Commande numérique des systèmes

Transmittance des systèmes échantillonnés

Gabriela Iuliana Bara

Sommaire

Systèmes linéaires à temps discret

Propriétés des systèmes à temps discret

- Système linéaire : obéit au principe de superposition
- Système causal : $y(k_0 T_e) \nsim u(kT_e)$ avec $k > k_0$
- Système stationnaire (invariant) : un décalage temporel de l'impulsion unité appliquée à l'entrée provoque le même décalage temporel à la sortie

$\rightsquigarrow$ systèmes LTI à temps discret

Modèles des systèmes LTI à temps discret

Modèles externes

$$\underset{U(z)}{\overset{u(k)}{\longrightarrow}} \boxed{G(z)} \underset{Y(z)}{\overset{y(k)}{\longrightarrow}}$$

- Equation aux différences (éq. récurrente) :

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n)$$
$$= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m)$$

pour un système causal

Modèles externes

- Fonction de transfert du système à temps discret ou transmittance discrète ($\textsc{ci} \equiv 0$)

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}}$$

  - Relation biunivoque avec l'équation aux différences

$$\boxed{G(z) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}}$$

  - Pôles et zéros du système discret
  - Polynôme caractéristique
  - Gain statique

Remarques

- Fonction de transfert à temps discret est la transformée en z de la réponse impulsionnelle du système

  Si $u(k) = \delta(k)$ alors $U(z) = 1 \implies Y(z) = G(z)$

- Relation entre la sortie $y(k)$, l'entrée $u(k)$ et la réponse impulsionnelle $g(k)$

$$y(k) = (g \star u)(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)u(k-n) = \sum_{n=0}^{k} g(n)u(k-n)$$

Implémentation MATLAB

- Fonction de transfert : `tf(num,den,Te)`

Modèles internes des systèmes LTI à temps discret

Représentation d'état

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} x(k) \in \Re^n, & u(k) \in \Re \\ y(k) \in \Re, & k_0 \end{array}$$

- Solution de l'équation d'état

$$x(k) = A^{k-k_0} x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

- Fonction de transfert ($\mathrm{CI} \equiv 0$)

$$\boxed{G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D} \longleftarrow \text{ réprésentation “externe”}$$

- Matrice de transition d'état $\Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} x(k) \in \Re^n, & u(k) \in \Re \\ y(k) \in \Re, & k_0. \end{array}$$

- Réponse impulsionnelle

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = CA^{k-k_0-1}B\mathcal{U}(k-k_0) + D\delta(k-k_0)$$

- Equation caractéristique de A

$$\boxed{\det(zI - A) = 0}$$

De plus, $\boxed{Y(z) = C(zI - A)^{-1}zx(k_0) + G(z)U(z)}$

  - Les valeurs propres de A permettent de décrire la réponse naturelle ou libre du système
  - Les pôles de la fonction de transfert sont des valeurs propres de la matrice A (l'inverse n'est pas toujours vrai)

Non unicité de la représentation d'état

Soit T une matrice régulière[a] et $\bar{x} = Tx$ une nouvelle variable d'état, alors

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}) = \left(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D \right)$$

est une nouvelle représentation d'état du système ayant comme condition initiale $\bar{x}(t_0) = Tx(t_0)$

$\rightsquigarrow$ $G(z)$ est invariante par rapport à la transformation de similarité T

[a] non singulière

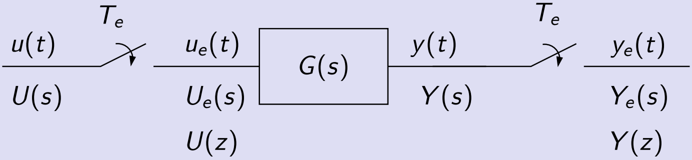
Implémentation MATLAB

- Modèle d'état : `ss(A,B,C,D,Te)`

Transmittance échantillonnée

Transmittance échantillonnée

Système à entrée et sortie échantillonnées



$$\begin{aligned} Y_e(s) &= \left(G(s)U_e(s)\right)_e = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right) \\ &= \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right) U_e\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right) \end{aligned}$$

Remarques

$$\Longrightarrow \quad Y_e(s) = G_e(s)\ U_e(s) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Y(z) = G(z)\ U(z)}$$

- Transmittance échantillonnée

$$\boxed{G(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}\{g(t)\} = \boxed{\mathcal{Z}\{G(s)\}}$$

