

Commande numérique des systèmes

Echantillonnage d'un signal

1 – Terminologie	20
2 – Échantillonnage idéal	22
3 – Transformée de Laplace d'un signal échantillonné	26
4 – Spectre du signal échantillonné	27
5 – Théorème de Shannon	32
6 – Reconstruction du signal	34
7 – Exemple	38

1 – Terminologie

➡ Signal analogique :

$$f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{fonction à temps continu}$$

➡ Signal discret : signal définie en des points distincts

$$f(t) : \{t_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{fonction à temps discret}$$

avec $\{t_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sous-ensemble de nombres réels

➡ Signal numérique : signal discret prenant un nombre fini N de valeurs réelles

$$f(t) : \{t_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \{f_1, f_2 \dots f_N\} \subset \mathbb{R} \quad \text{fonction à temps et à}$$

amplitude discrets

- ☞ Découpage temporel de l'information \implies CAN
 - ▣ $Echantillonnage$ = consiste à prélever, à période fixe T_e , la valeur du signal analogique \implies signal discret (suite d'échantillons)
 - ▣ $Quantification$ = résulte du fait que les données sont représentées sur un ordinateur dans un certain format
“discrétisation” de l'amplitude du signal discret \implies signal numérique (suite de nombres)
 - Erreur associée à la quantification = *bruit de quantification*
- CAN remplace un signal analogique par signal numérique (suite des nombres)
- ☞ $Reconstruction$ = consiste à élaborer un signal analogique à partir d'une suite de nombres \implies CNA

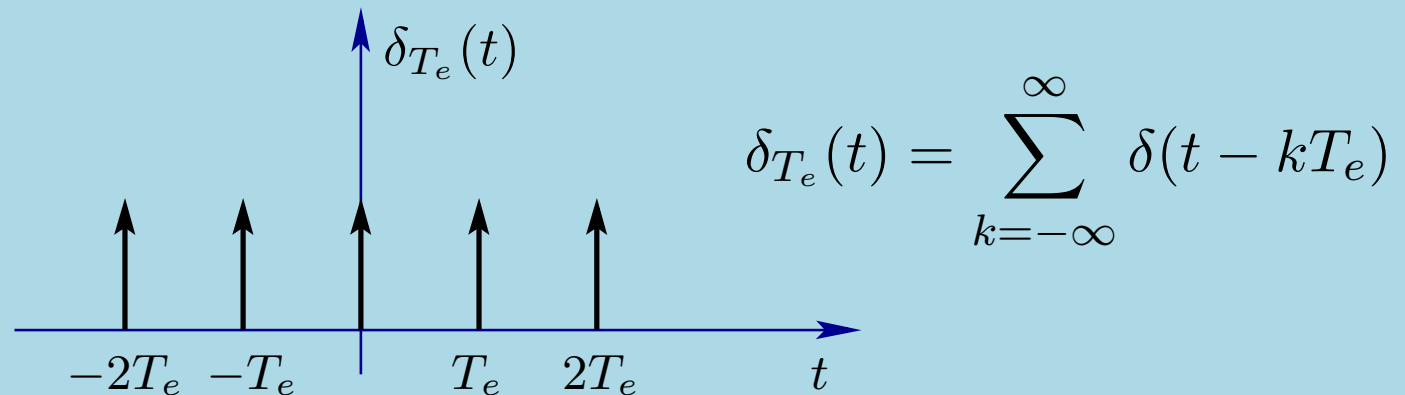
2 – Échantillonnage idéal

➡ Définition :

