Commande numérique des systèmes

Transformée en $\mathcal{Z}$

1 – Définition 41
2 – Propriétés 43
3 – Correspondance entre les plans en s et en z 47
4 – Transformée en z inverse 50
5 – Application à la résolution des équations aux différences 57

1 – Définition

☞ La *transformée en* z d'un signal causal à temps discret $f(k)$ est définie par :

$$\boxed{F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}}$$

☞ Cas échantillonné : par le changement de variable $z = e^{sT_e}$ dans $\mathcal{L}\{f_e(t)\}$

➠ Notation

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \mathcal{Z}\{f(kT_e)\} = \mathcal{Z}\{f_e(t)\} = \mathcal{Z}\{f(t)\}$$

☞ Exemple :

Soit $f(k) = e^{-akT_e}\,\mathbb{U}(k)$ alors

$$
\begin{aligned}
F(z) &= 1 + e^{-aT_e}\,z^{-1} + \left(e^{-aT_e}\,z^{-1}\right)^2 + \ldots \\
&= \frac{1}{1 - e^{-aT_e}\,z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}
\end{aligned}
$$

si $|z| > R_0 = e^{-aT_e}$ avec R_0 *rayon de convergence*

2 – Propriétés

☞ Linéarité :

$$\mathcal{Z}\{\alpha f(k) + \beta g(k)\} = \alpha F(z) + \beta G(z),\ \forall \alpha, \beta \in \Re$$

☞ Changement d'échelle :

$$\mathcal{Z}\{\alpha^k f(k)\} = F\left(\frac{z}{\alpha}\right),\ \forall \alpha \in \Re$$

☞ Avance :

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^n F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\, z^{n-k},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

☞ Retard :

➠ Cas des signaux causaux :

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n}F(z),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

➠ Cas des signaux non causaux :

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\mathbb{U}(k)\} = z^{-n}F(z) + z^{-(n-1)}f(-1) + \ldots$$
$$+ z^{-1}f(-n+1) + f(-n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

☞ Multiplication par une rampe :

$$\mathcal{Z}\{kf(k)\} = -z\,\frac{dF(z)}{dz}$$

☞ Multiplication par une exponentielle :

$$\mathcal{Z}\{e^{-ak}f(k)\} = F(ze^{a})$$

☞ Convolution discrète :

$$\mathcal{Z}\{(f \star g)(k)\} = F(z)G(z)$$

☞ Théorème de la valeur initiale :

$$f(0) = \lim_{k \longrightarrow 0} f(k) = \lim_{z \longrightarrow +\infty} F(z)$$

☞ Théorème de la valeur finale :

$$f(\infty) = \lim_{k \longrightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \longrightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z).$$

la valeur finale existe si les pôles de $(z-1)F(z)$ sont tous à l'intérieur du cercle unité