- On a la relation suivante

$$\mathcal{Z}\{G(s)U_e(s)\} = G(z)U(z)$$

- Si l'échantillonneur d'entrée est absent alors

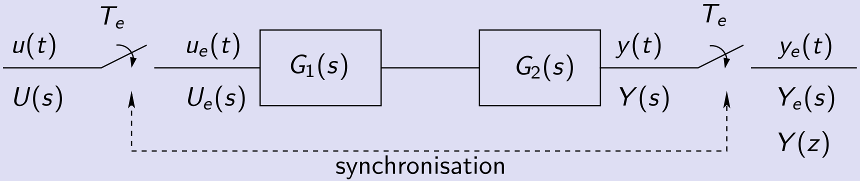
$$Y(z) = \boxed{\mathcal{Z}\{G(s)U(s)\} \neq G(z)U(z)}$$

Notation

$$\mathcal{Z}\{G(s)\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\} = \mathcal{Z}\{g(t)\} = \mathcal{Z}\{g(kT_e)\}$$

Transmittance échantillonnée des systèmes ouverts

Sous-systèmes en série



$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)U_e(s) \quad \text{et donc}$$

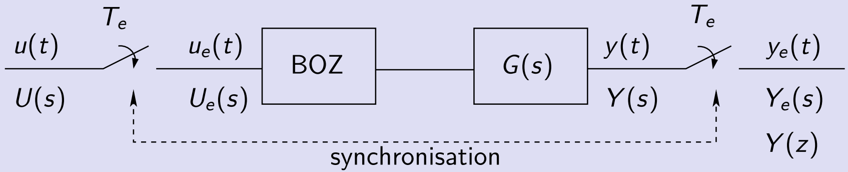
$$Y_e(s) = \left(G_1(s)G_2(s)U_e(s)\right)_e = \left(G_1(s)G_2(s)\right)_e U_e(s)$$

$$\Longrightarrow \boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}U(z)} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\}\}U(z)$$

Généralement

$$\boxed{\left(G_1(s)G_2(s)\right)_e \neq \left(G_1(s)\right)_e \left(G_2(s)\right)_e}$$

Echantillonnage d'un système continu précédé par un BOZ

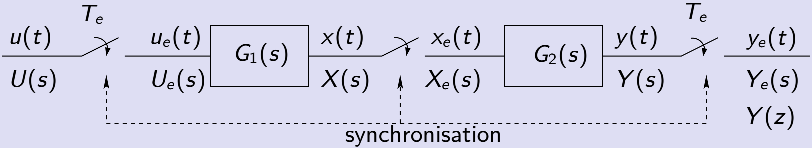


$$\frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$G(s) \longleftrightarrow G(z)$

En pratique, décomposition en éléments simples + exploitation des tables de transformées

Exemple



$$X_e(s) = (G_1(s)U_e(s))_e = (G_1(s))_e U_e(s) \Longrightarrow X(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}U(z)$$

Analogiquement, on a :

$$Y_e(s) = (G_2(s)X_e(s))_e = (G_2(s))_e X_e(s) \quad \Longrightarrow \quad Y(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)\}X(z)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\}\mathcal{Z}\{G_2(s)\}U(z)}$$

Echantillonnage dans l'éspace d'état

Discrétisation de la représentation d'état à temps continu

Soit le système continu définit par le quadruplet (A_c, B_c, C_c, D_c) et T_e la période d'échantillonnage, alors son équivalent discret est définit par le quadruplet (A_d, B_d, C_d, D_d) avec

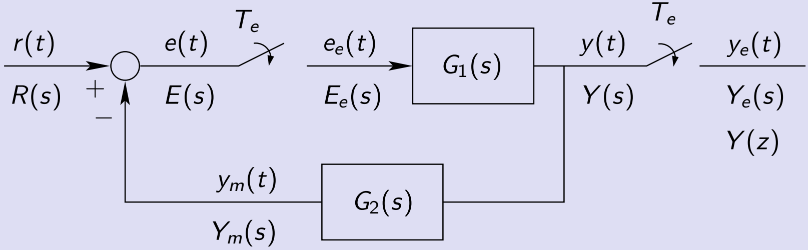
$$A_d = e^{A_c T_e}, \quad B_d = \int_0^{T_e} e^{A_c \tau} d\tau B_c, \quad C_d = C_c, \quad D_d = D_c$$

Implémentation MATLAB

- Discrétisation : `c2d(sys,Te,method)` avec `method = 'zoh'` si présence du BOZ

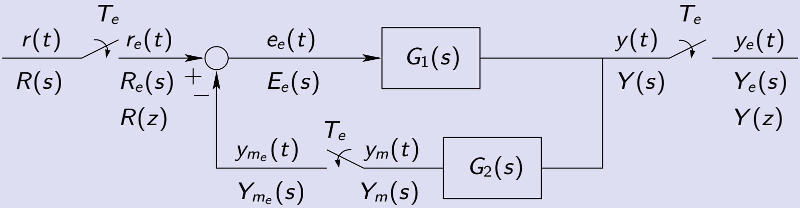
Transmittance échantillonnée des systèmes bouclés