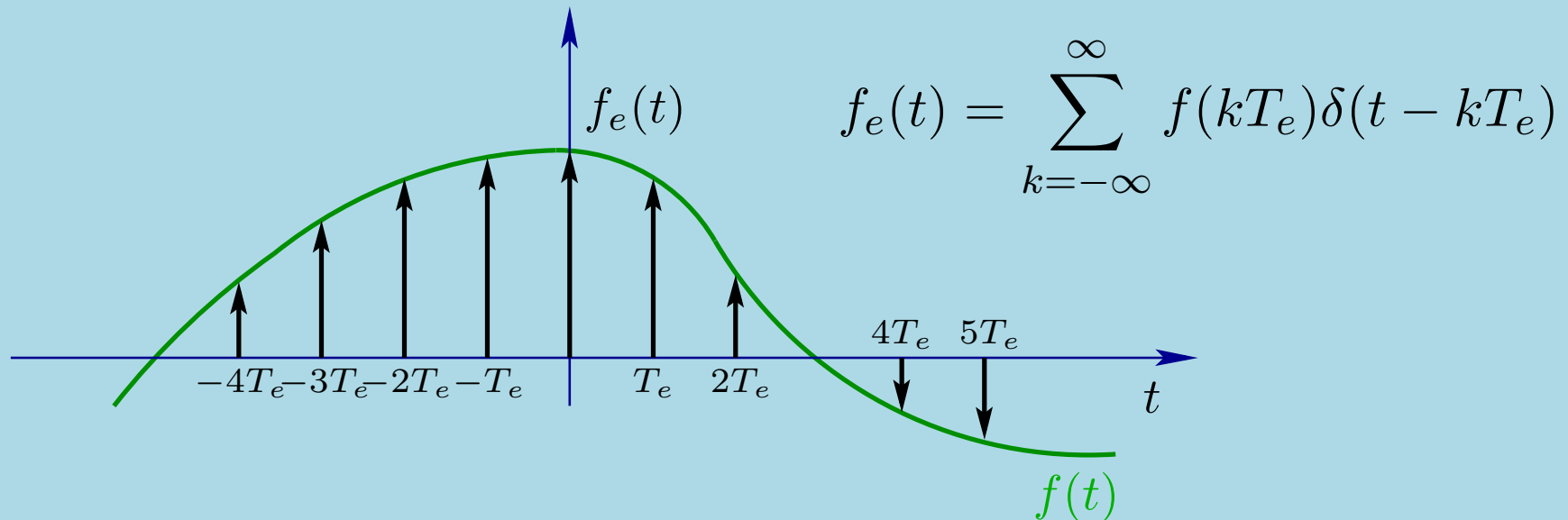
L'échantillonneur idéal de période T_e est un opérateur mathématique qui associe à tout signal à temps continu $f(t)$ un signal $f_e(t)$ définie par

$$f_e(t) = f(t)\delta_{T_e}(t) \quad (1)$$

où $\delta_{T_e}(t)$ est la fonction peigne (d'impulsions) de Dirac.

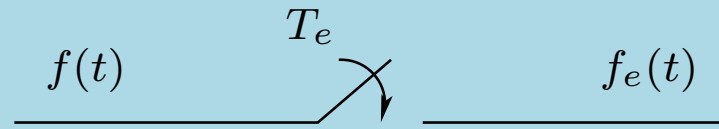


👉 Exemple :



- ➡ $f_e(t)$ = signal à temps continu appelé *signal échantillonné idéal*
- ➡ $f_e(t)$ est une fonction peigne de Dirac modulée en amplitude par la fonction $f(t)$

👉 Symbole de l'échantillonneur :



👉 Echantillonnage :

▣➡ Le prélèvement de la valeur du signal continu aux instants $t = kT_e$

▣➡ Supposons négligeable l'effet de la quantification

⇒ On définit le signal échantillonné par la suite en k : $\{f(k)\} = \{f(kT_e)\}$

 Remarque :

- ▣ $f_e(t)$ est un signal échantillonné idéal (train d'impulsions) = signal virtuel permettant d'inclure l'analyse des signaux échantillonnés dans l'analyse des signaux continus
- ▣ $f(kT_e)$ le signal échantillonné (signal discret ou numérique)

3 – Transformée de Laplace d'un signal échantillonné

➡ Première formulation :

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s} \quad (2)$$

➡ Deuxième formulation :

➡ Décomposition en série de Fourier de $\delta_{T_e}(t)$

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi kt}{T_e}} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta_{T_e}(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{T_e}} dt = \frac{1}{T_e}$$

