Commande numérique des systèmes

Echantillonnage d'un signal

Gabriela Iuliana BARA

Sommaire

1. Terminologie
2. Échantillonnage idéal
3. Transformée de Laplace d'un signal échantillonné
4. Spectre du signal échantillonné
5. Théorème de Shannon
6. Reconstruction du signal
7. Exercices

Terminologie

Signal analogique

$f(t) : R \longrightarrow R$ est une fonction du temps, continue par morceaux*

Signal discret

signal définie en des points distincts $\{t_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sous-ensemble de nombres réels

$$f(t) : \boxed{\{t_k \mid k \in \mathbb{Z}\}} \longrightarrow R \quad \text{fonction à temps discret}$$

Signal numérique

signal discret prenant un nombre fini N de valeurs réelles

$$f(t) : \{t_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \boxed{\{f_1,\ f_2 \ldots f_N\}} \subset R \quad \text{fonction à temps et à}$$

amplitude discrets

* espace de Lebesgue à temps continu des fonctions de carré integrable

Interface analogique-numérique

CAN

Découpage temporel de l'information

- *Echantillonnage* = consiste à prélever, à période fixe T_e, la valeur du signal analogique $\Longrightarrow$ signal discret (suite d'échantillons)

- *Quantification* = résulte du fait que les données sont représentées sur un calculateur dans un certain format

  "discrétisation" de l'amplitude du signal discret $\Longrightarrow$ signal numérique (suite de nombres)

  - Erreur associée à la quantification = *bruit de quantification*

$\rightsquigarrow$ CAN remplace un signal analogique par signal numérique (suite des nombres)

CNA

- *Reconstruction* = consiste à élaborer un signal analogique à partir d'une suite de nombres

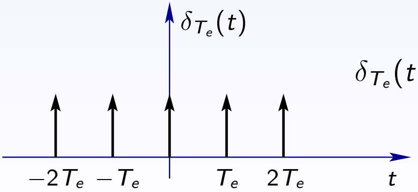
Échantillonnage idéal

Définition

L'*échantillonneur idéal* de période T_e est un opérateur mathématique qui associe à tout signal à temps continu $f(t)$ un signal $f_e(t)$ définie par

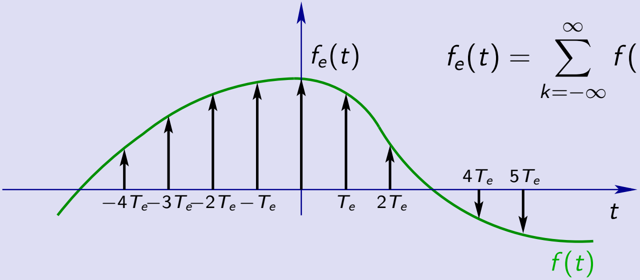
$$f_e(t) = f(t)\delta_{T_e}(t)$$

où $\delta_{T_e}(t)$ est la fonction peigne (d'impulsions) de Dirac.



$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

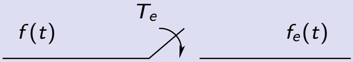
Exemple



$$f_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

- $f_e(t)$ = signal à temps continu appelé *signal échantillonné idéal*
- $f_e(t)$ est une fonction peigne de Dirac modulée en amplitude par la fonction $f(t)$

Symbole de l'échantillonneur



Echantillonnage

- Le prélèvement de la valeur du signal continu aux instants $t = kT_e$
- Supposons négligeable l'effet de la quantification

  $\rightsquigarrow$ On définit le signal échantillonné par la suite en k :

$$\{f(k)\} = \{f(kT_e)\}$$

Remarque

- $f_e(t)$ est un signal échantillonné idéal (train d'impulsions) $=$ signal virtuel permettant d'inclure l'analyse des signaux échantillonnés dans l'analyse des signaux continus
- $f(kT_e)$ est le signal échantillonné (signal discret ou numérique)

Transformée de Laplace d'un signal échantillonné

Première formulation

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)e^{-kT_e s} \qquad (1)$$

Deuxième formulation

- Décomposition en série de Fourrier de $\delta_{T_e}(t)$

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi kt}{T_e}} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta_{T_e}(t)e^{-j\frac{2\pi kt}{T_e}}dt = \frac{1}{T_e}$$

Alors, $$F_e(s) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s - j\frac{2\pi k}{T_e}) \qquad (2)$$

Spectre du signal échantillonné

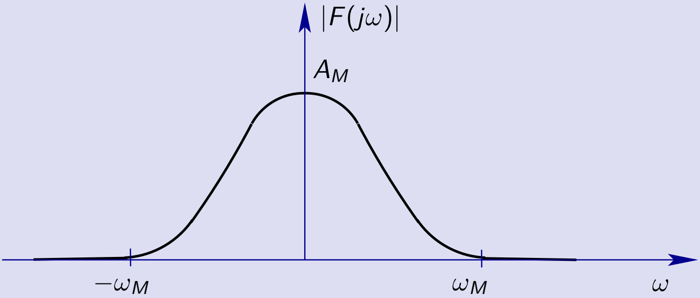
- Transformée de Fourier du signal échantillonné :

$$F_e(j\omega) = \mathcal{F}\{f_e(t)\} = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T_e}\right)$$

