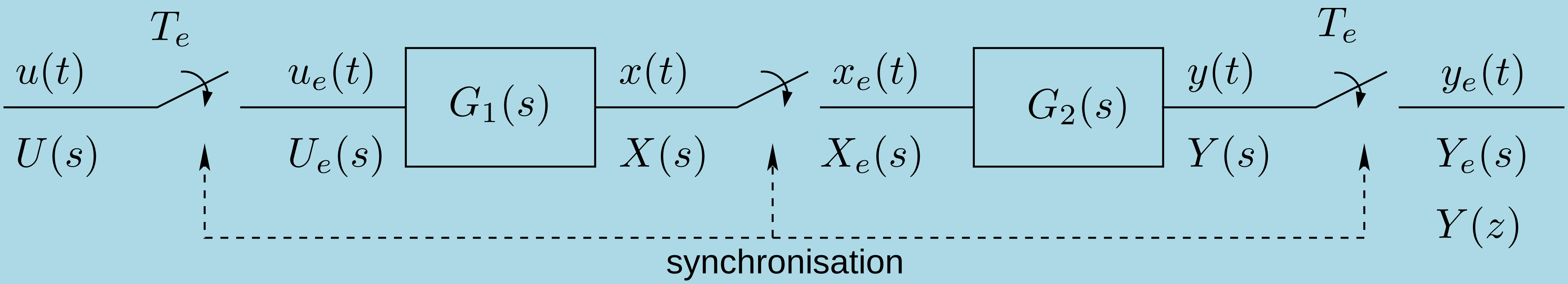
☞ Echantillonnage d'un système continu précédé par un BOZ :



$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}$$

avec la notation $\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}$

☞ Exemple :



$$X_e(s) = (G_1(s)U_e(s))_e = (G_1(s))_e U_e(s) \Longrightarrow X(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}U(z)$$

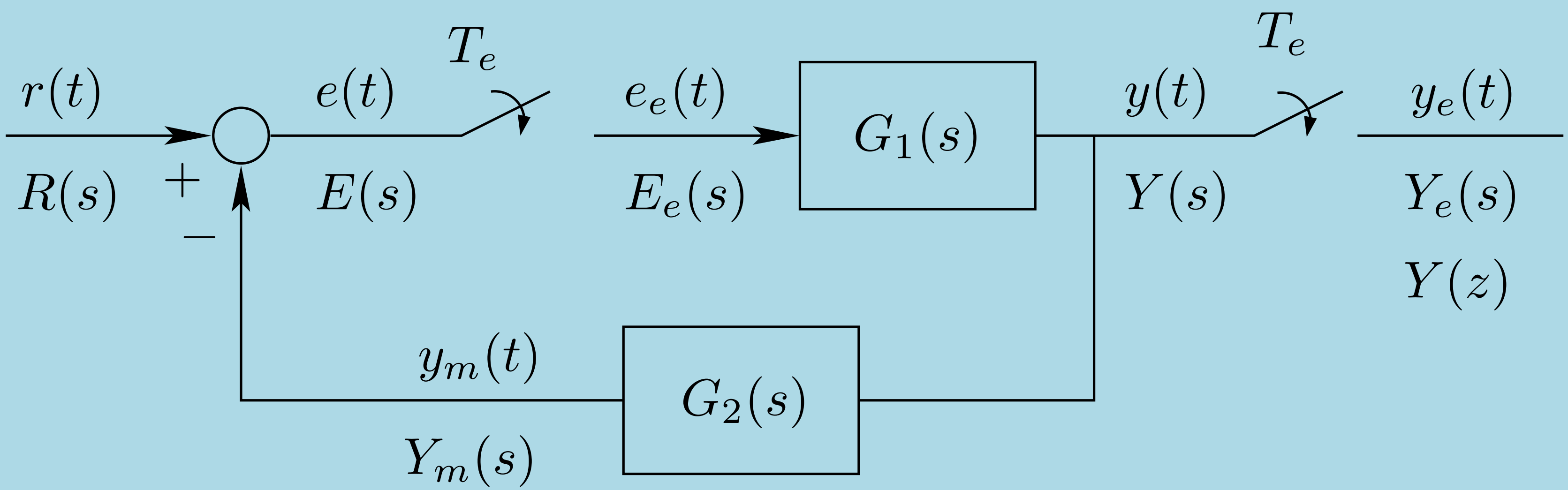
Analogiquement, on a :