Alors,

$$F_e(s) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\right) \quad (3)$$

4 – Spectre du signal échantillonné

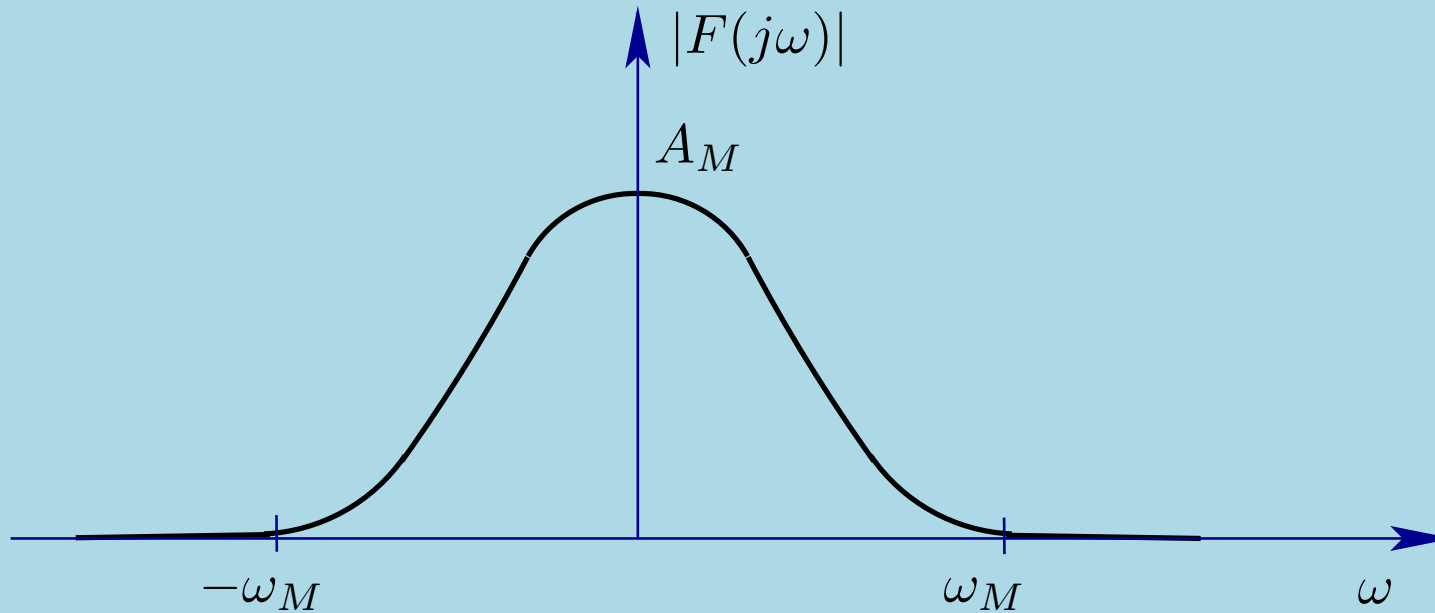
☞ Transformée de Fourier du signal échantillonné :

$$F_e(j\omega) = \mathcal{F}\{f_e(t)\} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T_e}\right)$$

▣ ➡ *Spectre* du signal échantillonné = module de la transformée de Fourier du signal
 $|F_e(j\omega)| \implies$ informations sur les composantes harmoniques présentes dans le signal échantillonné

→ spectre périodique de période $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$ appelé *pulsation d'échantillonnage*