1 Sans correcteur numérique



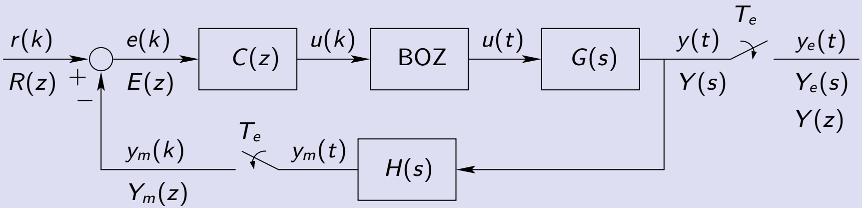
⇝ schéma équivalent en déplasant l'échantillonneur avant le comparateur

Sans correcteur numérique



$$\left.\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}\{G_1(s)\}E(z) \\ Y_m(z) &= \mathcal{Z}\{G_2(s)G_1(s)\}E(z) \\ E(z) &= R(z) - Y_m(z) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{G_1(s)\}}{1 + \mathcal{Z}\{G_2(s)G_1(s)\}}$$

2 Avec correcteur numérique



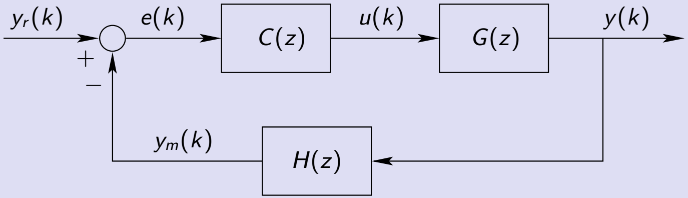
$$\left.\begin{array}{l} Y(z) = \mathcal{Z}\{G(s)B_0(s)\}\ U(z) \\ Y_m(z) = \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\}\ U(z) \\ U(z) = C(z)\ E(z) \quad \text{et} \\ E(z) = R(z) - Y_m(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Avec correcteur numérique

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{C(z)\ \mathcal{Z}\{G(s)B_0(s)\}}{1 + C(z)\ \mathcal{Z}\{H(s)G(s)B_0(s)\}}\\ &= \frac{(1-z^{-1})\ C(z)\ \mathcal{Z}\left\{\dfrac{G(s)}{s}\right\}}{1 + (1-z^{-1})\ C(z)\ \mathcal{Z}\left\{\dfrac{H(s)G(s)}{s}\right\}}\end{aligned}$$

Schéma équivalent à temps discret

Calculer les transmittances $G(z)$ et $H(z)$ du schéma équivalent

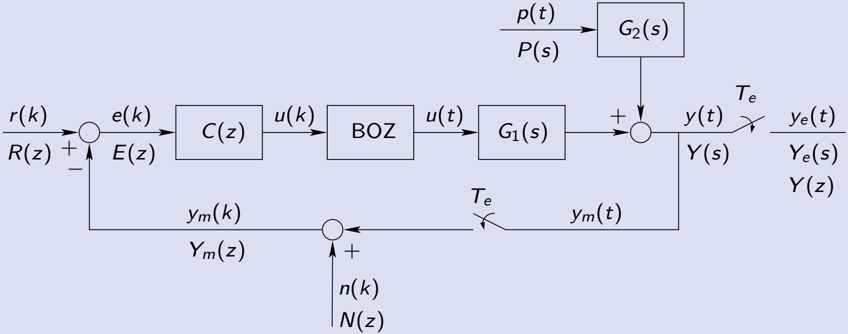


Remarque

L'analyse des systèmes bouclés comportant des parties numériques et analogiques s'effectue sur la base du schéma équivalent à temps discret !

Systèmes bouclés en présence de perturbations

Perturbations



Méthode #1 : algèbre des blocs

$$E(z) = R(z) - (N(z) + Y(z))$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)B_0(s)\}\ C(z)E(z) + \mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} Y(z) \quad = \quad & \frac{C(z)\ (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\{\frac{G_1(s)}{s}\}}{1 + C(z)\ (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\{\frac{G_1(s)}{s}\}}(R(z) - N(z)) \\ & + \frac{1}{1 + C(z)\ (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\{\frac{G_1(s)}{s}\}}\mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\} \end{aligned}}$$

Méthode #2 : théorème de superposition des effets

- Entrée seule :

$$Y(z) = \frac{(1 - z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}{1 + (1 - z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}R(z)$$

- Bruit seul :

$$Y(z) = -\frac{(1 - z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}{1 + (1 - z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}N(z)$$

- Perturbation seule :

$$Y(z) = \frac{\mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\}}{1 + (1 - z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}}$$