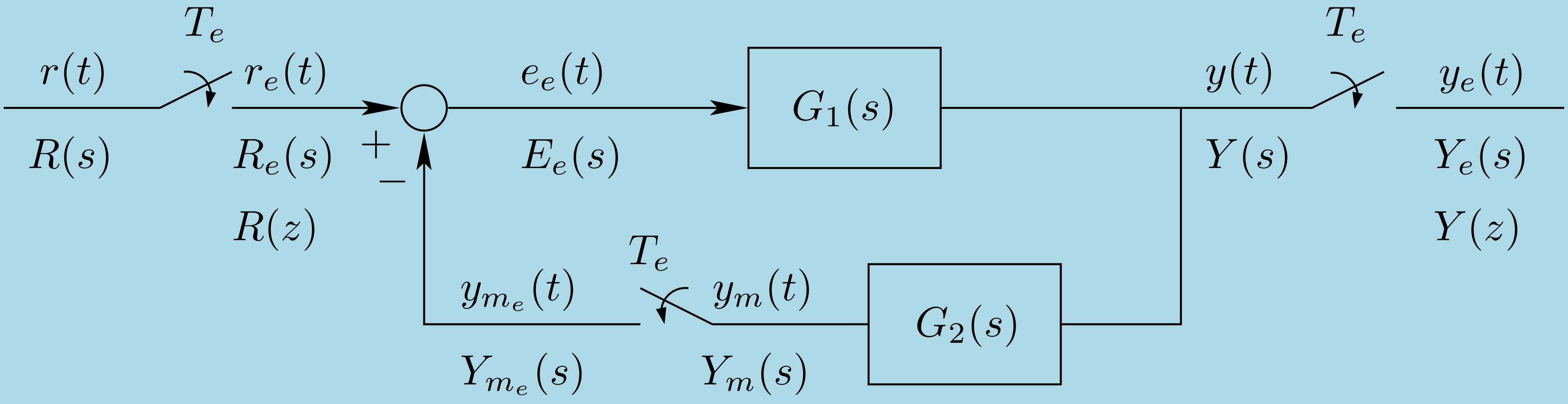
$$Y_e(s) = (G_2(s)X_e(s))_e = (G_2(s))_e X_e(s) \quad \Longrightarrow \quad Y(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)\}X(z)$$

$$\Longrightarrow \boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}\mathcal{Z}\{G_2(s)\}U(z)}$$

4 – Transmittance échantillonnée des systèmes bouclés

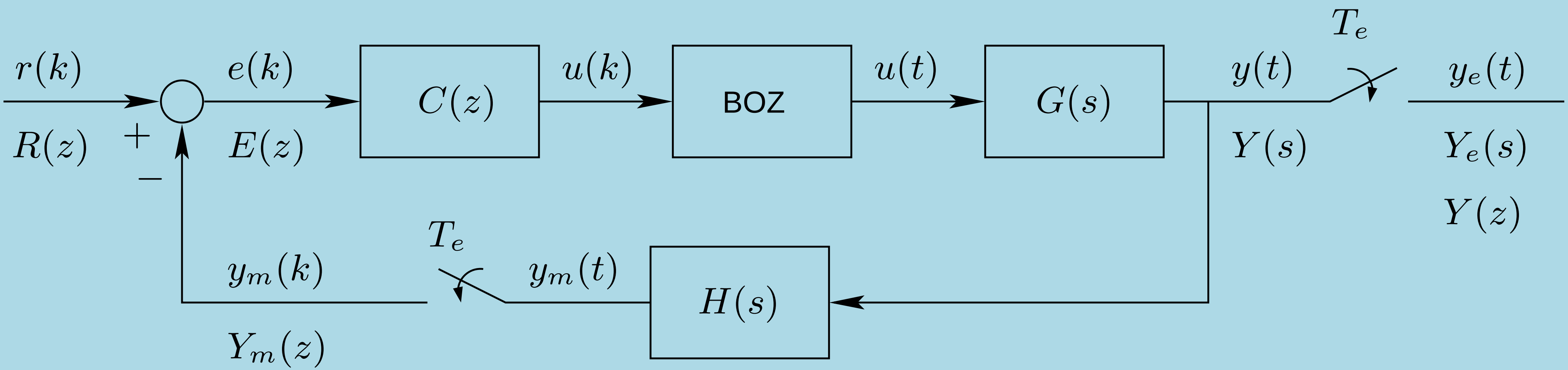
- Sans correcteur numérique :