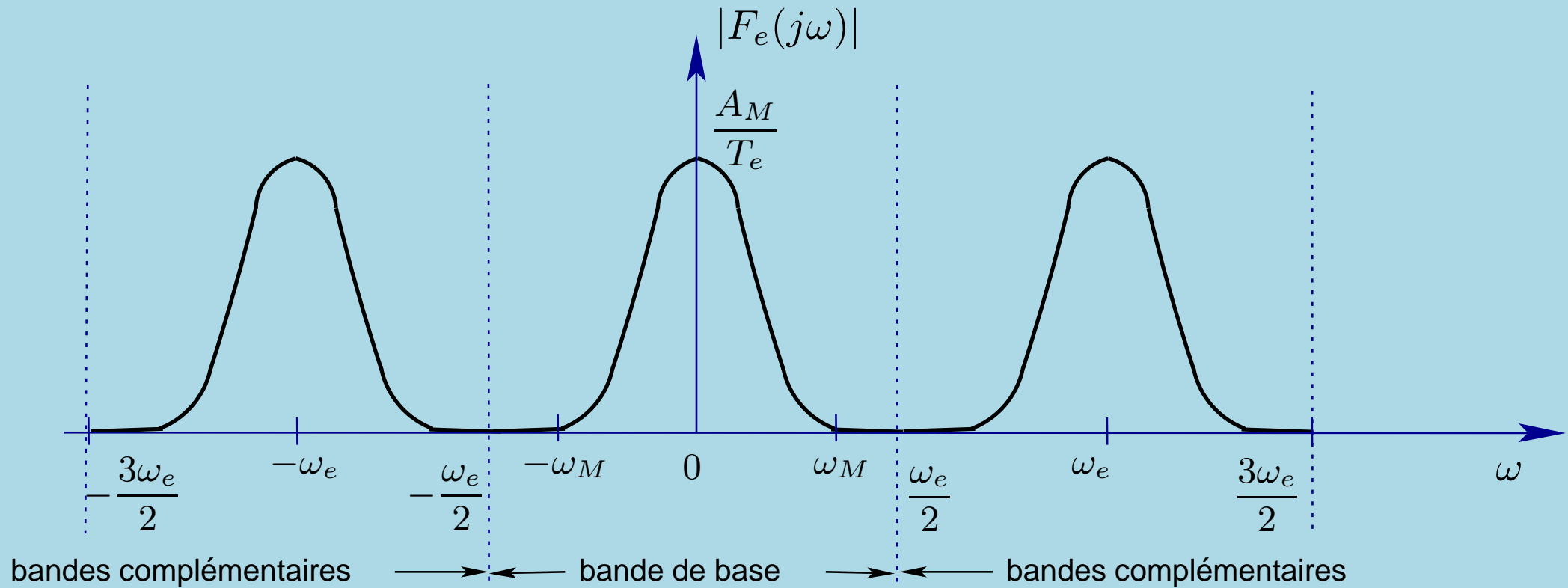
➡ Spectre du signal à temps continu



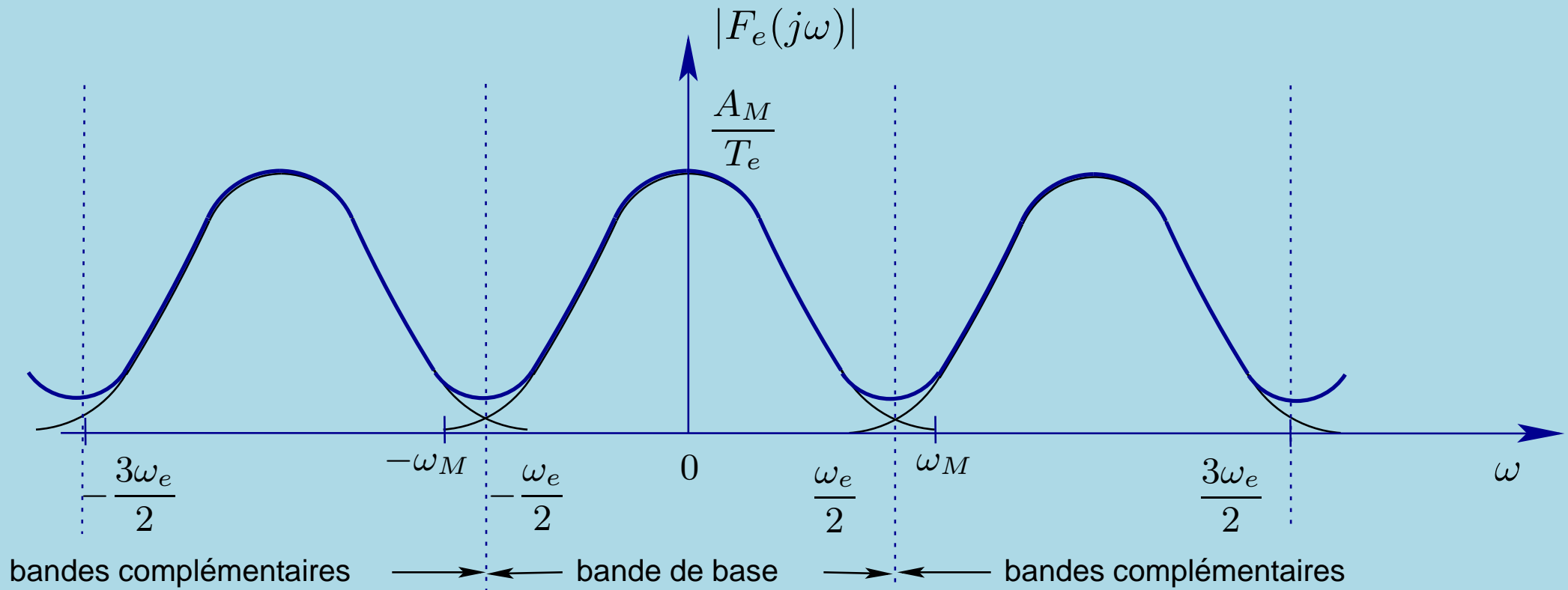
→ spectre du signal échantillonné est obtenu à partir du spectre du signal à temps continu