  - *Spectre* du signal échantillonné = module de la transformée de Fourier du signal $|F_e(j\omega)| \Longrightarrow$ informations sur les composantes harmoniques présentes dans le signal échantillonné

$\rightsquigarrow$ spectre périodique de période $\boxed{\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}}$ appelée *pulsation d'échantillonnage*

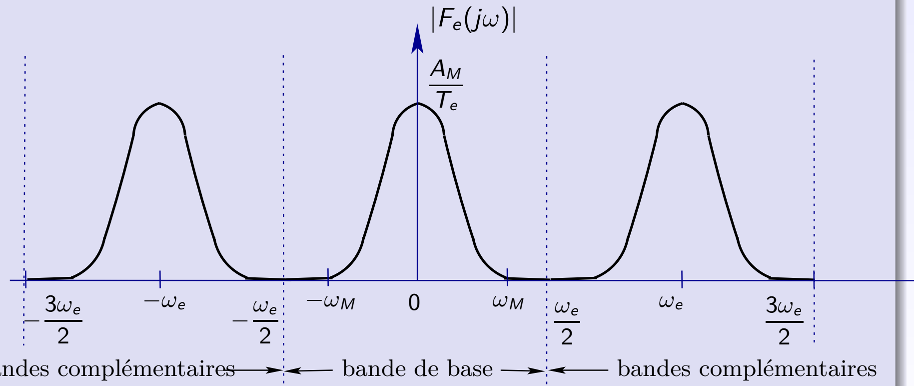
Spectre du signal à temps continu



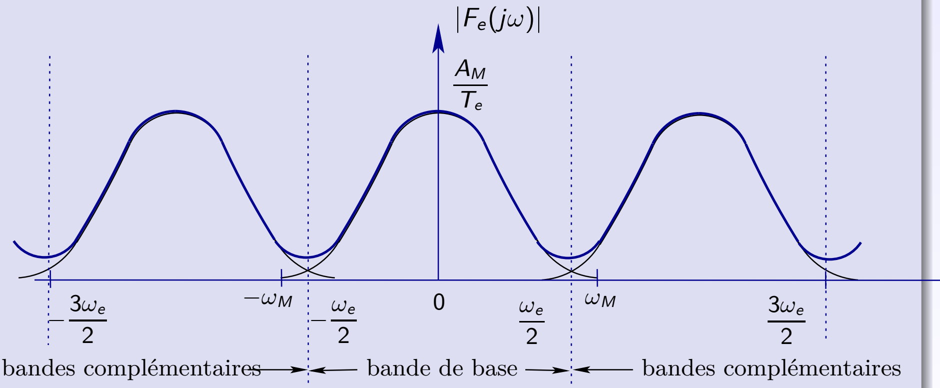
- spectre du signal échantillonné est obtenu à partir du spectre du signal à temps continu

$\Longrightarrow$ 2 cas en fonction de ω_M et de $\boxed{\dfrac{\omega_e}{2}}$ appelée *pulsation de Nyquist*

Spectre du signal échantillonné lorsque $\omega_M \leq \dfrac{\omega_e}{2}$

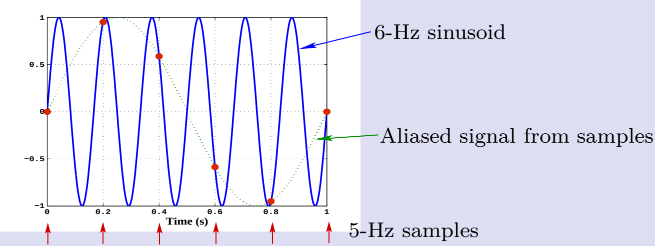


Spectre du signal échantillonné lorsque $\omega_M > \dfrac{\omega_e}{2}$



Phénomène de repliement spectral

Example



"samples" = échantillons, "aliased signal" = signal replié

Théorème de Shannon

Théorème de Shannon

Pour pouvoir reconstituer sans perte d'information un signal continu à partir des échantillons de période T_e de celui-ci, il faut que la fréquence d'échantillonnage, $f_e = \dfrac{1}{T_e}$, soit au moins égale au double de la fréquence maximale contenue dans le spectre de ce signal :

$$\boxed{f_e \geq 2f_M \quad \text{où} \quad f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}}$$

Problème

Pour les systèmes échantillonnés, le bruit de mesure à haute fréquence peut être replié en basse fréquence dans le voisinage de la bande passante de système $\Longrightarrow$ réponse du système au bruit de mesure

Solution

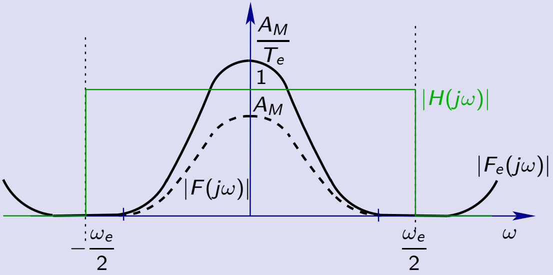
Filtre anti-repliement

Si le signal comporte des composantes spectrales à des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist alors il faut filtrer le signal analogique avant l'échantillonnage