$$\left.\begin{array}{l} Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}E(z) \\ Y_m(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)G_1(s)\}E(z) \\ E(z) = R(z) - Y_m(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{G_1(s)\}}{1 + \mathcal{Z}\{G_2(s)G_1(s)\}}$$

☞ Avec correcteur numérique :

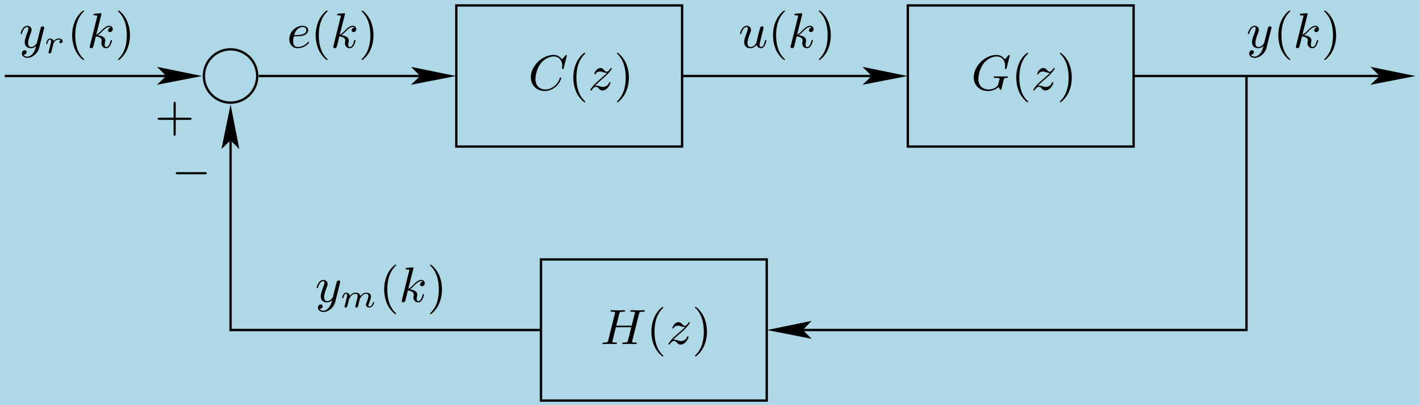


$$\left.\begin{aligned}
Y(z) &= \mathcal{Z}\{G(s)B_0(s)\}\,U(z) \\
Y_m(z) &= \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\}\,U(z) \\
U(z) &= C(z)\,E(z) \quad \text{et} \\
E(z) &= R(z) - Y_m(z)
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