⇒ 2 cas en fonction de ω_M et de $\frac{\omega_e}{2}$ appelé *pulsation de Nyquist*

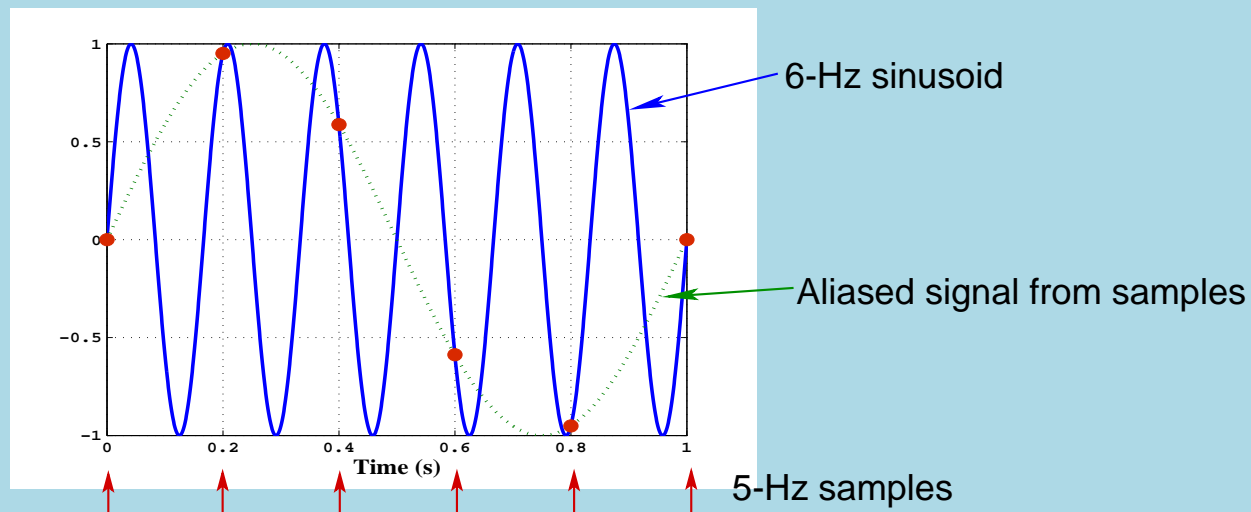
👉 Spectre du signal échantillonné lorsque $\omega_M \leq \frac{\omega_e}{2}$



👉 Spectre du signal échantillonné lorsque $\omega_M > \frac{\omega_e}{2}$



➡ Phénomène de repliement spectral : exemple



5 – Théorème de Shannon

👉 Théorème de Shannon :

Pour pouvoir reconstituer sans perte d'information un signal continu à partir des échantillons de période T_e de celui-ci, il faut que la fréquence d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T_e}$, soit au moins égale au double de la fréquence maximale contenue dans le spectre de ce signal :

$$f_e \geq 2f_M \quad \text{où} \quad f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}$$

Problème :

Pour les systèmes échantillonnés, le bruit de mesure à haute fréquence peut être replié à basse fréquence dans le voisinage de la bande passante de système \implies réponse du système au bruit de mesure