3 – Correspondance entre les plans en s et en z

☞ Correspondance basée sur le changement de variable $z = e^{T_e s}$

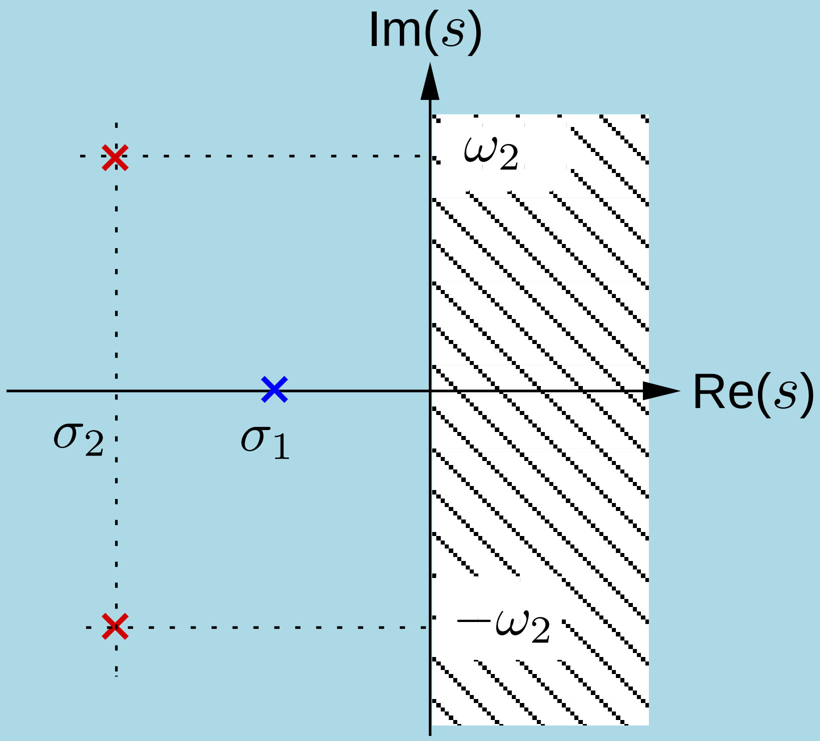
➠ Pôle de $F(s)$ réel $\sigma_1 \Longrightarrow$ pôle réel σ_1 en échantilonné $\Longrightarrow$ pôle en z réel $e^{\sigma_1 T_e}$

➠ Pôles en s complexes conjugués $\sigma_2 \pm j\omega_2$

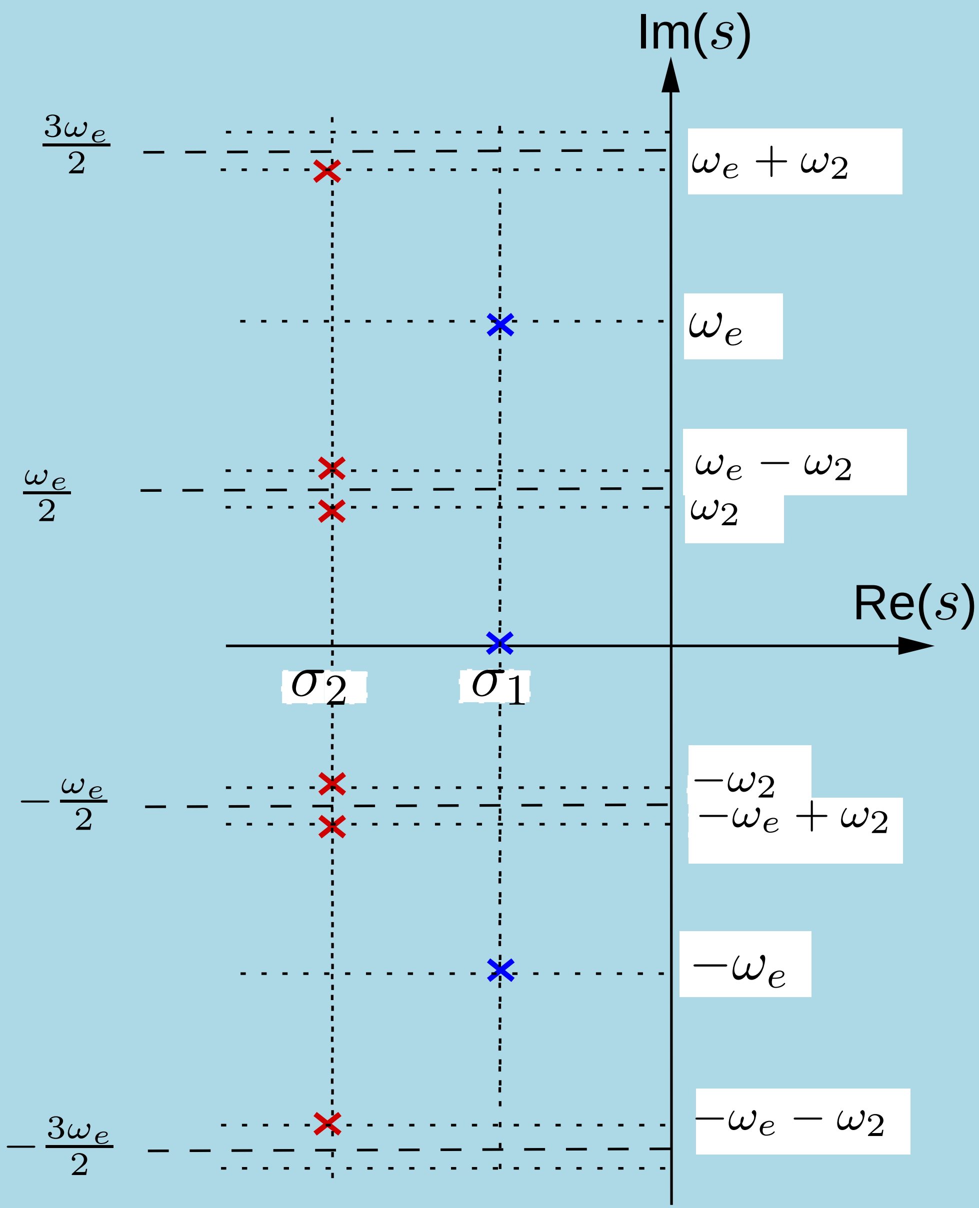
$\Longrightarrow$ pôles $\sigma_2 + j(\omega_2 + k\omega_e)$ en échantilonné