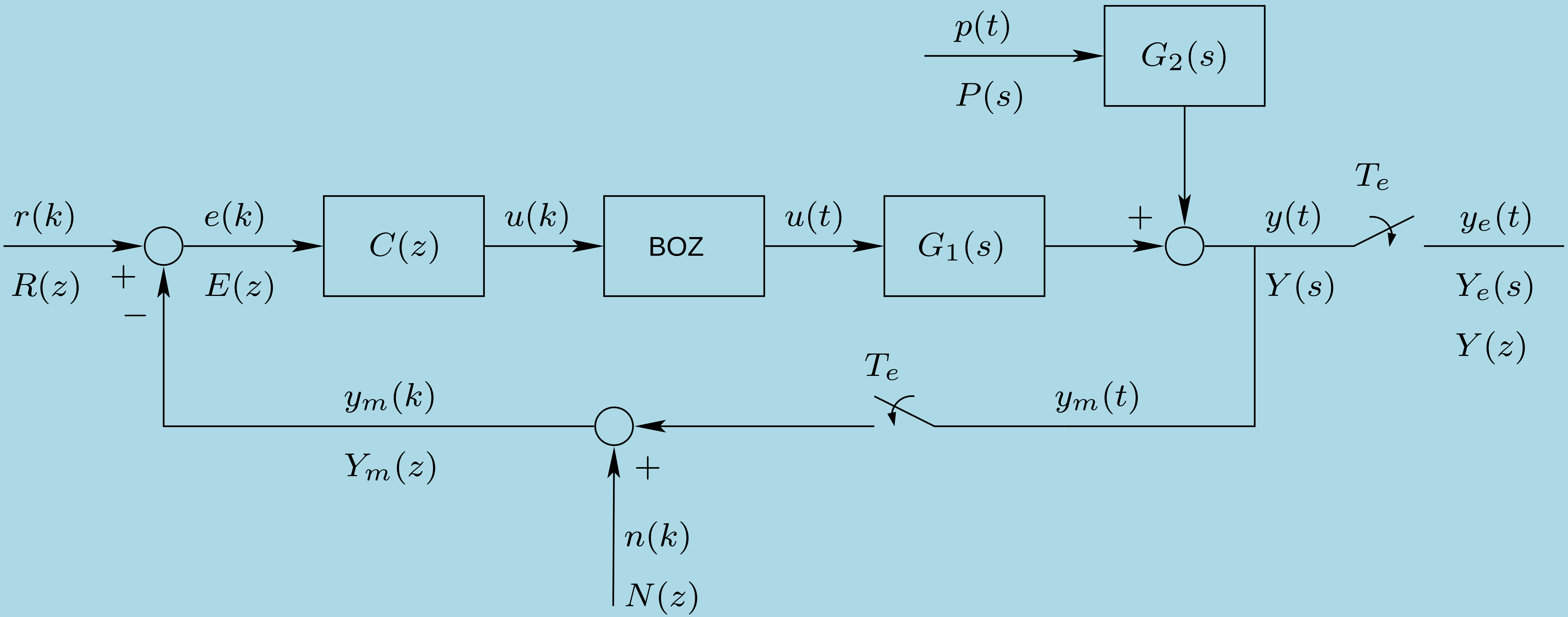
$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)\ \mathcal{Z}\{G(s)B_0(s)\}}{1 + C(z)\ \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\}}$$

$$= \frac{(1 - z^{-1})\ C(z)\ \mathcal{Z}\left\{\dfrac{G(s)}{s}\right\}}{1 + (1 - z^{-1})\ C(z)\ \mathcal{Z}\left\{\dfrac{H(s)G(s)}{s}\right\}}$$

➠ Exercice : calculer les transmittances $G(z)$ et $H(z)$ du schéma équivalent



5 – Systèmes bouclés en présence de perturbations



☞ 1*ère méthode* : utiliser l'algèbre des blocs

$$E(z) = R(z) - \big(N(z) + Y(z)\big)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)B_0(s)\}\, C(z)E(z) + \mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} Y(z) \quad &= \quad \frac{C(z)\,(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\{\frac{G_1(s)}{s}\}}{1 + C(z)\,(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\{\frac{G_1(s)}{s}\}}\big(R(z) - N(z)\big) \\ &\qquad + \frac{1}{1 + C(z)\,(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\{\frac{G_1(s)}{s}\}}\mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\} \end{aligned}}$$

☞ *2ème méthode* : utiliser le théorème de superposition des effets

- Entrée seule :

$$Y(z) = \frac{(1-z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}{1+(1-z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}R(z)$$

- Bruit seul :

$$Y(z) = -\frac{(1-z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}{1+(1-z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}N(z)$$

- Perturbation seule :

$$Y(z) = \frac{\mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\}}{1+(1-z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}$$