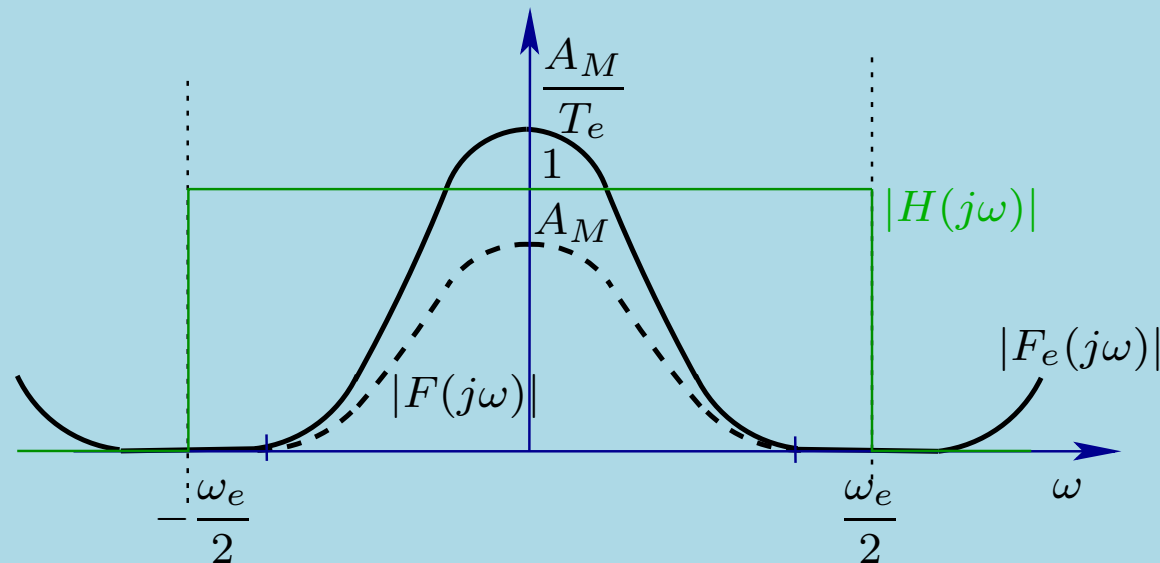
Solution : filtre anti-repliement

Si le signal comporte des composantes spectrales à des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist alors il faut filtrer le signal analogique avant l'échantillonnage

6 – Reconstruction du signal

➔ Reconstruction idéale

➔ Utilisation d'un filtre passe-bas idéal de réponse harmonique $H(j\omega)$



$$F(j\omega) = T_e F_e(j\omega) H(j\omega)$$

$$\implies f(t) = T_e \mathcal{F}^{-1}\{F_e(j\omega)H(j\omega)\} = T_e(f_e * h)(t)$$

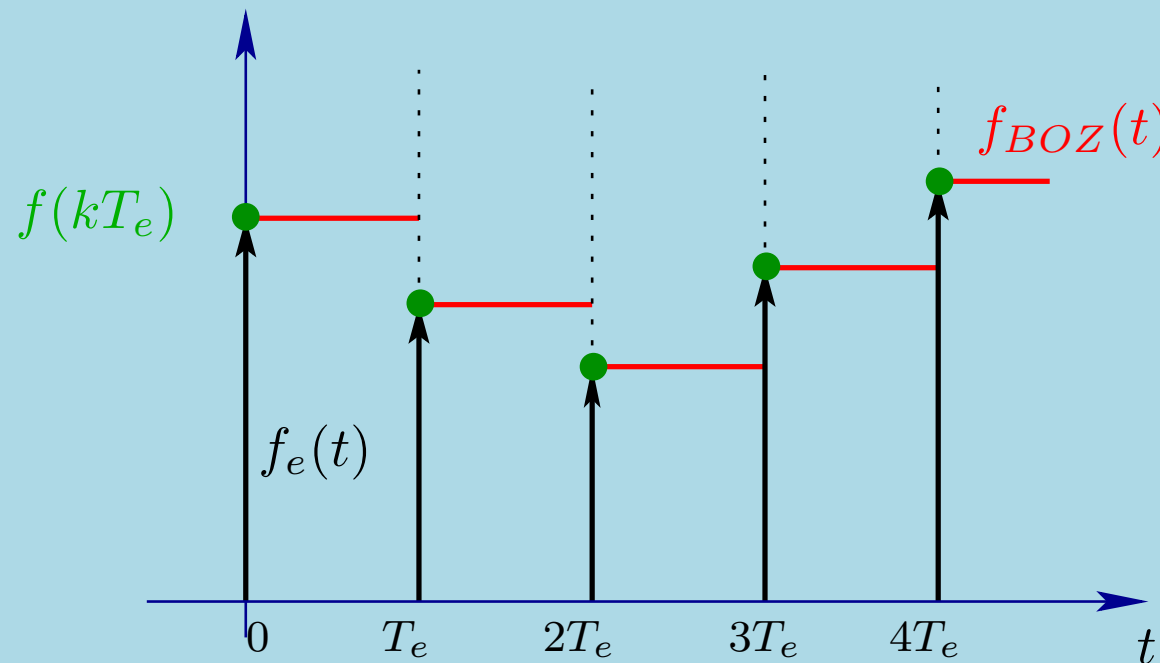
avec $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{T_e}\right)$ la réponse impulsionnelle du filtre