$\Longrightarrow$ pôles en z complexes conjugués $e^{\sigma_2 T_e}\ e^{\pm j\omega_2 T_e}$

Échantillonnage d'un signal

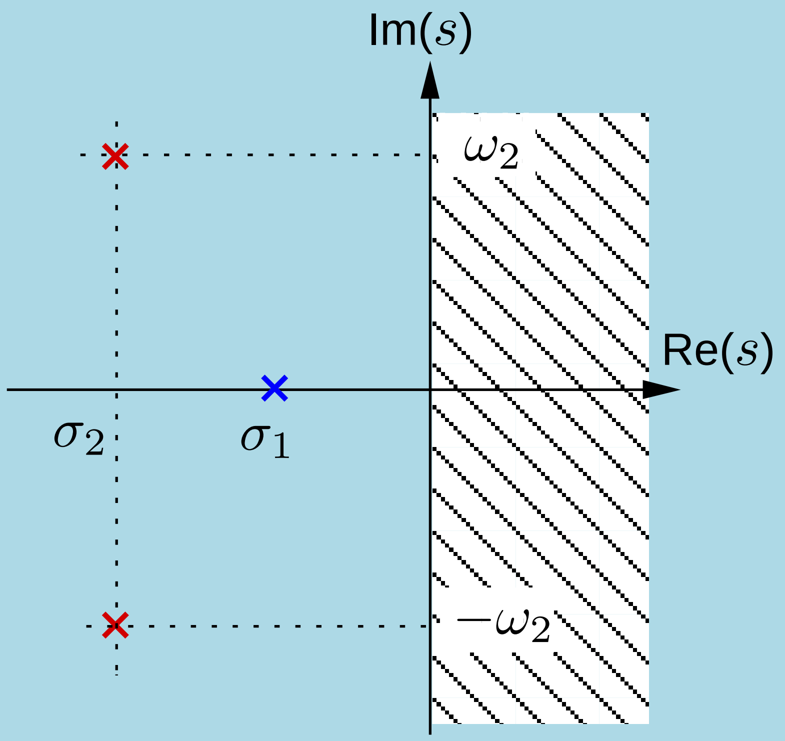


temps continu

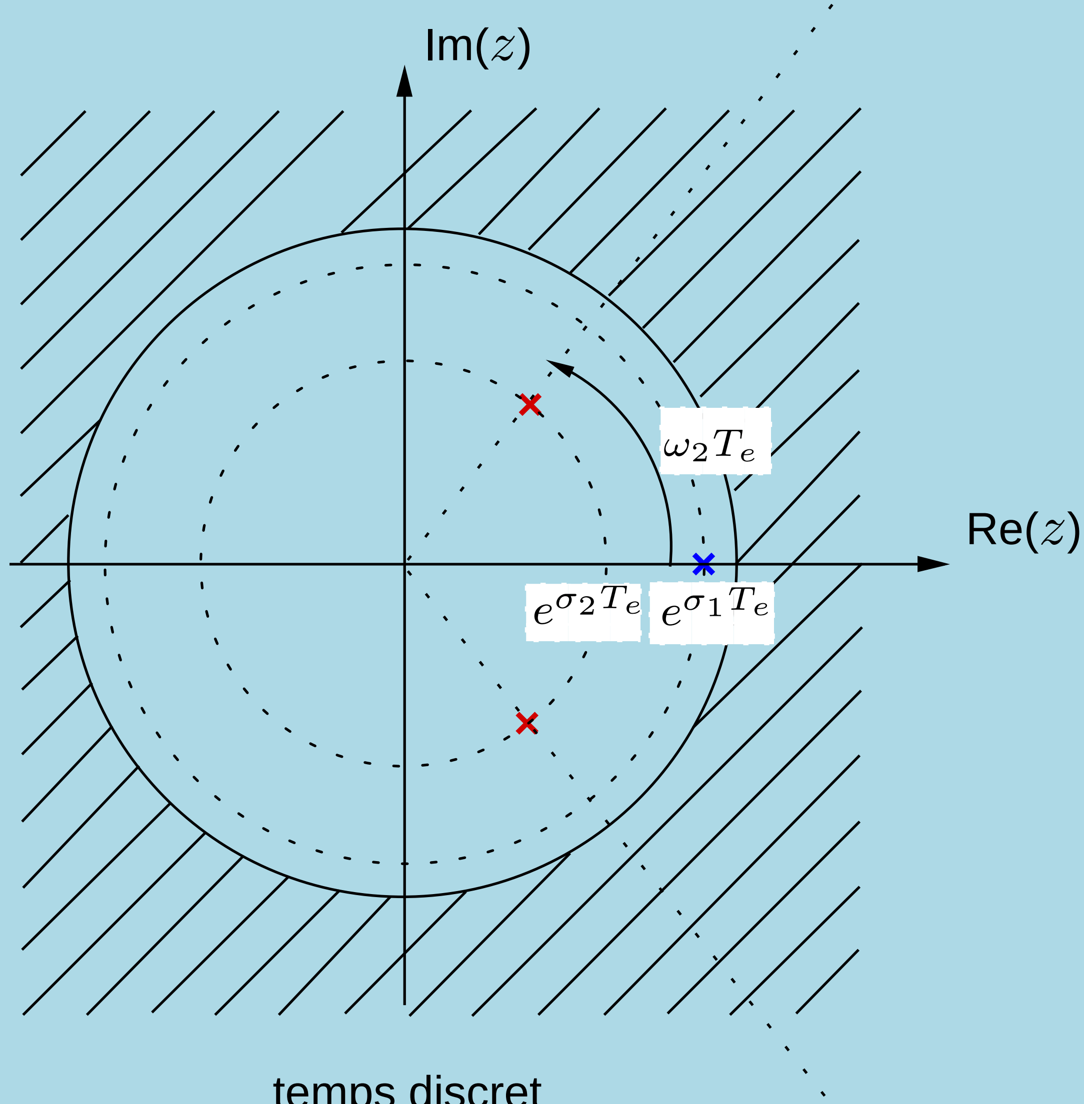


échantillonnage idéal

Échantillonnage d'un signal



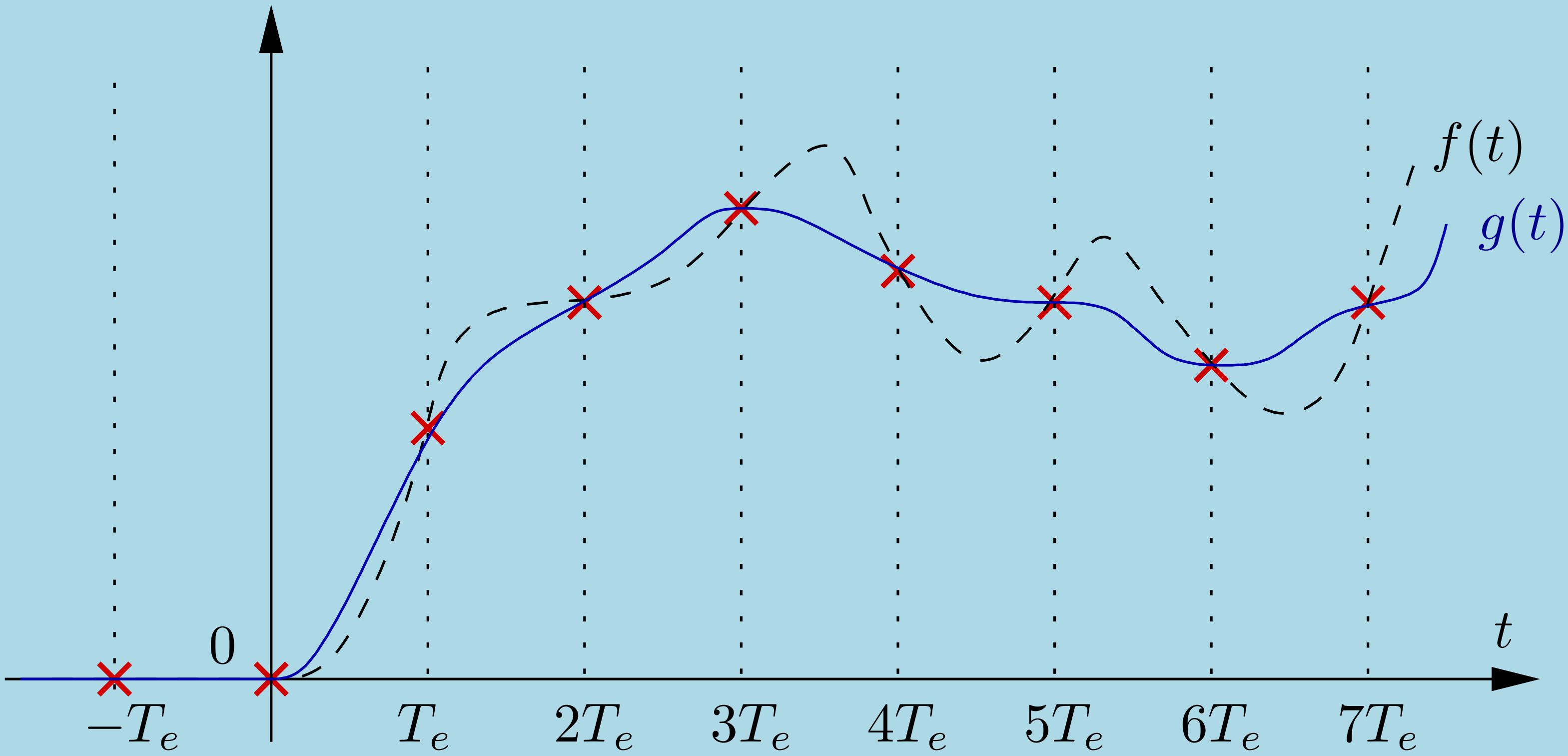
temps continu



temps discret

4 – Transformée en z inverse

☞ $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$ permet de retrouver $f(kT_e)$ mais pas $f(t)$



☞ Décomposition en éléments simples

➠ Décomposition en éléments simples de $\dfrac{F(z)}{z}$

Si $F(z)$ a uniquement des pôles p_i simples réels différents de zéro alors

$$F(z) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{z}{z - p_i}$$

et donc

$$f(k) = \delta(k) + \sum_{i=1}^{n} A_i p_i^k \, \mathbb{U}(k)$$

➠ Exemple : soit $F(z) = \dfrac{z}{z^2+a}$ avec $a > 0$ alors

$$F(z) = \frac{\alpha z}{z-p} + \frac{\bar{\alpha} z}{z-\bar{p}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{j\sqrt{a}}{2a} \text{ et } p = j\sqrt{a}$$

$$\begin{aligned}
\text{alors } f(k) &= \frac{j\sqrt{a}}{2a}\left((j\sqrt{a})^k - (-j\sqrt{a})^k\right) \\
&= \frac{j(\sqrt{a})^{k+1}}{2a}\left(e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right) \\
&= -(\sqrt{a})^{k-1}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Dans le domaine temporel : signal oscillatoire réel amorti ou pas en fonction de $|p| = \sqrt{a}$