Reconstruction du signal

Reconstruction idéale

Utilisation d'un filtre passe-bas idéal de réponse harmonique $H(j\omega)$



$$F(j\omega) = T_e F_e(j\omega) H(j\omega)$$

$$\Longrightarrow f(t) = T_e \mathcal{F}^{-1}\{F_e(j\omega)H(j\omega)\} = T_e(f_e * h)(t)$$

avec $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \dfrac{1}{\pi t}\sin(\dfrac{\pi t}{T_e})$ la réponse impulsionnelle du filtre

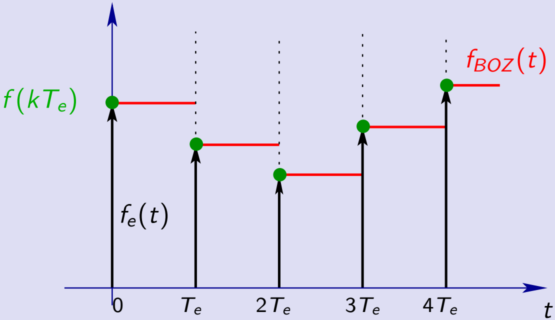
- Signal reconstruit :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e)\,\mathrm{sinc}\,\frac{t-kT_e}{T_e}$$

Reconstruction approchée

- Utilisation du *bloqueur d'ordre zéro (BOZ)*

$$f_{BOZ}(t) = f(kT_e) \quad \text{pour} \quad t \in [kT_e,\ (k+1)T_e)$$



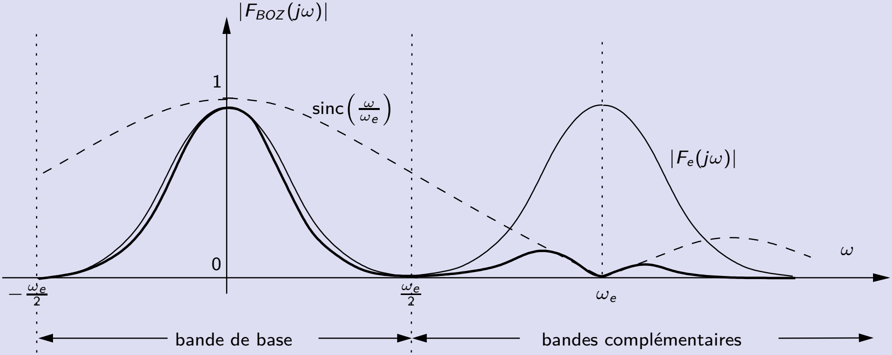
$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s}$$

$$B_0(j\omega) = e^{-j\omega\frac{T_e}{2}} \frac{2\sin\omega\frac{T_e}{2}}{\omega}$$

Reconstruction approchée

- Effet du bloqueur dans la bande de base :

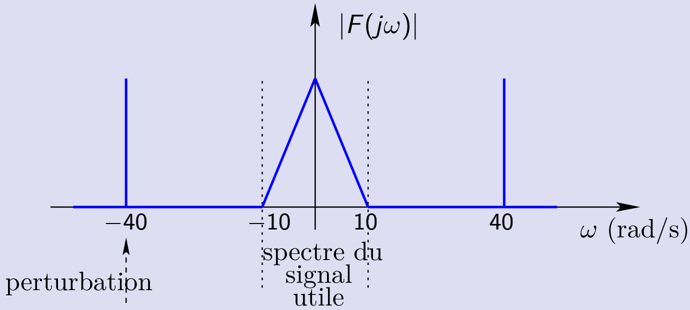
$$F_{BOZ}(j\omega) = B_0(j\omega)F_e(j\omega) = \underbrace{e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}_{\text{déphasage}} \underbrace{\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)}_{\text{déformation}} F(j\omega)$$



Exercices

✎Exercice #1

Soit un signal analogique $f(t)$ de spectre :



- Proposer une pulsation de coupure pour un filtre anti-repliement
- Proposer une pulsation d'échantillonnage

✎Exercice #2 (examen 2017)

Soit un signal analogique

$$y(t) = \sin(\omega_0 t) + 1,5\sin(\omega_1 t)$$

avec $\omega_0 = 20\text{rad/s}$ et $\omega_1 = 70\text{rad/s}$.

- Tracer le spectre d'amplitude $|Y(j\omega)|$ du signal $y(t)$.
- Le signal $y(t)$ est échantillonné avec une période $T_e = \pi/40\text{s}$. Calculer les fréquences et les pulsations d'échantillonnage et de Nyquist.
- Tracer le spectre d'amplitude du signal échantillonné idéal $y_e(t)$ et du signal échantillonné réel $y(kTe)$. Expliquer les résultats obtenus et spécifier s'il y a des distorsions de spectre dues au phénomène de repliement de spectre.