➡ Signal reconstruit :
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) \operatorname{sinc} \frac{t - kT_e}{T_e}$$

☞ Reconstruction approchée

☛ Utilisation du *bloqueur d'ordre zéro* (BOZ)

$$f_{BOZ}(t) = f(kT_e) \quad \text{pour } t \in [kT_e, (k+1)T_e)$$

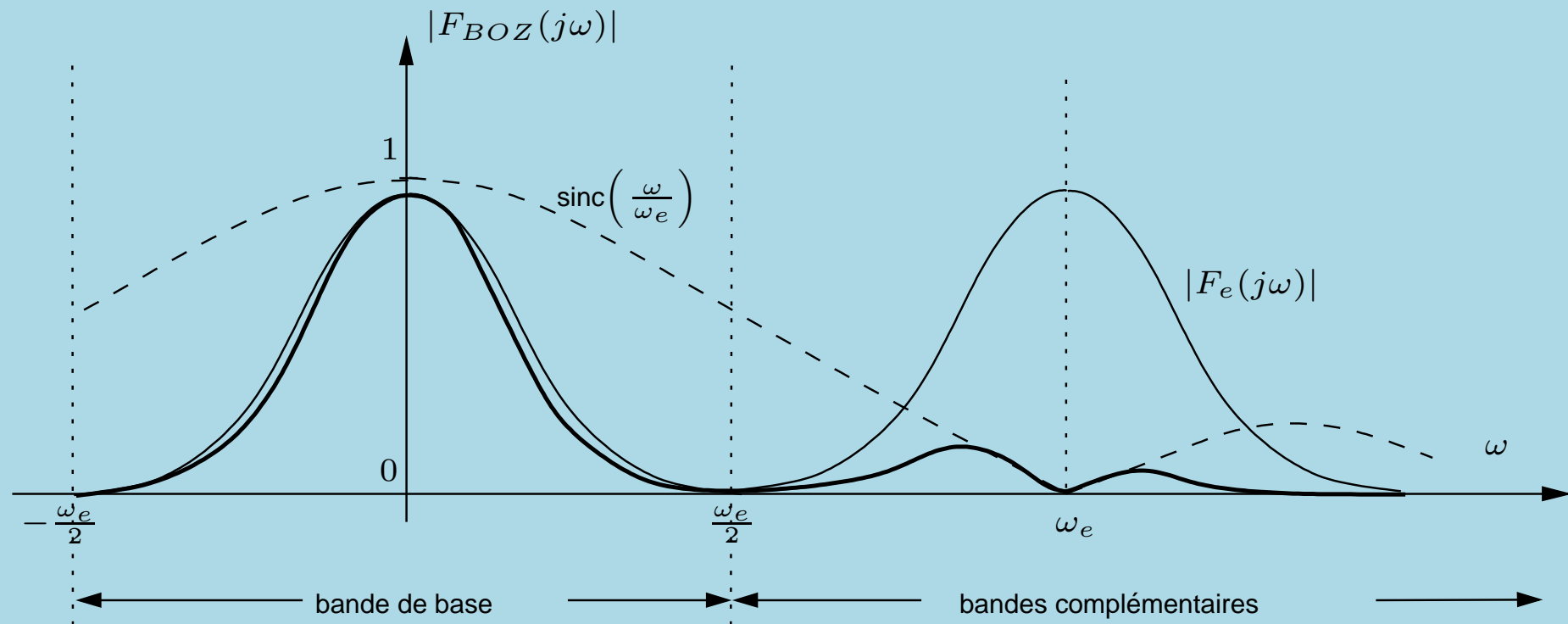


$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s}$$

$$B_0(j\omega) = e^{-j\omega \frac{T_e}{2}} \frac{2 \sin \omega \frac{T_e}{2}}{\omega}$$

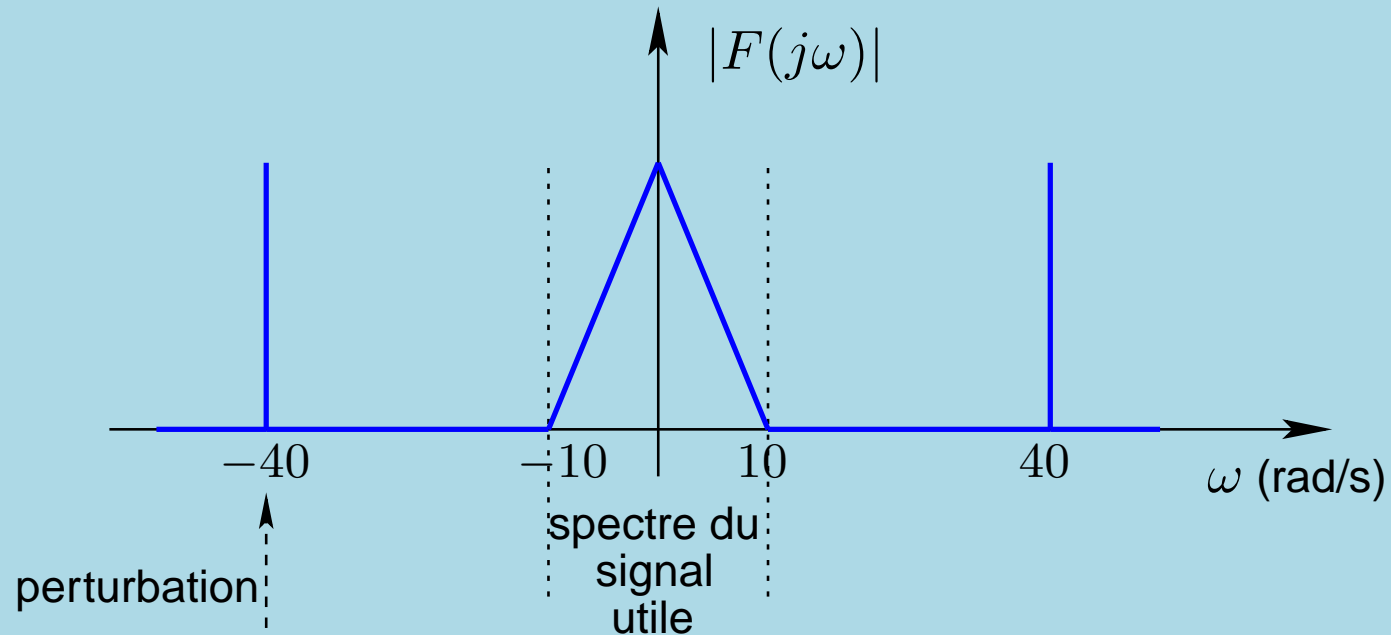
➡ Effet du bloqueur dans la bande de base :

$$F_{BOZ}(j\omega) = B_0(j\omega)F_e(j\omega) = \underbrace{e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}_{\text{déphasage}} \underbrace{\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)}_{\text{déformation}} F(j\omega)$$



7 – Exemple

Soit un signal analogique $f(t)$ de spectre :



- ➡ Proposer une pulsation de coupure pour un filtre anti-repliement
- ➡ Proposer une pulsation d'échantillonnage