☞ Division polynomiale

→ Ecrire $F(z)$ sous la forme :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$$

→ Division de $N(z)$ par $D(z)$ selon les puissances croissantes de z^{-1} :

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots$$

☞ Formule d'inversion :

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} F(z)z^{k-1}dz, \;\; k \geq 0$$

où Γ = domaine du plan complexe $\supset$ toutes les singularités (pôles) de $F(z)$ (usuellement Γ = cercle centré à l'origine et à l'intérieur de la région de convergence de $F(z)$)

➠ Théorème des résidus :

$$f(k) = \sum_i R_i \text{ avec } R_i \text{ les résidus de } F(z)z^{k-1} \text{ aux singularités } \supset \Gamma$$

→ Pôle simple p_i

$$R_i = \lim_{z \to p_i} [(z - p_i)F(z)z^{k-1}]$$

→ Pôle multiple p_i de multiplicité m_i

$$R_i = \lim_{z \to p_i} [\frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{m_i - 1}}{dz^{m_i - 1}} \left((z - p_i)^{m_i} F(z) z^{k-1}\right)]$$

➠ Exemple : soit $F(z) = \dfrac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z-2)(z-1)^2}$ alors

→ Singularités de $F(z)z^{k-1}$ sont $p_1 = 2$ et $p_2 = 1$ avec $m_2 = 2$

→ Γ = cercle centré à l'origine et de rayon > 2

→ Résidus :

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{z \to 2}[\frac{z^2 - 2z + 2}{(z-1)^2} z^k] = 2^{k+1} \\ R_2 &= \lim_{z \to 1}[\frac{d}{dz}(\frac{z^2 - 2z + 2}{(z-2)} z^k)] = 1 - k \end{aligned}$$

Donc, $f(k) = (2^{k+1} + 1 - k)\,\mathbb{U}(k)$

5 – Application à la résolution des équations aux différences

☞ *Equation aux différences* :

$$a_0 f(k) + a_1 f(k+1) + \dots + a_n f(k+n) =$$
$$b_0 g(k) + b_1 g(k+1) + \dots + b_m g(k+m) \text{ avec } m \leq n$$

☞ D'après les propriétés de la transformée en z et en applique la transformée en z à l'équation aux différences :

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n} G(z) + \frac{P_n(z)}{a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n}.$$

En utilisant la transformée en z inverse $\Longrightarrow f(k)$

☞ Exemple : soit l'équation aux différences

$$f(k+2) + 2f(k+1) + f(k) = 0,8g(k+1) + 0,4g(k) \text{ pour } k \geq 0$$

où :

$$\begin{aligned} f(k) \text{ et } g(k) \text{ causaux,} \\ g(0) = 1, \ g(1) = 0,5, \\ g(2) = -0,5 \text{ et } g(k) &= 0, \text{pour } k \geqslant 3 \end{aligned}$$

➠ En utilisant la réccurence

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 0,8, \\ f(2) &= -0,8, \\ f(k) &= 0,6(-1)^{k+1}, \text{pour } k \geqslant 3. \end{aligned}$$

- En utilisant la transformée en z sur

$$f(k) + 2f(k-1) + f(k-2) = 0,8g(k-1) + 0,4g(k-2) \text{ pour } k \geq 2.$$

et sachant que $G(z) = 1 + 0,5z^{-1} - 0.5z^{-2}$, on obtient

$$F(z) = \frac{0,2(4z^2-1)}{z^2(z+1)} = 0,2\left(3 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{3z}{z+1}\right)$$

et donc

$$f(k) = 0,6\delta(k) + 0,2\delta(k-1) - 0,2\delta(k-2) - 0,6(-1)^k\mathbb{U}(k)$$