Commande numérique des systèmes

Transformée en z

Gabriela Iuliana BARA

Sommaire

Définition de la transformée en z

Définition

La *transformée en z* d'un signal causal à temps discret $f(k)$ est définie par :

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

Dans le cas échantillonné

Dans la première formulation de $\mathcal{L}\{f_e(t)\}$, si on effectue le *changement de variable* $z = e^{sT_e}$ alors

$$\mathcal{L}\{f_e(t)\} = \mathcal{Z}\{f(kT_e)\}$$

$\rightsquigarrow$ Notation

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \mathcal{Z}\{f(kT_e)\} = \mathcal{Z}\{f_e(t)\} = \mathcal{Z}\{f(t)\}$$

Exemple

Soit $f(k) = e^{-akT_e}\ \mathbb{U}(k)$ alors

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + e^{-aT_e}\ z^{-1} + \left(e^{-aT_e}\ z^{-1}\right)^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT_e}\ z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}} \end{aligned}$$

si $|z| > R_0 = e^{-aT_e}$ avec R_0 *rayon de convergence*

Propriétés de la transformée en z

Propriétés

- Linéarité :

$$\mathcal{Z}\{\alpha f(k) + \beta g(k)\} = \alpha F(z) + \beta G(z), \ \forall \alpha, \beta \in \Re$$

- Changement d'échelle :

$$\mathcal{Z}\{\alpha^k f(k)\} = F\left(\frac{z}{\alpha}\right), \ \forall \alpha \in \Re$$

- Avance :

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^n F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\, z^{n-k}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Propriétés

- Retard :
  - Cas des signaux causaux :

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n}F(z), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

  - Cas des signaux non causaux :

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\mathbb{U}(k)\} = z^{-n}F(z) + z^{-(n-1)}f(-1) + \dots \\ + z^{-1}f(-n+1) + f(-n), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- Multiplication par une exponentielle :

$$\mathcal{Z}\{e^{-ak}f(k)\} = F(ze^{a})$$

- Convolution discrète :

$$\mathcal{Z}\{(f \star g)(k)\} = F(z)G(z)$$

Propriétés

- Multiplication par une rampe :

$$\mathcal{Z}\{kf(k)\} = -z\,\frac{dF(z)}{dz}$$

- Théorème de la valeur initiale :

$$f(0) = \lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to +\infty} F(z)$$

- Théorème de la valeur finale :

$$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z).$$

Remarque: la valeur finale existe si les pôles de $(z-1)F(z)$ sont tous à l'intérieur du cercle unité

Correspondance entre les plans en s et en z

$s \longleftrightarrow z$

Correspondance basée sur le changement de variable $z = e^{T_e s}$

continu	$\longleftrightarrow$	échantillonné idéal	$\longleftrightarrow$	discret
$f(t)$	$\longleftrightarrow$	$f_e(t)$	$\longleftrightarrow$	$f(kT_e)$
$F(s)$	$\longleftrightarrow$	$F_e(s)$	$\longleftrightarrow$	$F(z)$
plan s	$\longleftrightarrow$	plan s	$\longleftrightarrow$	plan z

- Pôle de $F(s)$ réel σ_1

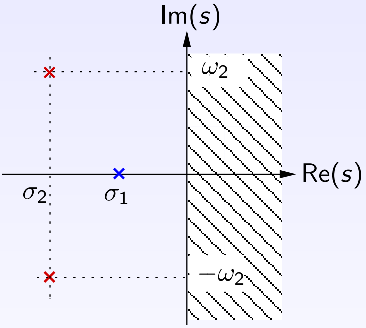
  $\Longrightarrow$ pôle réel σ_1 en échantilonné

  $\Longrightarrow$ pôle en z réel $e^{\sigma_1 T_e}$

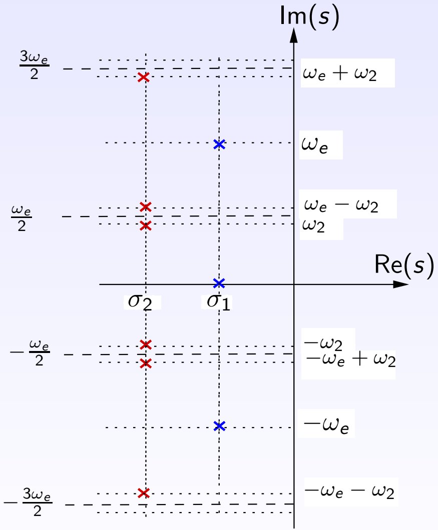
- Pôles en s complexes conjugués $\sigma_2 \pm j\omega_2$

  $\Longrightarrow$ pôles $\sigma_2 + j(\omega_2 + k\omega_e)$ en échantilonné

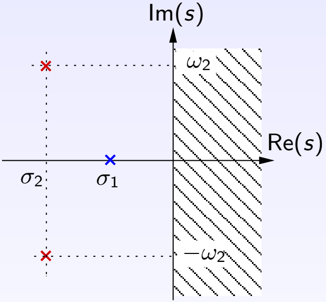
  $\Longrightarrow$ pôles en z complexes conjugués $e^{\sigma_2 T_e} \; e^{\pm j\omega_2 T_e}$



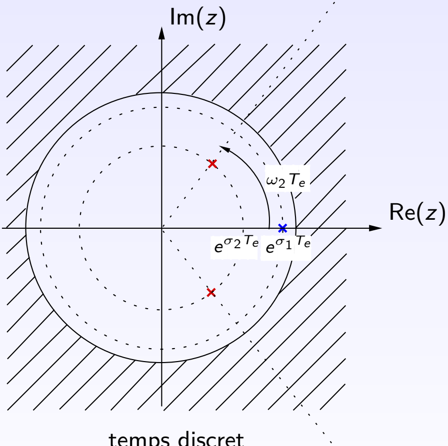
temps continu



échantillonnage idéal



temps continu

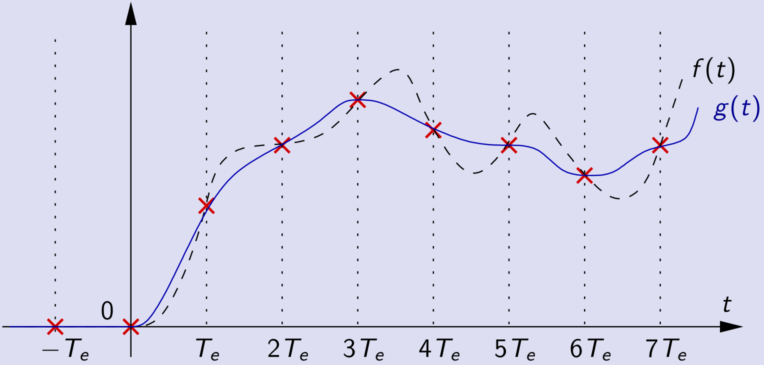


temps discret

Transformée en z inverse

Remarque

$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$ permet de retrouver $f(kT_e)$ mais pas $f(t)$



Calcul de $\mathcal{Z}^{-1}$

Méthode #1 : décomposition en éléments simples

Décomposition en éléments simples de $\boxed{\dfrac{F(z)}{z}}$

Si $F(z)$ a uniquement des pôles p_i simples réels différents de zéro alors

$$F(z) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{z}{z - p_i}$$

et donc

$$f(k) = \delta(k) + \sum_{i=1}^{n} A_i p_i^k \, \mathbb{U}(k)$$

Exemple – méthode #1

Soit $F(z) = \dfrac{z}{z^2 + a}$ avec $a > 0$ alors

$$F(z) = \frac{\alpha z}{z - p} + \frac{\bar{\alpha} z}{z - \bar{p}} \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{j\sqrt{a}}{2a} \text{ et } p = j\sqrt{a}$$

$$\begin{aligned} \text{alors } f(k) &= -\frac{j\sqrt{a}}{2a}((j\sqrt{a})^k - (-j\sqrt{a})^k) \\ &= -\frac{j(\sqrt{a})^{k+1}}{2a}(e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}) \\ &= (\sqrt{a})^{k-1}\sin(\frac{\pi k}{2}) \end{aligned}$$

$\leadsto$ Dans le domaine temporel : signal oscillatoire réel amorti ou pas en fonction de $|p| = \sqrt{a}$

Méthode #2 : division polynomiale

- Ecrire $F(z)$ sous la forme :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$$

- Division de $N(z)$ par $D(z)$ selon les puissances croissantes de z^{-1} :

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots$$

Exemple – méthode #2

Soit $F(z) = \dfrac{z}{z^2 + a} = \dfrac{z^{-1}}{1 + az^{-2}}$ avec $a > 0$

$$
\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
z^{-1} & & & & & & & 1 & + & az^{-2} & & & & \\
\cline{8-14}
z^{-1} & + & az^{-3} & & & & & z^{-1} & - & az^{-3} & + & a^2z^{-5} & & \\
\cline{1-4}
 & - & az^{-3} & & & & & - & a^3z^{-7} & & \ldots & & & \\
 & - & az^{-3} & - & a^2z^{-5} & & & & & & & & & \\
\cline{2-6}
 & & & & a^2z^{-5} & & & & & & & & & \\
 & & & & a^2z^{-5} & + & a^3z^{-7} & & & & & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & - & a^3z^{-7} & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\rightsquigarrow f(k) &= 0 \text{ pour } k = 4n \text{ et } k = 4n+2 \\
&= a^{2n} \text{ pour } k = 4n+1 \\
&= -a^{2n+1} \text{ pour } k = 4n+3
\end{aligned}
$$

Méthode #3

Formule d'inversion :

$$\boxed{f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma F(z)z^{k-1}dz} \quad k \geq 0$$

où Γ = domaine du plan complexe $\supset$ toutes les singularités (pôles) de $F(z)$ (usuellement Γ = cercle centré à l'origine et à l'intérieur de la région de convergence de $F(z)$)

- Théorème des résidus :

$$f(k) = \sum_i R_i \text{ avec } R_i \text{ les résidus de } F(z)z^{k-1} \text{ aux singularités } \supset \Gamma$$

- Théorème des résidus :

$$f(k) = \sum_i R_i \text{ avec } R_i \text{ les résidus de } F(z)z^{k-1} \text{ aux singularités } \supset \Gamma$$

  - Pôle simple p_i

$$R_i = \lim_{z \to p_i} [(z - p_i)F(z)z^{k-1}]$$

  - Pôle multiple p_i de multiplicité m_i

$$R_i = \lim_{z \to p_i} [\frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{m_i - 1}}{dz^{m_i - 1}}((z - p_i)^{m_i} F(z)z^{k-1})]$$

Exemple – méthode #3

Soit $F(z) = \dfrac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z-2)(z-1)^2}$ alors

- Singularités de $F(z)z^{k-1}$ sont $p_1 = 2$ et $p_2 = 1$ avec $m_2 = 2$
- $\Gamma =$ cercle centré à l'origine et de rayon > 2
- Résidus :

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{z\to 2}[\frac{z^2 - 2z + 2}{(z-1)^2} z^k] = 2^{k+1} \\ R_2 &= \lim_{z\to 1}[\frac{d}{dz}(\frac{z^2 - 2z + 2}{(z-2)} z^k)] = 1 - k \end{aligned}$$

Donc, $f(k) = (2^{k+1} + 1 - k)\ \mathbb{U}(k)$

Application à la résolution des équations aux différences

- *Equation aux différences* :

$$a_0 f(k) + a_1 f(k+1) + \cdots + a_n f(k+n) = b_0 g(k) + b_1 g(k+1) + \cdots + b_m g(k+m) \text{ avec } m \leq n$$

- D'après les propriétés de la transformée en z et en applique la transformée en z à l'équation aux différences :

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n}\, G(z) + \frac{P_n(z)}{a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n}.$$

- En utilisant la transformée en z inverse $\Longrightarrow f(k)$

Exemple

Soit l'équation aux différences

$$f(k+2)+2f(k+1)+f(k)=0,8g(k+1)+0,4g(k) \text{ pour } k\geq 0$$

où :

$$\begin{aligned} f(k) \;\text{ et }\; g(k) \;\text{ causaux,} \\ g(0)=1, \;\; g(1)=0,5, \\ g(2)=-0,5 \;\text{ et }\; g(k) \;=\; 0, \text{pour } \; k\geqslant 3 \end{aligned}$$

- En utilisant la réccurence

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 0,8, \\ f(2) &= -0,8, \\ f(k) &= 0,6(-1)^{k+1}, \text{pour } \; k\geqslant 3. \end{aligned}$$

- En utilisant la transformée en z sur

$$f(k)+2f(k-1)+f(k-2)=0,8g(k-1)+0,4g(k-2) \text{ pour } k \geq 2$$

et sachant que $G(z)=1+0,5z^{-1}-0.5z^{-2}$, on obtient

$$F(z)=\frac{0,2(4z^2-1)}{z^2(z+1)}=0,2\left(3+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{3z}{z+1}\right)$$

et donc

$$f(k)=0,6\delta(k)+0,2\delta(k-1)-0,2\delta(k-2)-0,6(-1)^k\mathbb{U}(k)$$